ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΝ.

Επειδὴ ἡ τριγωνομετρία εἶναι τὸ μέρος τῆς Μαθηματικῆς εἰς τὸ ὁποῖον διὰ τῆς βοηθείας τοῦ ὑπολογισμοῦ προσδιορίζονται τὰ μέρη ἑνὸς τριγώνου, εἴτε εὐθυγράμμου, εἴτε σφαιρικοῦ, διὰ τῆς γνώσεως ἀποχρῶντος ἀριθμοῦ δεδομένων: τουτέςι γίνεται μία ἐφαρμογὴ τοῦ ὑπολογισμοῦ εἰς τὴν προσδιόρισιν μερῶν τῆς ἐκτάσεως· διὰ τοῦτο ἔκρινα εὔλογον νὰ δώσω μίαν γενικὴν ἰδέαν τοῦ κλάδου τῆς Μαθηματικῆς γνωςοῦ ὑπὸ τὸ ὄνομα ἐφαρμογὴ τῆς Αλγεβρας εἰς τὴν Γεωμετρίαν. Ὥςε ἄς μὴ νομίσῃ τινὰς ὅτι ἡ τοιαύτη εἰσαγωγὴ δὲν ἔχει διόλου νὰ κάμῃ τίποτε μὲ τὴν τριγωνομετρίαν· διότι ἐπειδὴ, καθὼς εἶπα, εἰς τὴν τριγωνομετρίαν, διὰ τῆς βοηθείας τοῦ ὑπολογισμοῦ, λύονται τὰ προβλήματα ὅσα ἀναφέρονται εἰς τὴν προσδιόρισιν τῶν μερῶν ἑνὸς τριγώνου, εἶναι δηλαδὴ ἡ τριγωνομετρία μέρος τῆς λεγομένης ἐφαρμογῆς, πρέπει νὰ ἴδῃ τινὰς πῶς διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ λύεται ἕν Γεωμετρικὸν πρόβλημα, καὶ πῶς ἐςάθη δυνατὸν νὰ εἰσαχθῇ ὁ ὑπολογισμὸς εἰς τὰ ζητήματα τὰ ἀφορῶντα τὴν ἔκτασιν. Εκτὸς τούτου εἰς τὴν εἰσαγωγὴν ταύτην θέλομεν ἐξηγήσει μερικὰ πράγματα ἀπαραιτήτως ἀναγκαῖα διὰ τὴν κατάληψιν πολλῶν μερῶν τῆς Τριγωνομετρίας.

1. Η Αλγεβρα καὶ ἡ Γεωμετρία προσφέρουν κατὰ μέρος μεγάλα βοηθήματα διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων. Πρέπει λοιπὸν νὰ προΐδωμεν τὴν ὠφέλειαν ἥτις θέλει προκύψει ἀπὸ τὴν χρῆσιν ἐνταυτῷ τῶν δύο τούτων ἐπιςημῶν. Τὸ μέρος τοῦτο τῶν Μαθηματικῶν ὠνομάσθη ἐφαρμογὴ τῆς Αλγεβρας εἰς τὴν Γεωμετρίαν,

ἡ Αναλυτικὴ Γεωμετρία (1). Ας ἐξετάσωμεν πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ ἐφαρμοσθῇ ἡ Αλγεβρα εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς Γεωμετρίας.

2. Επειδὴ αἱ γραμμαὶ, αἱ ἐπιφάνειαι καὶ τὰ ςερεὰ εἶναι ποσότητες συγκεκριμέναι καὶ τὰ γράμματα τῶν ὁποίων γίνεται χρῆσις εἰς τὴν Αλγεβραν σημειόνουν ποσότητας ἀφῃρημένας, ἀνάγκη νὰ γνωσοποιήσωμεν τὰς συμφωνίας διὰ τῶν ὁποίων ὑποβάλλονται αἱ γεωμετρικαὶ ποσότητες εἰς τοὺς ἀλγεβρικοὺς ὑπολογισμούς. Λαμβάνεται εὐθεῖα γραμμὴ ὡς μονὰς τοῦ μήκους, τὸ μέτρον, φερ' εἰπεῖν· τότε ἐπειδὴ α σημειόνει ἀριθμὸν ἀφῃρημένον, α μέτρα ἐκφράζει τὸ μῆκος μιᾶς εὐθείας, α τετραγωνικὰ μέτρα παριςάνει ἐπιφάνειαν ἰσοδύναμον μὲ α φοραῖς ἓν τετραγωνικὸν μέτρον, καὶ α κυβικὰ μέτρα εἶναι ςερεὸν τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος περιέχει α φοραῖς ἓν κυβικὸν μέτρον. Συντομίας χάριν, ἐσυμφωνήθη νὰ ὑπονοῆται ἡ λέξις μονάς· ὥςε α ἠμπορεῖ νὰ σημειόνει ἢ γραμμὴν ἢ ἐπιφάνειαν ἢ ςερεόν. Οὕτως, ὅταν ἡ γραμμικὴ μονὰς ἦναι τὸ μέτρον καὶ λέγωμεν ὅτι μία γραμμὴ ἦναι ἴση μὲ 5, πρέπει νὰ ἐννοῶμεν ὅτι τὸ μῆκος ταύτης τῆς γραμμῆς εἶναι 5 μέτρα· μία ἐπιφάνεια σημειωμένη διὰ 7, ἰσοδυναμεῖ μὲ 7 τετραγωνικὰ μέτρα, καὶ ἓν ςερεὸν ἴσον μὲ 8, ἰσοδυναμεῖ μὲ 8 κυβικὰ μέτρα. Εὰν συμφωνήσωμεν νὰ σημειόσωμεν τὴν ὡς μονάδα λαμβανομένην γραμμὴν διὰ λ, τότε ἡ μονὰς τῆς ἐπιφανείας ἢ τοῦ ὄγκου θέλει εἶναι τὸ τετράγωνον ἢ ὁ κῦβος ὅςις ἔχει λ διὰ πλευράν.

(1) Η ἔκφρασις, Εφαρμογὴ τῆς Αλγέβρας εἰς τὴν Γεωμετρίαν καὶ τῆς Γεωμετρίας εἰς τὴν Αλγεβραν ἤθελε δώσει ἀκριβεςέραν ἰδέαν τοῦ κλάδου τούτου τῶν Μαθηματικῶν, διότι ἀμοιβαίως ἐφαρμόζεται ἡ Αλγεβρα εἰς τὴν Γεωμετρίαν καὶ ἡ Γεωμετρία εἰς τὴν Αλγεβραν.

Τὸ μῆκος τῆς γραμμικῆς μονάδος εἶναι κατ' ἀρέσκειαν, ἀλλὰ πρέπει νὰ ἦναι τὸ αὐτὸ δι'ὅλας τὰς ποσότητας τὰς ὁποίας θέλομεν νὰ συγκρίνωμεν εἰς τὸν αὐτὸν ὑπολογισμόν.

3. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἁπλῶν παραγόντων ἑνὸς γινομένου συνιςᾶ τὸν βαθμὸν αὐτοῦ, (δὲν θεωροῦνται δὲ οἱ ἀριθμητικοὶ συντελεςαί). Οὕτως, α, 2β, 3γ, κ.τ.λ, εἶναι τοῦ πρώτου βαθμοῦ· αβ, καὶ 3αβ, τοῦ δευτέρου βαθμοῦ· αβγ, $α^3$ καὶ $3αβ^2$, τοῦ τρίτου βαθμοῦ. Ἀλλὰ, κατὰ τὰς ἀρχὰς τῆς Γεωμετρίας, ἡ γραμμὴ ἔχει μίαν διάςασιν, ἡ ἐπιφάνεια δύο διαςάσεις, τὸ ςερεὸν τρεῖς διαςάσεις· ὥςε α, β, γ, σημειόνουν γραμμὰς, αβ μίαν ἐπιφάνειαν Ε, καὶ αβγ ἐκφράζει τὸν ὄγκον Ο, ἑνὸς ςερεοῦ. (*) Ἀλλ' ἐπειδὴ εἰς τὴν Ἀλγεβραν λέγομεν ὅτι α εἶναι τοῦ πρώτου βαθμοῦ, αβ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, καὶ αβγ τοῦ τρίτου· διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ὁ βαθμὸς μιᾶς ποσότητος μετρεῖ τὴν διάςασίν της· ὥςε αἱ ἐκφράσεις, βαθμὸς, διάςασις, εἶναι συνώνυμοι. Πρέπει ὅμως νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι κατὰ τὴν ἔννοιαν τῆς λέξεως διάςασις, γεωμετρική τις ποσότης δὲν ἔχει περισσότερον ἀπὸ τρεῖς διαςάσεις, ἐν ᾧ ἀλγεβρικὴ ποσότης ἠμπορεῖ νὰ ἦναι ἀνωτέρου βαθμοῦ τοῦ τρίτου.

Λέγεται ὁμογενὲς πολυώνυμον, τὸ πολυώνυμον τοῦ ὁποίου ὅλοι οἱ ὅροι εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ, τουτέςι

(*) Πρέπει νὰ ὑπονοῆται, ὅτι ἐὰν αἱ πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου ἦναι α φοραῖς λ καὶ β φοραῖς λ· ἡ ἐπιφάνεια Ε ἰσοδυναμεῖ μὲ ὀρθογώνιον τὸ ὁποῖον περιέχει αβ φοραῖς τὴν μονάδα τῆς ἐπιφανείας καὶ ὅτι τὸ ςερεὸν Ο, ἰσοδυναμεῖ μὲ παραλληλεπίπεδον ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου αἱ προσεχεῖς κόψεις εἶναι α φοραῖς λ, β φοραῖς λ, γ φοραῖς λ· τὸ παραλληλεπίπεδον τοῦτο περιέχει αβγ φοραῖς τὴν μονάδα τοῦ ὄγκου.

τῆς αὐτῆς διαςάσεως. Οὕτως $2\alpha\beta + \delta\gamma - \alpha$, εἶναι ὁμογενὲς πολυώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ· τὸ πολυώνυμον τοῦτο ἔχει δύο διαςάσεις, καὶ μετρεῖ ἐπιφάνειαν.

4. Διὰ τῆς Γεωμετρίας ἐνίοτε ἀποδεικνύονται μερικαὶ προτάσεις τῆς Αλγεβρας, ἀλλ᾽ ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖςον ἡ Αλγεβρα ἔχει τὰ δύο ταῦτα καλὰ: τὸ νὰ καταςαίνῃ ἁπλουςέραν τὴν ἀπόδειξιν τῶν Γεωμετρικῶν θεωρημάτων, καὶ νὰ ἀνακαλύπτωνται δι᾽ αὐτῆς αἱ ὡραιότεραι κατασκευαί.

Ιδοὺ παραδείγματα, ἱκανὰ νὰ δείξουν τὴν ὠφέλειαν τῆς ἐφαρμογῆς τῆς Αλγεβρας εἰς τὴν Γεωμετρίαν.

Παράδειγμα 1.ον Διὰ νὰ ἀποδειχθῇ ἀλγεβρικῶς ὅτι τὰ γινόμενα, $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, εἶναι ἴσα, πρέπει διαδοχικῶς νὰ ὑποτεθῇ ὅτι α καὶ β εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ, κλάσματα, καὶ ἀσύμμετροι ποσότητες. Διὰ τῆς Γεωμετρίας ἡ ἀπόδειξις γίνεται ἁπλουςέρα, διότι, ἐπειδὴ τὰ γινόμενα $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, μετροῦν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ αὐτοῦ ὀρθογωνίου, ἀναγκαίως εἶναι ἴσα. Η αὐτὴ ἀπόδειξις ἐφαρμόζεται εἰς τρεῖς πραγματικοὺς παράγοντας, διότι καθ᾽ ὁποιανδήποτε τάξιν ἐκτελεσθῇ τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων, α, β, γ, πάντοτε μετρεῖ τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς προσεχεῖς κόψεις εἶναι α, β, γ. Τὸ ἐλάττωμα τῆς γεωμετρικῆς ἀποδείξεως εἶναι ὅτι δὲν ἐκτείνεται εἰς μεγαλήτερον ἀριθμὸν παραγόντων.

Παράδειγμα 2.ον Γεωμετρικῶς ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ ὄγκος κορμοῦ πυραμίδος μὲ παραλλήλους βάσεις ἰσοδυναμεῖ μὲ τρεῖς πυραμίδας τῶν ὁποίων τὸ κοινὸν ὕψος εἶναι τὸ τοῦ κορμοῦ, αἱ δὲ βάσεις, ἡ ἄνω βάσις τοῦ κορμοῦ, ἡ κάτω βάσις τοῦ ἰδίου, καὶ μία μέση γεωμετρικῶς ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τούτων βάσεων. Η Αλγεβρα ἀποδεικνύει ταύτην τὴν πρότασιν καὶ ἐνταὐτῷ φανερόνει τὸν τρόπον τῆς ἀνακαλύψεώς της. Τῷ ὄντι, ἐὰν ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου αβγδε παραλλήλου τῆς βάσεώς της ΑΒΓΔΕ, ὁ κορμὸς αβγδε ΑΒΓΔΕ θέλει εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν δύο πυραμίδων ΣΑΒΓΔΕ, Σαβγδε. Εὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν Σ κατεβασθῇ ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ ἡ κάθετος ΣΠ ἥτις συναπαντᾷ τὸ παράλληλον ἐπίπεδον αβγδε εἰς τὴν ϛιγμὴν π, εἶναι γνωϛὸν ὅτι οἱ ὄγκοι τῶν δύο πυραμίδων ἐκφράζονται διὰ ⅓ΠΣ×ΑΒΓΔΕ, ⅓Σπ× αβγδε· τὸ ἐπίπεδον ΣΑΠ τέμνει τὰς δύο βάσεις ΑΒΓΔΕ, αβγδε, κατὰ δύο παραλλήλους ΑΠ, απ. Εὰν λοιπὸν ὁ ὄγκος τοῦ κορμοῦ σημειωθῇ διὰ χ, τὸ ὕψος του πΠ διὰ υ, καὶ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν βάσεών του, ΑΒΓΔΕ, αβγδε, διὰ β^2 καὶ β'^2, πρόκειται νὰ ἐκτιμηθῶσι τὰ ὕψη ΣΠ, Σπ. Τώρα αἱ γνωϛαὶ ἰδιότητες τῶν ὁμοίων πολυγώνων δίδουν,

$$\frac{\beta^2}{\beta'^2}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{\alpha\beta}^2}=\frac{\overline{A\Sigma}^2}{\overline{\alpha\Sigma}^2}=\frac{\overline{\Pi\Sigma}^2}{\overline{\pi\Sigma}^2}.$$

Λοιπὸν $\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\Pi\Sigma}{\pi\Sigma}$, ἢ $\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\pi\Sigma+\upsilon}{\pi\Sigma}$.

ἡ τελευταία αὕτη ἐξίσωσις δίδει,

$$\pi\Sigma=\frac{\upsilon\beta'}{\beta-\beta'},\quad \Pi\Sigma=\pi\Sigma+\upsilon=\frac{\upsilon\beta}{\beta-\beta'}, \quad (1)$$

ἀλλά, $\chi=\frac{1}{3}\Pi\Sigma\times AB\Gamma\Delta E-\frac{1}{3}\pi\Sigma\times\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$.

Αντεισάγοντες τὸς ἀλγεβρικὰς τιμὰς τῶν ποσοτήτων,

---

(1) Η ἀναλογία, β:β' :: ΠΣ:πΣ, ἄγει κατ' εὐθεῖαν εἰς τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα, διότι ἐπειδὴ ΠΣ—πΣ ἰσοῦται μὲ υ, δίδει β—β':υ :: β:ΠΣ :: β':πΣ.

ἈΒΓΔΕ, αβγδε, καὶ διαιροῦντες ἔπειτα $\beta^3-\beta'^3$ διὰ $\beta-\beta'$, εὑρίσκομεν,

$$\gamma = \tfrac{1}{3}\upsilon(\beta^2 + \beta^2 + \beta\beta')$$

Η ἐξίσωσις αὕτη ἀναγνωσθεῖσα εἰς τὴν κοινὴν γλῶσσαν, ἄγει εἰς τὴν ἐκφωνηθεῖσαν πρότασιν. σχ. ά.

Θέλομεν ἰδεῖ (ἀρ. 21) ὅτι διὰ τῆς Αλγεβρας ἀνακαλύπτεται ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ διὰ τὴν διαίρεσιν εὐθείας εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον. καὶ παρομοίως ὅτι ἡ Αλγεβρα ἄγει ἀμέσως εἰς τὸν τύπον τὸν προσδιορίζοντα τὴν ἐπειφάνειαν ἑνὸς τριγώνου διὰ λειτουργίας τῶν τριῶν πλευρῶν (βλεπε. ἀριθ. 22), ἐν ᾧ ἡ διὰ τῆς Γεωμετρίας ἀπόδειξις εἶναι πολλὰ συμπεπλεγμένη.

5. Διὰ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν Αλγεβραν εἰς τὴν λύσιν τῶν Γεωμετρικῶν προβλημάτων, παριςάνομεν τὰς γνωςὰς καὶ ἀγνώςους ποσότητας διὰ γραμμάτων· γράφομεν ἀλγεβρικῶς τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος· αἱ προκύπτουσαι ἐξισώσεις δίδουν τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώςων, καὶ ἡ κατασκευὴ τῶν πραγματικῶν τιμῶν τῶν ἀγνώςων ἄγει εἰς τὴν ζητουμένην λύσιν.

Τὰ Γεωμετρικὰ προβλήματα εἶναι ἢ προσδιωρισμένα ἢ ἀπροσδιόριςα. Επειδὴ σκοπὸν δὲν ἔχομεν νὰ δώσωμεν τελείαν ἐφαρμογῆς πραγματείαν, διὰ τοῦτο ἀρκούμεθα νὰ δείξωμεν πῶς ἡ Αλγεβρα ἐφαρμόζεται εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τὰ ὁποῖα ἄγουν εἰς μίαν ἐξίσωσιν μὲ μίαν μόνην ἄγνωςον· ἀλλὰ πρότερον ἂς ἴδωμεν πῶς κατασκευάζονται αἱ ἀλγεβρικαὶ ποσότητες.

Κατασκευὴ τῶν ἀλγεβρικῶν ποσοτήτων.

6. Αἱ λύσεις τῶν περισσοτέρων γεωμετρικῶν προβλημά των ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὰς ἀναλογίας. Ἀλλ᾽ ὅταν καμμία γραμμὴ δὲν ὑποτεθῇ ἴση μὲ τὴν μονάδα, κάθε ἀναλογία ἄγει εἰς μίαν ὁμογενῆ ἐξίσωσιν· αἱ προκύπτουσαι ἐξισώσεις πρέπει λοιπὸν νὰ ἦναι ὁμογενεῖς δηλαδὴ μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τῶν παρονομαστῶν, ὅλοι οἱ ὅροι εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ. Ἐπομένως, διὰ νὰ ἐκφράζῃ ἓν κλάσμα γραμμὴν ἢ ἐπιφάνειαν, ἢ στερεόν, πρέπει ἡ διάστασις τοῦ ἀριθμητοῦ νὰ ὑπερβαίνῃ τὴν τοῦ παρονομαστοῦ κατὰ μίαν, ἢ κατὰ δύο, ἢ κατὰ τρεῖς μονάδας.

Οὕτως, ἐὰν, α, β, γ, δ, ε, ζ, σημειόνουν γραμμὰς, $\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta\varepsilon}$ εἶναι γραμμὴ, διότι τεθέντος $\chi = \frac{\alpha\beta\gamma}{\delta\varepsilon}$, ἐξάγεται $\varepsilon\delta\chi =$ αβγ, καὶ ἐπειδὴ ἡ τελευταία αὕτη ἐξίσωσις πρέπει νὰ ἦναι ὁμογενὴς, χ εἶναι μιᾶς διαστάσεως.

Τὸ κλάσμα $\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{\varepsilon\zeta}$ ἔχει δύο διαστάσεις καὶ παριστάνει ἐπιφάνεαν· $\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{\varepsilon}$ προσδιορίζει στερεόν.

Οταν δὲ γραμμή τις ληφθῇ ὡς μονὰς, καὶ ἀντὶ ταύτης ἀντικατασταθῇ 1, οἱ τύποι δὲν εἶναι πλέον ὁμογενεῖς καὶ διὰ νὰ τοὺς κατασκευάσωμεν, καταστaίνομεν πρῶτον αὐτοὺς ὁμογενεῖς πολλαπλασιάζοντες δι᾽ ἁρμοδίων δυνάμεων τῆς γραμμῆς λ εἰλημμένης ὡς μονάδος. Ας ὁμιλήσωμεν κατὰ πρῶτον περὶ τῶν ὁμογενῶν τύπων.

Κατασκευὴ τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ μίαν μόνην ἄγνωστον.

7. Η γενικὴ ἐξίσωσις τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ μίαν μόνην ἄγνωστον, πάντοτε δύναται νὰ ἀχθῇ εἰς τὴν μορφὴν

$\chi = \alpha$, καὶ ἐν ᾧ χ σημειόνει γραμμὴν ἢ ἐπιφάνειαν ἢ ὄγκον, α ἠμπορεῖ νὰ ἦναι μονώνυμον, ἢ πολυώνυμον ἀκέραιον ἢ κλασματικόν· ἂς ἐξετάσωμεν τὰς διαφόρους ταύτας περιςάσεις.

χ σημειόνει ἄγνωςον γραμμήν.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν $\chi = \beta$, λαμβάνομεν εὐθεῖαν ἴσην κατὰ τὸ μῆκος μὲ β φοραῖς τὴν μονάδα λ· ἡ εὐθεῖα αὕτη ἐκφράζει τὴν ἄγνωςον χ.

Τὴν ἔκφρασιν, $\chi = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$ κατασκευάζομεν ζητοῦντες τετάρτην γεωμετρικῶς ἀνάλογον τῶν τριῶν γνωςῶν γραμμῶν, γ, α, β· δηλαδὴ, ἀφ' οὗ ἄξωμεν δύο ἀπροσδιορίςους εὐθείας, ΟΔ, ΟΕ, ὑπὸ ὁποιανδήποτε γωνίαν, λαμβάνομεν τὰ μέρη ΟΓ, ΟΑ, ΟΒ ἀμοιβαίως ἴσα μὲ τὴν μονάδα λ, γ φοραῖς καὶ β φοραῖς ἐπαναληφθεῖσαν· ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΒ καὶ τὴν ΑΧ παράλληλον τῇ ΓΒ· ΟΧ θέλει εἶναι ἡ τιμὴ τῆς χ, διότι. (σχ. 6')

$$\text{ΟΓ} : \text{ΟΑ} :: \text{ΟΒ} : \text{ΟΧ}, \text{ ἢ } \gamma : \alpha :: \beta : \text{ΟΧ} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}.$$

Ἐὰν ἡ τιμὴ τῆς χ ἦτον $\frac{\alpha\beta\delta}{\gamma\varepsilon}$, κατὰ πρῶτον ἠθέλαμεν κατασκευάσει γραμμὴν τινὰ, κ, ἴσην μὲ $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$, ἔπειτα ἠθέλαμεν προσδιορίσει τὴν γραμμὴν $\frac{\kappa\delta}{\varepsilon}$. Ὡσαύτως ἠθέλαμεν κατασκευάσει, $\frac{\alpha\beta\delta\zeta}{\gamma\varepsilon\eta}$, $\frac{\alpha\beta\delta\zeta\vartheta}{\gamma\varepsilon\eta\kappa}$, ζητοῦντες διαδοχικῶς τετάρτας γεωμετρικὰς ἀναλόγους τριῶν γνωςῶν γραμμῶν.

8. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν γραμμὴν $\chi = \alpha - \beta$, ἄγομεν εὐθεῖαν τινὰ ΜΝ (σχ. γ')· ἀναχωροῦντες ἀπὸ ὁποιανδήποτε ςιγμὴν Ο, ταύτης τῆς εὐθείας, λαμβανομεν ΟΑ $= \alpha$ καὶ ΑΒ $= \beta$· ἡ εὐθεῖα ΟΒ θέλει εἶναι ἡ ἔκφρασις τῆς χ· διότι

$$\text{ΟΒ} = \text{ΟΑ} - \text{ΑΒ} = \alpha - \beta.$$

Σημείωσις. Οταν β ἦναι μικρότερον τοῦ α, ἡ ςιγμὴ Β πίπτει δεξιόθεν τῆς ἀρχῆς, Ο, καὶ ἡ τιμὴ τῆς χ εἶναι θετική. Οταν δὲ β εἶναι ἴσον μὲ α, ἡ ςιγμὴ Β πίπτει εἰς Ο καὶ ἡ ΟΒ θέλει εἶναι μηδὲν καὶ τῷ ὄντι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς χ εἶναι μηδέν. Οταν β ὑπερβαίνῃ α, ἡ ςιγμὴ Β πίπτει εἰς Β′, (1), ἀριςερόθεν τῆς ἀρχῆς Ο· ἡ κατασκευὴ λοιπὸν δίδει διὰ χ γραμμὴν τινὰ ΟΒ′, κατ' εὐθεῖαν ἀντίθετον τῇ ΟΒ, καὶ ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῆς χ εἶναι ἀρνητική, ἐν ᾧ ΟΔ ἦτον ἡ ἔκφρασις τῆς θετικῆς τιμῆς τῆς χ. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι καθὼς ἡ τιμὴ τῆς γραμμῆς, χ, εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ, ἡ αὐτὴ κατασκευὴ δίδει διὰ χ εὐθεῖαν τινὰ πίπτουσαν δεξιόθεν ἢ ἀριςερόθεν τῆς ἀρχῆς Ο. Ωςε τὰ σημεῖα $+$ καὶ $-$ δεικνύουν ὅτι εὐθεῖαι λαμβάνουσι θέσεις ἀντιθέτους. Η σημείωσεις αὕτη εἶναι ἀξία προσοχῆς. Οταν λέγεται ὅτι γραμμή τις εἶναι ἀρνητική, πρέπει νὰ ὑπονοῆται ὅτι ἡ τιμὴ ταύτης τῆς γραμμῆς ἔχει πρὸ αὐτῆς τὸ σημεῖον $-$· τοῦτο δὲ δεικνύει ὅτι τὸ μῆκος ταύτης τῆς γραμμῆς πρέπει νὰ φερθῇ, εἰς ἀντίθετον ἔννοιαν ἀπὸ ἐκείνην εἰς τὴν ὁποίαν λαμβάνονται αἱ θετικαὶ γραμμαί. (2)

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν, $\chi=\beta+\alpha-\gamma-\delta$, λαμβάνομεν (σχ. γ′), $ΟΒ=\beta$, $ΒΑ=\alpha$, $ΑΓ=\gamma$, $ΓΔ=\delta$,

---

(1) Τότε, $ΟΑ=\alpha$, $ΑΒ'=\beta$, καὶ τὸ μῆκος τῆς ΟΒ′ εἶναι $\beta-\alpha$.

(2) Οταν λοιπὸν εἰς τὸν ὑπολογισμὸν θὰ εἰσάξωμεν ἀντὶ τῶν γεωμετρικῶν ποσοτήτων τὰς ἀλγεβρικὰς τιμάς των, πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν κατὰ πρῶτον τὴν θέσιν τῶν γεωμετρικῶν τούτων ποσοτήτων ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν ἐκ τῆς ὁποίας ἐκτιμῶνται· καὶ ὅταν ἐξ αὐτῶν ἄλλαι μὲν εὑρίσκωνται εἰς μίαν θέσιν ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν, ἄλλαι δὲ εἰς ἀντίθετον, τότε αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ τῶν δευτέρων πρέπει νὰ γραφθῶσιν εἰς τὸν ὑπολογισμὸν μὲ ἐναντίον σημεῖον ἀπὸ ἐκεῖνο μὲ τὸ ὁποῖον ἐγράφθησαν αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ τῶν πρώτων· δηλαδὴ ἐὰν δοθῇ εἰς τὰς πρώτας τὸ $+$ ἢ δὲν δοθῇ εἰς αὐτὰς κἀνὲν σημεῖον πρέπει εἰς τὰς δευτέρας νὰ δοθῇ τὸ σημεῖον $-$. Η παρατήρησις αὕτη εἶναι πολλὰ ἀναγκαία εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν.

Τὸ μῆκος ΟΔ, θέλει εἶναι ἡ ἔκφρασεις τῆς χ, διότι

$$ΟΔ = ΘΒ + ΒΑ - ΑΓ - ΓΔ = \beta + \alpha - \gamma - \delta.$$

Καθώς, $\beta + \alpha - \gamma - \delta$, εἶναι θετικὸν ἢ μηδὲν ἢ ἀρνητικὸν, ἡ ϛιγμὴ Δ πίπτει δεξιόθεν τῆς ϛιγμῆς Ο, ἢ εἰς Ο, ἢ ἀριϛερόθεν τῆς ϛιγμῆς Ο.

9. Η περίϛασις καθ' ἣν χ ἐκφράζεται διὰ κλάσματος οἱ δύο ὅροι τοῦ ὁποίου εἶναι πολυώνυμα, ἄγεται εἰς τὴν προλαβοῦσαν, μετὰ τὴν μεταμόρφωσιν τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαϛοῦ εἰς μονώνυμα. Εϛω,

$$\chi = \frac{\alpha^3\beta - \alpha^2\gamma^2}{\alpha^3 - \gamma^3}.$$

Αφ' οὗ θέσωμεν τὰς ὁμογενεῖς ἐξισώσεις,

$$\alpha^2\gamma^2 = \alpha\lambda',\ \gamma^3 = \alpha^2\mu\cdot\ \text{ὅθεν},\ \lambda' = \frac{\gamma\gamma}{\alpha},\ \mu = \frac{\gamma\gamma\gamma}{\alpha\alpha},$$

προσδιορίζομεν τὰς γραμμὰς, λ', μ, καὶ ἡ τιμὴ τῆς χ ἄγεται εἰς

$$\chi = \frac{(\beta - \lambda')\alpha^3}{(\alpha - \mu)\alpha^2} = \frac{(\beta - \lambda')\alpha}{(\alpha - \mu)}.$$

$(\alpha - \mu)$ καὶ $(\beta - \lambda')$, εἶναι δύο γραμμαὶ ν, π· εἰς τρόπον ὥϛε τὸ ζήτημα ἄγεται εἰς τὴν κατασκευὴν ἑνὸς κλάσματος, $\frac{\alpha\pi}{\nu}$, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι μονώνυμα.

Ηθέλαμεν φθάσει εἰς τὴν αὐτὴν τιμὴν τῆς χ, κάμνοντες,

$$\alpha^3\beta = \delta\beta^3,\ \alpha^2\gamma^2 = \varepsilon\beta^3,\ \alpha^3 = \zeta\beta^3,\ \gamma = \eta\beta^2,$$

διότι ἐπειδὴ διὰ τούτων τῶν ἐξισώσεων προσδιορίζονται αἱ γραμμαὶ, $\delta, \varepsilon, \zeta, \eta$, ἠθέλαμεν ἔχει, $\chi = \frac{(\delta - \varepsilon)\beta^3}{(\zeta - \eta)\beta^2} = \frac{(\delta - \varepsilon)\beta}{(\zeta - \eta)}$

καὶ χ ἤθελεν εἶναι μία τετάρτη γεωμετρικῶς ἀνάλογος τῶν τριῶν γνωςῶν γραμμῶν, $\zeta-\eta$, $\delta-\varepsilon$, β· ἐπειδὴ ἡ τελευταία αὔτη κατασκευὴ εἶναι πλέον μακρυνὴ τῆς προηγουμένης, βλέπομεν ὅτι ἡ ἐκλογὴ τοῦ εἰσαγομένου γράμματος ὡς κοινοῦ παράγοντος, δύναται νὰ ἔχῃ ἐπίρροιαν ἐπάνω εἰς τὴν ἁπλότητα τῆς κατασκευῆς.

10. Ἡ ἐκτεθεῖσα μέθοδος εἶναι γενική· πλὴν ἐνίοτε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν συντομωτέρας κατασκευάς. Παραδείγματος χάριν, τὴν γραμμὴν, $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\gamma}$ ἠθέλαμεν προσδιορίσει ζητοῦντες τετάρτην ἀνάλογον τῶν τριῶν γνωςῶν γραμμῶν, γ, $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$.

11. Ὁ αὐτὸς τρόπος ἐφαρμόζεται εἰς τὰς ἐπιφανείας καὶ τὰ ςερεά. Οὕτως, εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi=\alpha\beta$, ἡ ἄγνωςος ἐπιφάνεια χ, ἐκφράζεται δι' ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου αἱ διαςάσεις εἶναι α φοραῖς λ καὶ β φοραῖς λ.

Διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς ἐπιφανείας $\chi=\frac{\alpha\gamma\delta}{\varepsilon}$, ἀρκεῖ ἡ προσδιόρισις μιᾶς γραμμῆς $\beta=\frac{\gamma\delta}{\varepsilon}$· καὶ θέλει εἶναι $\chi=\alpha\beta$.

Ἐὰν $\chi=\alpha\beta\gamma$, ἡ ἄγνωςος χ θέλει ἔχει ἔκφρασιν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς διαςάσεις εἶναι α φοραῖς λ, β φοραῖς λ, καὶ γ φοραῖς λ.

Διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ ςερεοῦ, $\chi=\frac{\alpha\beta\delta\varepsilon\zeta}{\eta\theta}$, προσδιορίζεται γραμμή τις $\gamma=\frac{\delta\varepsilon\zeta}{\eta\theta}$· καὶ τοῦτο δίδει, $\chi=\alpha\beta\gamma$.

Ὅταν οἱ δύο ὅροι τοῦ ἐκφράζοντος τὴν ἄγνωςον χ κλάσματος, ἦναι πολυώνυμα, μεταμορφόνομεν αὐτὰ εἰς μονώνυμα ὡς εἴπομεν, (ἀρ. 9).

12. Όταν ἡ ἐξίσωσις δὲν ἦναι ὁμογενὴς, κατὰ πρῶτον τὴν ἀποκαθιςῶμεν ὁμογενῆ, πολλαπλασιάζοντες δι' ἁρμοδίων δυνάμεων τῆς γραμμῆς λ, ὡς μονάδος εἰλημμένης. Οὕτως ὅταν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi = \frac{\alpha^5 - \beta}{\gamma^2 - \delta}$, ἡ ἄγνωςος χ σημειόνει ἐπιφάνειαν καὶ α, β, γ, δ, γραμμὰς· ὁ τύπος καταςαίνεται ὁμογενὴς, ὅταν τεθῇ

$$\chi = \frac{(\alpha^5 - \beta\lambda^4)}{(\gamma^2 - \delta\lambda)\lambda}.$$

Ἂς ἐφαρμόσωμεν τὴν γενικὴν ταύτην θεωρίαν εἰς παραδείγματα.

13. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Νὰ διαιρέσωμεν εὐθεῖαν δεδομένην, ΟΜ = α, (σχ. ϛ', εἰς δύο μέρη, ΟΓ, ΓΜ, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν λόγον μεταξύ των δύο γνωςῶν γραμμῶν, μ, ν. Ἔςω ΟΓ = χ· θέλομεν ἔχει ΓΜ = α − χ· ἡ ἀναλογία

$$\text{ΟΓ} : \text{ΓΜ} :: \mu : \nu, \text{ δίδει } \chi = \frac{\alpha\mu}{\mu + \nu}.$$

Η ἄγνωςος χ εἶναι λοιπὸν μία τετάρτη γεωμετρικῶς ἀνάλογος τῶν τριῶν γνωςῶν γραμμῶν, μ + ν, μ καὶ α. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν χ, ἄγομεν ὁποιανδήποτε εὐθεῖαν ΟΔ· λαμβάνομεν, ΟΒ = μ, ΒΝ = ν· ἄγομεν ὁμοίως τὴν ΝΜ· ἡ παράλληλος ΒΓ τῇ ΝΜ προσδιορίζει τὴν ζητουμένην ςιγμὴν Γ· διότι τὰ ὅμοια τρίγωνα, ΟΜΝ, ΟΓΒ, δίδουν

$$\text{ΟΝ} : \text{ΟΜ} :: \text{ΟΒ} : \text{ΟΓ}, \text{ ἢ } \mu + \nu : \alpha :: \mu : \text{ΟΓ} \text{ ἢ}$$

$$\text{ΟΓ} = \chi = \frac{\alpha\mu}{\mu + \nu}.$$

14. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δεδομένων δύο σιγμῶν Β καὶ Α ἀπροσδιορίσου εὐθείας ΕΖ· ζητεῖται νὰ ἀχθῇ εἰς ταύτην τὴν εὐθεῖαν μία κάθετος, ὥςε ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν διαςημάτων ὁποιαςδήποτε ςιγμῆς ταύτης τῆς καθέτου ἀπὸ τὰς δύο δεδομένας ςιγμὰς Α καὶ Β νὰ ἦναι ἴση μὲ δεδομένον τετράγωνον, δ^2. (σχ. ε')

Επειδὴ ἡ ἐκφώνησις τοῦ προβλήματος δὲν φανερόνει ἀπὸ ποίαν θέσιν σχετικῶς πρὸς τὴν ςιγμὴν Α, ἡ κάθετος συναπαντᾷ τὴν ἀπροσδιόριςον εὐθεῖαν, ὑποθέτομεν ὅτι πίπτει δεξιόθεν ταύτης τῆς ςιγμῆς· ὁ ὑπολογισμὸς θέλει δείξει ἐὰν ἡ ὑπόθεσις αὕτη ἦναι ἀκριβὴς καὶ ἐὰν τὸ πρόβλημα ἦναι δυνατόν. Εςω, ΗΘ ἡ ζητουμένη κάθετος· πρόκειται νὰ προσδιορισθῇ ὁ ποῦς Χ ταύτης τῆς καθέτου, ὥςε δι' ὁποιανδήποτε ςιγμὴν αὐτῆς Γ, ἡ σχέσις $\overline{\Gamma B}^2 - \overline{\Gamma A}^2 = \delta^2$ νὰ πληροῦται.

Τὰ τρίγωνα, ΓΧΒ, ΓΧΑ δίδουν,

$$\overline{\Gamma X}^2 = \overline{\Gamma B}^2 - \overline{X B}^2 = \overline{\Gamma A}^2 - \overline{X A}^2 \cdot \text{ ὅθεν}$$

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \overline{\Gamma B}^2 - \overline{\Gamma A}^2 = \overline{X B}^2 - \overline{X A}^2$$

Τώρα ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου μέλους ταύτης τῆς τελευταίας ἐξισώσεως δηλαδὴ $\overline{\Gamma B}^2 - \overline{\Gamma A}^2$ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τῆς ςιγμῆς Γ ἐπὶ τῆς καθέτου ΗΘ· διότι διὰ κάθε ἄλλην ςιγμὴν Δ ταύτης τῆς καθέτου ἠθέλαμεν ἔχει $\overline{\Delta B}^2 - \overline{\Delta A}^2 = \overline{X B}^2 - \overline{X A}^2$, ὅθεν $\overline{\Gamma B}^2 - \overline{\Gamma A}^2 = \overline{\Delta B}^2 - \overline{\Delta A}^2$· λοιπὸν καὶ τὸ δεύτερον ἔχει τὴν ἰδίαν τιμήν· ἑπομένως ὁσάκις ὑψωθῇ μία κάθετος ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, πάντοτε ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν διαςημάτων, ὁποιασδήποτε στιγμῆς τῆς καθέτου ἀπὸ δύο δεδομένας στιγμὰς εἶναι σταθερὰ ποσότης· ἀλλὰ καὶ ἡ στιγμὴ τῆς ἀπροσδιορίστου εὐθείας ἐκ τῆς ὁποίας ὑψόνεται ἡ κάθετος εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς καθέτου· λοιπὸν ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν διαστημάτων ταύτης τῆς στιγμῆς ἀπὸ τὰς ἄλλας δύο δεδομένας Β καὶ Α, εἶναι ἡ αὐτὴ ὡς ἀνωτέρω· καὶ ἐπειδὴ τὴν ἐκαλέσαμεν δ^2· διὰ τοῦτο

$$(2)\ \overline{XB}^2-\overline{XA}^2=\delta^2.$$

Τούτου τεθέντος, ἔστωσαν

$AB=\alpha$ καὶ $AX=\chi$· ὅθεν $BX=\alpha-\chi$.

ἡ σχέσις (2) δίδει

$$(\alpha-\chi)^2-\chi^2=\delta^2 \quad ἢ \quad \alpha^2-2\alpha\chi+\chi^2-\chi^2=\delta^2$$

ἢ $2\alpha\chi=\alpha^2-\delta^2$· ὅθεν $\chi=\frac{\alpha^2-\delta^2}{2\alpha}=\frac{(\alpha+\delta)(\alpha-\delta)}{2\alpha}$ (3)

Τώρα καθὼς ἡ τιμὴ τῆς χ, εἶναι θετικὴ ἢ ἴση μὲ τὸ μηδὲν, ἢ ἀρνητική, ὁ ποῦς τῆς καθέτου, πίπτει δεξιόθεν τῆς Α, (ὡς ὑπεθέσαμεν), ἢ ἐπὶ τῆς Α, ἢ ἀριστερόθεν τῆς Α. Τῷ ὄντι.

1.ον Οταν χ ἦναι θετικόν, δ εἶναι μικρότερον τοῦ α· λοιπὸν

$$\delta^2<\alpha^2,\ \overline{\Gamma B}^2-\overline{\Gamma A}^2<\overline{AB}^2,\ \overline{\Gamma B}^2<\overline{\Gamma A}^2+\overline{AB}^2$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἀνισότητα συνάγομεν ὅτι ἡ γωνία ΓΑΒ πρέπει νὰ ἦναι ὀξεῖα. Ο ποῦς λοιπὸν τῆς ζητουμένης καθέτου δηλαδὴ Χ εὑρίσκεται δεξιόθεν τῆς Α, καὶ ἀπέχει ἀπ' αὐτὴν ὅσον ἐκφράζει ἡ τιμὴ τῆς χ, δηλαδὴ $\frac{(\alpha+\delta)(\alpha-\delta)}{2\alpha}$ ἥτις εἶναι ἴση μὲ μίαν τετάρτην γεωμετρικῶς ἀνάλογον ΑΧ τῶν τριῶν γνωςῶν γραμμῶν, 2α, $\alpha+\delta$, $\alpha-\delta$· προσέτι εἶναι μικρότερον ἀπὸ $\frac{1}{2}$ ΑΒ· διότι $\mathrm{AX} = \frac{\alpha^2-\delta^2}{2\alpha} = \frac{1}{2}\alpha - \frac{\delta^2}{2\alpha}$.

2.ον Οταν ἡ τιμὴ τῆς χ ἦναι μηδὲν, τότε ἔχομεν

$$\delta^2 = \alpha^2,\ \overline{\Gamma B}^2 - \overline{\Gamma A}^2 = \overline{AB}^2,\ \overline{\Gamma B}^2 = \overline{\Gamma A}^2 + \overline{AB}^2.$$

ἡ γωνία λοιπὸν ΓΑΒ εἶναι ὀρθή· ὁ ποῦς λοιπὸν τῆς ζητουμένης καθέτου πίπτει εἰς Α.

3.ον Οταν, τέλος, ἡ τιμὴ τῆς χ ἦναι ἀρνητική, ἔχομεν

$$(4)\ \chi = -\frac{(\delta+\alpha)(\delta-\alpha)}{2\alpha}$$

$$\delta^2 > \alpha^2,\ \overline{\Gamma B}^2 - \overline{\Gamma A}^2 > \overline{AB}^2,\ \overline{\Gamma B}^2 > \overline{\Gamma A}^2 + \overline{AB}^2.$$

ἡ γωνία λοιπὸν ΓΑΒ, πρέπει νὰ ἦναι ἀμβλεῖα· ὁ ποῦς ἄρα τῆς ζητουμένης καθέτου πίπτει ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, δηλαδὴ κατὰ τὰ ἀριςερὰ τῆς Α. Εὰν αὕτη ἡ κάθετος ἦναι ἡ Θ΄Η΄, θέλομεν ἔχει

$$\mathrm{AX'} = \frac{(\delta+\alpha)(\delta-\alpha)}{2\alpha},\ \overline{\Gamma' B}^2 - \overline{\Gamma' A}^2 = \delta^2.$$

εἰς τρόπον ὥςε ΑΧ΄, θέλει εἶναι τετάρτη γεωμετρικῶς ἀνάλογος, τῶν τριῶν γνωςῶν γραμμῶν, 2α, $\delta+\alpha$, $\delta-\alpha$, (*)

(*). Δυνάμεθα προσέτι νὰ βεβαιώσωμεν τοῦτο, διότι σημειόνοντες ΑΧ΄ διὰ χ, ἔχομεν $\mathrm{BX'} = \alpha+\chi$, καὶ ἡ συνθήκη

$$\overline{\mathrm{BX'}}^2 - \overline{\mathrm{AX'}}^2 = \delta^2,\ \text{δίδει}\ \chi = \frac{(\delta+\alpha)(\delta-\alpha)}{2\alpha}.$$

Καὶ καθὼς αὕτη ἡ τιμὴ τῆς χ, εἶναι θετικὴ ἢ μηδὲν ἢ ἀρνητική, ἡ κάθετος πίπτει ἀριςερόθεν τῆς Α, ὡς ὑπετέθη, ἢ εἰς Α, ἢ δεξιόθεν τῆς Α. Η ἀντίςροφος εἶναι ἀληθής.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν ζητουμένην κάθετον, πρέπει πάντοτε νὰ προσδιορίσωμεν μίαν τετάρτην γεωμετρικῶς ἀνάλογον τριῶν γνωςῶν γραμμῶν. Διὰ νὰ καταςήσωμεν δὲ ταύτην τὴν κατασκευὴν ἁπλουςέραν, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΒΓ, μέρος τι ΒΚ΄ = δ· ἄγομεν

Μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι ἐὰν σημειόσωμεν διὰ χ, τὸ διάςημα τῆς σιγμῆς Α ἀπὸ τὸν πόδα τῆς ζητουμένης καθέτου, μετροῦντες τὸ διάςημα τοῦτο δεξιόθεν τῆς ἀρχῆς Α· καθὼς ὁ ποῦς τῆς καθέτου πέσῃ εἰς τὴν σημειωμένην θέσιν, (δεξιόθεν τῆς Α), ἢ εἰς Α, ἢ ἀριςερόθεν τῆς Α, ἡ τιμὴ (3) τῆς χ, θέλει εἶναι θετικὴ ἢ μηδὲν ἢ ἀρνητική.

Ἐὰν λάβωμεν ΒΧ δι' ἄγνωςον, εὑρίσκομεν

$$BX = \frac{\alpha+\delta}{2\alpha}.$$

Η τιμὴ αὕτη εἶναι πάντοτε θετική· καὶ τῷ ὄντι, $\overline{ΓΒ}^2 - \overline{ΓΑ}^2$ ἐπειδὴ πρέπει νὰ ἦναι ἀριθμὸς θετικὸς, δ^2, ἡ πλαγία ΓΒ εἶναι μεγαλητέρα τῆς πλαγίας ΓΑ· τοῦτο δὲ ἀπαιτεῖ νὰ πίπτῃ ἡ κάθετος ἀριςερόθεν τῆς σιγμῆς Β. Καθὼς δ, εἶναι μικρότερον, ἢ ἴσον ἢ μεγαλήτερον τῆς α, ἡ τιμὴ τῆς ΒΧ εἶναι μικροτέρα τῆς α, ἢ ἴση ἢ μεγαλητέρα· ὥςε ὁ ποῦς τῆς ζητουμένης καθέτου πίπτει, μεταξὺ Β καὶ Α, ἢ εἰς Α, ἢ ἀριςερόθεν τῆς Α. Η ἀντίςροφος ἦναι ἀληθής. Τοῦτο δὲ συμφωνεῖ μὲ τὴν διάλυσιν τῆς τιμῆς (3).

Τέλος, ὅταν ὑποτεθῇ ὅτι ὁ ποῦς τῆς καθέτου πίπτει δεξιόθεν τῆς Β εἰς Χ'', καὶ σημειωθῇ ΒΧ'' διὰ χ, ἡ συνθήκη

$$BX''^2 - AX''^2 = \delta^2, \text{ δίδει } \chi = -\left(\frac{\alpha+\delta}{2\alpha}\right).$$

μίαν κάθετον τὴν Κ'Ν, ἐπὶ τὴν ΒΕ, καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς Κ'Ν, ἐποιανδήποτε σιγμὴν Ν, τοιαύτην ὅμως ὥςε τὰ τόξα μν, πκ ἐκ τῶν σιγμῶν Β, Α, ὡς ἐκ κέντρων, μὲ τὰς ἀκτῖνας, ΒΝ, Κ'Ν, γραφόμενα νὰ τέμνωνται εἰς σιγμὴν τινὰ Γ· ἡ ἀγομένη κάθετος ἀπὸ τὴν σιγμὴν Γ ἐπὶ τῆς ΒΕ θέλει ἔχει τὴν ζητουμένην ἰδιότητα· διότι δι' ἐποιανδήποτε σιγμὴν Δ αὐτῆς, θέλει εἶναι:

$$\overline{ΔΒ}^2 - \overline{ΔΑ}^2 = \overline{ΓΒ}^2 - \overline{ΓΑ}^2 = \overline{ΒΝ}^2 - \overline{Κ'Ν}^2 = \overline{ΒΚ'}^2 = \delta^2.$$

Η ἀρνητικὴ αὕτη τιμὴ τῆς χ ἐκφράζει ὅτι ὁ ποῦς τῆς καθέτου πίπτει εἰς ἐναντίαν θέσιν ἀπὸ τὴν ὑποτεθεῖσαν, δηλαδὴ εἰς Λ, ἀριστερόθεν τῆς Β.

15. Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω διάλυσιν ἕπεται, ὅτι ἡ θετικὴ τιμὴ τῆς ἀγνώστου, ἐκφράζει ὅτι ἡ παριστανομένη ἀπὸ τὴν ἄγνωστον ταύτην γραμμὴ, πίπτει εἰς τὴν μερικὴν θέσιν ἥτις ἀπεδόθη εἰς αὐτὴν ὅταν ἐτίθετο τὸ πρόβλημα εἰς ἐξίσωσιν, ἐν ᾧ ἡ ἀρνητικὴ τιμὴ ταύτης τῆς ἀγνώστου, δεικνύει ὅτι πρέπει νὰ φερθῇ εἰς ἐναντίαν θέσιν ἀπὸ τὴν εἰς αὐτὴν ἀποδοθεῖσαν. Η συνέπεια αὕτη συμφωνεῖ μὲ τὴν σημείωσιν τοῦ ἀριθ. 8.

Κατασκευὴ τῶν ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μὲ μίαν μόνην ἄγνωστον.

16. Θέλοντες νὰ λύσωμεν γεωμετρικόν τι πρόβλημα διὰ τῆς Ἀλγεβρας, καὶ σημειόνοντες διὰ χ ἄγνωστον τινα γραμμὴν, καὶ διὰ α, β, π θετικὰς ποσότητας αἱ ὁποῖαι νὰ ἐκφράζουν γνωστὰς γραμμὰς, δυνατὸν νὰ καταντήσωμεν εἰς ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μιᾶς τῶν μορφῶν,

$$\chi^2 \pm 2\pi\chi \pm \alpha\beta = 0$$

πρόκειται νὰ κατασκευάσωμεν τὰς ῥίζας τούτων τῶν ἐξισώσεων.

17. Διὰ νὰ ἀρχίσωμεν ἀπὸ τὴν ἁπλουστέραν περίστασιν, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν,

$$\chi^2 = \alpha\beta, \ (*)$$

Ἐπειδὴ ἡ ἄγνωστος χ εἶναι μέση γεωμετρικῶς ἀνάλογος μεταξὺ α καὶ β, τὴν κατασκευάζομεν λαμβάνοντες ἐπὶ

(*) Ηθέλαμεν φθάσει εἰς ταύτην τὴν ἐξίσωσιν, ἐὰν ἐζητούσαμεν τὴν πλευρὰν, χ, τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου μὲ τὸ ὀρθογώνιον $\alpha\beta$, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ α καὶ β εἶναι δεδομέναι.