ἀντεισάγοντες εἰς ταύτην τὴν ἐξίσωσιν ἀντὶ συν χ συν π' τὴν τιμήν του σφ $\frac{1}{2}$ Σ ἡμ $\frac{1}{2}$ γ ἡμ χ—συν $\frac{1}{2}$ γ, εὑρίσκομεν

$$\text{συν}\,\psi = \text{ἡμ}\,\chi\ \text{συν}\,\tfrac{1}{2}\gamma + \text{ἡμ}\,\chi\,(\text{συν}\,\chi - \text{ἡμ}\,\chi\ \text{σφ}\,\tfrac{1}{2}\Sigma\ \text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}\gamma)$$

Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν Σ καὶ γ ςαθερὰ, καὶ θέλωμεν ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ χ καὶ ψ νὰ μένῃ ἐπίσης ςαθερὰ ὁποιαδήποτε εἶναι ἡ θέσις τῆς ςιγμῆς Γ, ἀρκεῖ νὰ κάμωμεν τὸν συντελεςὴν τοῦ ἡμ χ ἴσον μὲ τὸ μηδέν· διότι τότε ἐπειδὴ συν χ—ἡμ χ σφ $\frac{1}{2}$ Σ ἡμ $\frac{1}{2}$ γ=ο συνάγομεν σφχ=σφ $\frac{1}{2}$ Σ ἡμ $\frac{1}{2}$ γ, καὶ ψ=ἡμ χ συν $\frac{1}{2}$ γ, τιμαὶ αἱ ὁποῖαι μένουν ςαθεραὶ ὅταν Σ καὶ γ ἦναι ἐπίσης ςαθερά· αἱ τιμαὶ λοιπὸν αὗται ὄχι μόνον εἶναι τοιαῦται σχετικῶς πρὸς τὴν κορυφὴν Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἀλλὰ σχετικῶς πρὸς τὴν κορυφὴν κάθε ἄλλου τριγώνου τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν μὲ τὸ ΑΒΓ· ὥςε ὅλαι αὗται αἱ κορυφαὶ ἰσάκις ἀπέχουν ἀπὸ μίαν ςιγμὴν τῆς καθέτου ΙΠΚ διὰ τὴν ὁποίαν χ=σφ $\frac{1}{2}$ Σ ἡμ $\frac{1}{2}$ γ, καὶ ψ=ἡμ χ συν $\frac{1}{2}$ γ· εὑρίσκονται λοιπὸν ἐπὶ τοῦ μικροῦ κύκλου τοῦ ὁποίου πόλος εἶναι ἡ τοιαύτη ςιγμή. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν δὲ τὸν τοιοῦτον κύκλον, ἀφ' οὗ ἄξωμεν τὸ τόξον ΙΠ κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως ΑΒ, λαμβάνομεν ἐκεῖθεν τοῦ πόλου, τὸ μέρος ΠΚ' τοιοῦτον ὥςε σφΠΚ'=σφ $\frac{1}{2}$ Σ ἡμ $\frac{1}{2}$ γ, καὶ ὁ γραφόμενος μικρὸς κύκλος ἐκ τῆς ςιγμῆς Κ' ὡς ἐκ πόλου μὲ διάςημα τὸ Κ'Γ τοιοῦτον ὥςε συν Κ'Γ=ἡμΠΚ' συν $\frac{1}{2}$ γ θέλει εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος ὅλων τῶν κορυφῶν τῶν τριγώνων τῆς αὐτῆς βάσεως γ καὶ τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας Σ.

Τὸ ὡραῖον τοῦτο θεώρημα χρεωςεῖται εἰς τὸν Λεξέλλον· (βλέπε nova Acta Petropolitana Tom V, par. I).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ ΙΑ'.

Περὶ τῆς Γ' προτάσεως τοῦ Η' βιβλίου.

Τὴν πρότασιν ταύτην δυνάμεθα ἀκριβέςερον νὰ ἀποδείξωμεν ἀνάγοντές την εἰς τὰ προοιμιώδη λήμματα τὰ ὁποῖα ἐπροτάξαμεν τοῦ βιβλίου τούτου, κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον.

Λέγω πρῶτον ὅτι ἡ περατουμένη κυρτὴ ἐπιφάνεια ἀπὸ τὰς κόψεις ΑΖ, ΒΗ. καὶ ἀπὸ τὰ τόξα ΑωΒ, ΖχΗ δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι μικροτέρα τοῦ ἀντιςοιχοῦντος μέρους τοῦ ἐγγεγραμμένου πρίσματος, τοῦ ὀρθογωνίου, δηλαδὴ, ΑΒΗΖ. σχ. 252.

Τῷ ὄντι ἔςω Σ ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος κυρτὴ ἐπιφάνεια, καὶ, εἰ δυνατὸν, ἔςω τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΗΖ ἢ ΑΒ×ΑΖ=Σ+Μ· ἔνθα Μ εἶναι ποσότης θετική.

Ἀς προεκβληθῇ τὸ ὕψος ΑΖ τοῦ πρίσματος καὶ τοῦ κυλίνδρου ποσότητα τινὰ ΑΖ' ἴσην μὲ ν φοραῖς τὴν ΑΖ, ὄντος ν ὁποιουδήποτε ἀκεραίου ἀριθμοῦ· ἐὰν ἐνταῦθα προεκβληθῇ ὁ κύλινδρος καὶ τὸ πρίσμα, φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ περιεχομένη κυρτὴ ἐπιφάνεια Σ' μεταξὺ τῶν κόψεων AZ', BH', θέλει περιέχει ν φοραῖς τὴν ἐπιφάνειαν Σ· εἰς τρόπον ὥςε $\Sigma'=\nu\Sigma$. καὶ ἐπειδὴ $\nu\times AZ=AZ'$, ἕπεται ὅτι $AB\times AZ'=\nu\Sigma+\nu M=\Sigma'+\nu M$. Τώρα ἐπειδὴ ν εἶναι ἀκέραιος κατ' ἀρέσκειαν ἀριθμὸς καὶ Μ μία δεδομένη ποσότης, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ν ὥςε νM νὰ ἦναι μεγαλήτερον τοῦ διπλασίου τοῦ τμήματος $A\omega B$, διότι ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ κάμωμεν

$\nu > \frac{2A\omega B}{M}$· τότε λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον $AB\times AZ'$ ἢ ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια $ABH'Z'$ ἤθελεν εἶναι μεγαλητέρα τῆς περικυκλούσης ἐπιφανείας, ἥτις σύγκειται ἀπὸ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν Σ' καὶ ἀπὸ δύο κυκλικὰ ἴσα τμήματα $A\omega B$, $Z'\chi H'$. Ἀλλ' ἐξ ἐναντίας, ἡ δευτέρα ἐπιφάνεια εἶναι μεγαλητέρα τῆς πρώτης, κατὰ τὸ πρῶτον προοιμιῶδες λῆμμα· λοιπὸν τὸν ἀδύνατον $\Sigma < ABHZ$.

Λέγω δεύτερον ὅτι ἡ αὐτὴ κυρτὴ ἐπιφάνεια Σ δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΗΖ. Διότι ἂς ὑποθέσωμεν, εἰ δυνατὸν, ὅτι, ληφθείσης τῆς $AE=AB$, ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια AMK' ἰσοῦται μὲ τὸ ὀρθογώνιον $AZK'E$· ἀπὸ ὁποιανδήποτε ςιγμὴν Μ τοῦ τόξου ΑΜΕ, ἂς ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ ΑΜ, ΜΕ, καὶ ἂς ὑψωθῇ ἡ ΜΝ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως. Ἐπειδὴ τὰ τρία ὀρθογώνια ΑΜΝΖ, $MEK'N$, $AEK'Z$, ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, ἕπεται ὅτι εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις των ΑΜ, ΜΕ, ΑΕ. Ἀλλὰ $AM+ME > AE$, λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων ΑΜΝΖ, $MEK'N$ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ὀρθογωνίου $AZK'E$· τοῦτο δὲ ἰσοδυναμεῖ, ἐξ ὑποθέσεως, μὲ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν AMK', τὴν σύνθετον ἀπὸ τὰς δύο μερικὰς ἐπιφανείας ΑΝ, MK'· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων ΑΜΝΖ, $MEK'N$ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀντιςοιχουσῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν ΑΝ, MK'. Πρέπει λοιπὸν ἓν τοὐλάχιςον ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια ΑΜΝΖ, $MEK'N$ νὰ ἦναι μεγαλήτερον τῆς ἀντιςοιχούσης κυρτῆς ἐπιφανείας. Ἡ συνέπεια ὅμως αὕτη ἐναντιοῦται εἰς τὸ ἤδη ἀποδειχθὲν πρῶτον μέρος. Λοιπὸν 2ον ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια Σ οὔτε ἴση ἠμπορεῖ νὰ ἦναι μὲ τὴν τοῦ ἀντιςοιχοῦντος ὀρθογωνίου ΑΒΗΖ

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι $\Sigma > ABHZ$, καὶ οὕτως ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι μεγαλητέρα τῆς ἐπιφανείας κάθε ἐγγεγραμμένου πρίσματος.

Διὰ συλλογισμοῦ κατὰ πάντα ὁμοίου, ἤθελεν ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας κάθε περιγεγραμμένου πρίσματος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ ΙΒ΄.

Περὶ τῆς ἰσότητος καὶ ὁμοιότητος τῶν πολυέδρων.

Εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ΙΑ΄ βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου ὁ ἔννατος καὶ δέκατος ὁρισμὸς οὕτως εὑρίσκονται ἐκπεφρασμένοι:

Θ΄. Δύο ςερεὰ εἶναι ὅμοια, ὅταν περιέχωνται ἀπὸ ἰσάριθμα ὅμοια ἐπίπεδα τὸ κάθε ἓν μὲ τὸ κάθε ἕν.

Ι΄. Δύο ςερεὰ εἶναι ἴσα καὶ ὅμοια, ὅταν περιέχωνται ἀπὸ ἰσάριθμα ἐπίπεδα ἴσα καὶ ὅμοια τὸ κάθε ἓν μὲ τὸ κάθε ἕν.

Ἐπειδὴ τὸ ἀντικείμενον τῶν ὁρισμῶν τούτων εἶναι ἀπὸ τὰ δυσκολώτερα πράγματα τῆς ςοιχειώδους γεωμετρίας, θέλομεν τὸ ἐξετάσει ὁπωσοῦν λεπτομερῶς, καὶ ἐνταυτῷ θέλομεν ἐρευνήσει τὰς παρατηρήσεις τὰς ὁποίας περὶ τῆς αὐτῆς ὑποθέσεως ἔκαμεν ὁ Ροβέρτος Σίμσων εἰς τὴν ἔκδοσιν τῶν ςοιχείων, σελ. 388 καὶ σχολ.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν μὲ τὸν Ροβέρτον Σίμσωνα, ὅτι ὁ δέκατος ὁρισμὸς κυρίως δὲν εἶναι ὁρισμὸς, ἀλλὰ θεώρημα τὸ ὁποῖον ἔχει χρείαν ἀποδείξεως· διότι δὲν εἶναι φανερὸν, ὅτι δύο ςερεὰ διὰ τοῦτο μόνον εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ἕδρας ἴσας· καὶ ἐὰν ἡ πρότασις αὕτη ἀληθεύῃ, πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ εἴτε διὰ τῆς ἐπιθέσεως, εἴτε δι᾽ ὁποιουδήποτε ἄλλου τρόπου. Βλέπομεν ἀκολούθως ὅτι ἀπὸ τὸ ἐλάττωμα τοῦ δεκάτου ὁρισμοῦ μετέχει καὶ ὁ ἔννατος. Διότι, ἐὰν ὁ δέκατος ὁρισμὸς δὲν ἀποδειχθῇ, ἠμπορεῖ νὰ νομίσῃ τινὰς ὅτι ὑπάρχουν δύο ἄνισα καὶ ἀνόμοια ςερεὰ ἴσας ἔχοντα τὰς ἕδρας· ἀλλὰ τότε, κατὰ τὸν ἔννατον ὁρισμὸν, ἓν τρίτον ςερεὸν ἔχον τὰς ἕδρας ὁμοίας μὲ τὰς τῶν δύο πρώτων ἤθελεν εἶναι ὅμοιον μὲ ἕκαςον τούτων, καὶ ἐπομένως ὅμοιον μὲ σώματα ἑτερόμορφα: συνέπεια ἥτις περικλείει ἀντίφασιν, ἢ τοὐλάχιςον δὲν συμφωνεῖ μὲ τὴν ἰδέαν τὴν ὁποίαν φυσικὰ ἔχομεν περὶ τοῦ ὁμοίου.

Πολλαὶ προτάσεις τοῦ ΙΑ΄ καὶ ΙΒ΄ βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου θεμελιοῦνται ἐπὶ τοῦ ἐννάτου καὶ δεκάτου ὁρισμοῦ, μεταξὺ δὲ τῶν ἄλλων καὶ ἡ ΚΗ΄ πρότασις τοῦ ΙΑ΄ βιβλίου, ἀπὸ τὴν ὁποίαν κρέμαται ἡ καταμέτρησις τῶν πρισμάτων καὶ τῶν πυραμίδων. Φαίνεται λοιπὸν ὅτι ἠμποροῦσε νὰ ἐπιπλήξῃ τινὰς τὸν Εὐκλείδην ὡς παμπόλλους προτάσεις ὄχι μὲ ἀκρίβειαν εἰς τὰ ςοιχεῖά του ἀποδείξαντα. Εἶναι ὅμως μία περίςασις ἐπιτηδεία νὰ ἐξασθενίσῃ τὴν ἐπίπληξιν ταύτην, καὶ αὐτὴν δὲν πρέπει νὰ παραλείψωμεν.

Τὰ σχήματα τῶν ὁποίων τὴν ἰσότητα ἢ ὁμοιότητα ἐπιςηριζόμενος ὁ Εὐκλείδης ἐπὶ τοῦ ἐννάτου καὶ δεκάτου ὁρισμοῦ ἀποδεικνύει, εἶναι τοιαῦτα ὥςε εἰς τὰς ςερεάς των γωνίας δὲν συνενοῦνται περισσότεραι τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν: τώρα εἰς πολλὰ μέρη τοῦ Εὐκλείδου μὲ πολλὴν καθαρότητα ἀποδεικνύεται ὅτι ἐὰν δύο ςερεαὶ γωνίαι σύγκεινται ἀπὸ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας ἴσας ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, αἱ ςερεαὶ αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι. Ἀπὸ ἄλλο δὲ μέρος ὅταν δύο πολύεδρα ἔχουν τὰς ἕδρας ἴσας ἢ ὁμοίας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, αἱ ὁμόλογοι ςερεαί των γωνίαι εἶναι φανερὰ σύνθετοι ἀπὸ ἰσαρίθμους ἐπιπέδους γωνίας ἴσας ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν. Ἐν ὅσῳ λοιπὸν αἱ συνενούμεναι εἰς ἑκάστην ςερεὰν γωνίαν ἐπίπεδοι γωνίαι δὲν ὑπερβαίνουν τὰς τρεῖς, αἱ ςερεαὶ ὁμόλογοι γωνίαι εἶναι φανερὰ ἴσαι. Ἀλλ᾽ ὅταν αἱ ὁμόλογοι ἕδραι καὶ αἱ ὁμόλογοι ςερεαὶ γωνίαι ἦναι ἴσαι, οὐδεμία πλέον ἀμφιβολία ὅτι καὶ τὰ ςερεὰ εἶναι ἴσα· διότι ἠμποροῦν νὰ ἐπιτεθοῦν, ἢ τοὐλάχιςον εἶναι συμμετρικά. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἡ ἐκφώνησις τοῦ ἐννάτου καὶ δεκάτου ὁρισμοῦ εἶναι ἀληθὴς καὶ ἀποδεκτὴ εἰς τὴν περίςασιν τῶν τριπλῶν ςερεῶν γωνιῶν, ἥτις εἶναι ἡ μόνη τὴν ὁποίαν ὁ Εὐκλείδης ἐθεώρησε. Ὥςε ἡ ἐπίπληξις τὴν ὁποίαν εἰς τὸν συγγραφέα τοῦτον ἢ εἰς τοὺς ὑπομνηματιςάς του ἠμπόρει τινὰς νὰ κάμῃ διὰ τὸ μὴ ἀκριβὲς, παύει τοῦ νὰ ἦναι τόσον βαρεῖα καὶ καταντᾷ πλέον εἰς περιορισμοὺς καὶ ἐξηγήσεις τὰς ὁποίας ἐκεῖνος δὲν ἔδωκε.

Μένει νὰ ἐξετάσωμεν ἐὰν ἡ ἐκφώνησις τοῦ δεκάτου ὁρισμοῦ, ἥτις ἀληθεύει εἰς τὴν περίςασιν τῶν τριπλῶν ςερεῶν γωνιῶν, ἀληθεύει ἐν γένει· ὁ Ῥοβέρτος Σίμσων βεβαιόνει ὅτι ἐν γένει δὲν ἀληθεύει, καὶ ὅτι δυνατὸν νὰ κατασκευασθῶσι δύο ἄνισα ςερεὰ περιεχόμενα ἀπὸ ἰσαρίθμους ἕδρας ἴσας ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν. Πρὸς ὑποςήριξιν δὲ τῆς προτάσεώς του φέρει παράδειγμα τὸ ὁποῖον οὕτω δύναται νὰ γενικευθῇ. (1)

(1) Ἰδοὺ τὸ παράδειγμα τοῦ Ῥοβέρτου Σίμσωνος: ἔςω ὁποιονδήποτε εὐθύγραμμον σχῆμα, ὡς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ· ἀπὸ μίαν ςιγμὴν Δ τούτου ἂς ὑψωθῇ ἡ ΔΕ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ, ἥτις ἂς προεκβληθῇ ἄνω καὶ ὑποκάτω τοῦ ἐπιπέδου, καὶ εἰς τὰ δύο μέρη αὐτοῦ ἂς ληφθῶσιν αἱ ΔΕ, ΔΖ ἴσαι μεταξύ των· ἔςω Η μία ςιγμὴ ἐπὶ τῆς ΕΖ τῆς ἄνω τοῦ ἐπιπέδου κειμένης· ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ· ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ· ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ· ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ: ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΕΔΖ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, κάμνει ὀρθὰς γωνίας μὲ τὰς ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· καὶ εἰς τὰ τρίγωνα ΕΔΒ, ΖΔΒ, αἱ ΕΔ, ΔΒ ἰσοῦνται μὲ τὰς ΖΔ, ΔΒ, ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ περιέχουν ὀρθὰς γωνίας· διὰ τοῦτο ἡ βάσις ΕΒ ἰσοῦται μὲ τὴν βάσιν ΖΒ. Ὡσαύτως ἡ ΕΑ ἰσοῦται μὲ τὴν ΖΑ, καὶ ἡ ΕΓ μὲ τὴν ΖΓ· εἰς δὲ τὰ τρίγωνα ΕΒΑ, ΖΒΑ, αἱ ΕΒ, ΒΑ ἰσοῦνται μὲ τὰς ΖΒ, ΒΑ, καὶ ἡ βάσις ΕΑ μὲ τὴν ΖΑ· ὅθεν ἡ γωνία ΕΒΑ ἰσοῦται μὲ τὴν

Ἐὰν εἰς ἐπειονδόπετε πολύεδρον προσθέσωμεν πυραμίδα δίδοντες βάσιν εἰς αὐτὴν μίαν τῶν ἑδρῶν τοῦ πολυέδρου· ἐὰν ἀκολούθως, ἀντὶ νὰ τὴν προσθέσωμεν, τὴν ἀφαιρέσωμεν σχηματίζοντες εἰς τὸ πολύεδρον κοιλότητα ἴσην μὲ τὴν πυραμίδα, θέλομεν ἔχει δύο ςερεὰ ἴσας ἔχοντα τὰς ἕδρας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ ὅμως ἄνισα. Οὐδεμία ἀμφιβολία περὶ τῆς ἀνισότητος τῶν οὕτω κατασκευαζομένων ςερεῶν· παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι ἓν τούτων περιέχει εἰσεχούσας ςερεὰς γωνίας: τώρα εἶναι πολλὰ πιθανὸν ὅτι ὁ Εὐκλείδης ἐννόησε νὰ ἀποκλείσῃ τὰ ἀκανόνιςα σώματα τὰ ὁποῖα ἔχουν κοιλότητας ἢ εἰσεχούσας ςερεὰς γωνίας, καὶ ἐπεριορίσθη εἰς τὰ κυρτὰ πολύεδρα. Ἐὰν ἀποδεχθῶμεν τὸν περιορισμὸν τοῦτον, χωρὶς τοῦ ὁποίου περιπλέον πολλαὶ ἄλλαι προτάσεις δὲν ἤθελον εἶναι ἀληθεῖς, τὸ παράδειγμα τοῦ Ροβέρτου Σίμσωνος δὲν συνάγει τίποτε κατὰ τοῦ ὁρισμοῦ ἢ τοῦ θεωρήματος τοῦ Εὐκλείδου.

Ὅπως καὶ ἂν ἔχῃ τὸ πρᾶγμα, ἀπὸ ὅλας ταύτας τὰς παρατηρήσεις προκύπτει ὅτι οἱ ὁρισμοὶ τοῦ Εὐκλείδου ἔννατος καὶ δέκατος δὲν ἠμποροῦν νὰ μείνουν ὡς ὑπάρχουν. Ο Ροβέρτος Σίμσων

ΖΒΑ, καὶ τὸ τρίγωνον ΕΒΑ ἰσοῦται μὲ ΖΒΑ, καὶ αἱ γωνίαι τοῦ ἑνὸς μὲ τὰς γωνίας τοῦ ἄλλου· διὰ τοῦτο τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια. Ὡσαύτως τὸ τρίγωνον ΕΒΓ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΖΒΓ, καὶ τὸ ΕΑΓ μὲ τὸ ΖΑΓ· ἔχομεν λοιπὸν δύο ςερεὰ ἕκαςον τῶν ὁποίων περιέχεται ἀπὸ ἓξ τρίγωνα· τὰ τρία πρῶτα τρίγωνα τοῦ ἑνὸς ἔχουν τὴν κορυφήν των εἰς τὸ Η, καὶ αἱ βάσεις των εἶναι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ· τῶν δὲ ἄλλων τριῶν ἡ κοινὴ κορυφὴ εἶναι εἰς Ε, καὶ αἱ βάσεις αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ· τὸ ἄλλο δὲ ςερεὸν περιέχεται ἀπὸ τὰ αὐτὰ τρία τρίγωνα, τῶν ὁποίων ἡ κοινὴ κορυφὴ εἶναι εἰς τὸ Η, καὶ βάσεις αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, καὶ ἀπὸ τὰ ἄλλα τρία τρίγωνα τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ εἶναι Ζ, καὶ αἱ βάσεις αἱ αὐταὶ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ: τώρα τὰ τρία τρίγωνα ΗΑΒ, ΗΒΓ, ΗΓΑ εἶναι κοινὰ καὶ εἰς τὰ δύο ςερεά, τὰ ἄλλα δὲ τρία ΕΑΒ, ΕΒΓ, ΕΓΑ τοῦ πρώτου ςερεοῦ τὰ ἐδείξαμεν ἴσα καὶ ὅμοια μὲ τὰ ἄλλα τρία ΖΑΒ, ΖΒΓ, ΖΓΑ τοῦ ἄλλου ςερεοῦ τὸ κάθε ἓν μὲ τὸ κάθε ἕν. Ὅθεν τὰ δύο ταῦτα ςερεὰ περιέχονται ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἴσων καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων: τὸ ὅτι δὲ δὲν εἶναι ἴσα, φανερόν· διότι τὸ πρῶτον περιέχεται εἰς τὸ δεύτερον· ὅθεν δὲν ἀληθεύει ἐν γένει ὅτι ἐκεῖνα τὰ ςερεὰ εἶναι ἴσα τὰ ὁποῖα περιέχονται ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἴσων καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων „ (βλέπε *the elements of Euclid by Alexander Ingram. Philomath.*, *Edinburgh*, 1799 *Notes pag.* 302). Ο Μ.

σκκόνει τὸν ὁρισμὸν τῶν ἴσων στερεῶν, ὅστις τῷ ὄντι πρέπει νὰ συγκαταριθμηθῇ μεταξὺ τῶν θεωρημάτων, καὶ ὁρίζει ὅμοια στερεὰ ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα περιέχονται ἀπὸ ἰσάριθμα ὅμοια ἐπίπεδα, καὶ ἔχουν τὰς ὁμολόγους στερεὰς γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν. Ο ὁρισμὸς οὗτος εἶναι ἀληθὴς, πλὴν τὸ ἐλάττωμά του εἶναι ὅτι περιέχει πολλὰς περιττὰς συνθήκας. Εὰν ἀπ' αὐτὸν σηκωθῇ ἡ συνθήκη τῶν ἴσων στερεῶν γωνιῶν, τότε καταντᾷ εἰς τον τοῦ Εὐκλείδου, τοῦ ὁποίου τὸ ἔλλειμμα ἄλλο δὲν εἶναι εἰ μὴ ὅτι ὑποθέτει τὸ θεώρημα περὶ τῶν ἴσων πολυέδρων. Πρὸς ἀποφυγὴν κάθε περιπλοκῆς, ἐκρίναμεν κατάλληλον νὰ διαιρέσωμεν τὸν ὁρισμὸν τῶν ὁμοίων στερεῶν εἰς δύο μέρη: ἐν πρώτοις ἐδώκαμεν τὸν ὁρισμὸν τῶν ὁμοίων τριγωνικῶν πυραμίδων, ἔπειτα ὡρίσαμεν ὅμοια στερεὰ τὰ ἔχοντα βάσεις ὁμοίας, καὶ τῶν ὁποίων αἱ ἐκτὸς τῶν βάσεων τούτων ὁμόλογοι κορυφαὶ προσδιορίζονται ἀπὸ ὁμοίας τριγωνικὰς πυραμίδας ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν.

Ο ὁρισμὸς οὗτος διὰ μὲν τὰς βάσεις, ὑποτεθείσας τριγωνικὰς, ἀπαιτεῖ δύο συνθήκας, δι' ἑκάστην δὲ τῶν κορυφῶν τῶν ἐκτὸς τῶν βάσεων, τρεῖς· ὥστε ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν στερεῶν γωνιῶν ἑκάστου τῶν πολυέδρων παρασταθῇ διὰ Σ, ἡ ὁμοιότης τῶν δύο τούτων πολυέδρων ἀπαιτεῖ $2+3(\Sigma-3)$ ἴσας γωνίας καὶ εἰς τὰ δύο μέρη, ἢ $3\Sigma-7$ συνθήκας· καὶ οὐδεμία τῶν συνθηκῶν τούτων εἶναι περιττὴ ἢ περιεχομένη εἰς τὰς ἄλλας· διότι ἐνταῦθα θεωροῦμεν δύο πολύεδρα ὡς ἁπλῶς ἔχοντα ἰσαρίθμους κορυφὰς ἢ στερεὰς γωνίας, καὶ τότε χρειάζονται ἀκριβῶς, χωρὶς νὰ λείψῃ κἀμμία, αἱ $3\Sigma-7$ συνθῆκαι διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν δύο στερεῶν· πλὴν ἐὰν πρὸ πάντων ὑποθέταμεν ὅτι καὶ τὰ δύο εἶναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους, τοῦτ' ἔστιν ὅτι ἔχουν ἰσαρίθμους ἕδρας, καὶ αἱ ἕδραι αὗται παραβαλλόμεναι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, ἰσαρίθμους πλευρὰς, ἡ ὑπόθεσις αὕτη ἤθελεν περικλείει συνθήκας τινὰς εἰς τὴν περίστασιν καθ' ἣν αἱ ἕδραι ἤθελεν ἔχει περισσοτέρας τῶν τριῶν πλευρῶν, καὶ αἱ συνθῆκαι αὗται ἤθελον ἐλαττώσει τὸν ἀριθμὸν $3\Sigma-7$, ὥστε ἀντὶ τῶν $3\Sigma-7$ συνθηκῶν ἤθελε χρειάζονται μόνον $A-1$· καὶ περὶ τούτου βλέπε τὴν Η' σημείωσιν. Εντεῦθεν βλέπομεν τί εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον κάμνει τόσον δύσκολον ἕνα καλὸν ὁρισμὸν τῶν ὁμοίων στερεῶν: εἶναι ὅτι δυνατὸν νὰ θεωρηθῶσιν ὡς τοῦ αὐτοῦ εἴδους, ἢ μόνον ὡς ἔχοντα ἰσαρίθμους στερεὰς γωνίας. Εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίστασιν δὲν ὑπάρχει κἀμμία δυσκολία, καὶ ὅλαι αἱ περικλειόμεναι εἰς τὸν ὁρισμὸν $3\Sigma-7$ συνθῆκαι ἀνάγκη νὰ πληροῦνται διὰ νὰ ἦναι ὅμοια τὰ στερεὰ, καὶ ἐκ τούτου θέλει συναχθῇ πολὺ περισσότερον ὅτι εἶναι καὶ τοῦ αὐτοῦ εἴδους. Τοῦ λοιποῦ, ὄντος πλήρους τοῦ ἡμετέρου ὁρισμοῦ, ἐσυνάξαμεν ὡς θεώρημα τὸν ὁρισμὸν τοῦ Σίμσωνος.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι δυνατὸν νὰ παρασιωπηθῇ εἰς τὰ ςοιχεῖα τὸ θεώρημα περὶ τῆς ἰσότητος τῶν πολυέδρων· πλὴν ἐπειδὴ τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι καθ' ἑαυτὸ διάφορον (interessant), εὐχαρίςως καθεὶς θέλει εὕρῃ ἐνταῦθα τὴν ἀπόδειξίν του διὰ τῆς ὁποίας καταςαίνεται πλήρης ἡ θεωρία τῶν πολυέδρων. (1)

Τὸ ζήτημα τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν συνίςαται εἰς τὸ, ἐὰν μεταβαλλομένων τῶν κλίσεων τῶν ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα συγκροτοῦν τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς δεδομένου κυρτοῦ πολυέδρου, ἠμπορεῖ νὰ σχηματισθῇ ἄλλο δεύτερον κυρτὸν πολύεδρον περιεχόμενον ἀπὸ τὰ αὐτὰ πολυγωνικὰ ἐπίπεδα συνηνωμένα κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι ἐὰν δίδεται ἓν δεύτερον πολύεδρον πληροῦν εἰς τὸ ζήτημα, τοῦτο δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ δεδομένου· διότι εἰς τὰ δύο ταῦτα πολύεδρα τὰ ἴσα ἐπίπεδα εἶναι διατεταγμένα κατ' ἀντίςροφον τάξιν ὁλόγυρα τῶν ἀντιςοιχουσῶν ςερεῶν γωνιῶν. Διὰ τοῦτο ἀπὸ τὸ προκείμενον ζήτημα πρέπει νὰ ἀπομακρύνωμεν τὰ συμμετρικὰ πολύεδρα.

Παρατηροῦμεν, δεύτερον, ὅτι, ἐὰν τὸ δεδομένον πολύεδρον περιέχῃ μίαν ἢ περισσοτέρας ςερεὰς τριπλᾶς γωνίας, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἐκ φύσεως ἀμετάβλητοι, διότι ἡ γνῶσις τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ἀρκεῖ διὰ τὴν προσδιόρισιν τῶν ἀμοιβαίων κλίσεων τῶν ἐπιπέδων των, ὅταν συνενενοῦνται εἰς ςερεὰν γωνίαν· δυνάμεθα διὰ τοῦτο ἀπὸ τὸ προτεθὲν ςερεὸν νὰ ἀφαιρέσωμεν ὅλας τὰς τριγωνικὰς πυραμίδας αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὰς τριπλᾶς ςερεὰς γωνίας (2)· καὶ ἐὰν τὸ ἀπὸ τὴν ἀφαίρεσιν ταύτην προκύπτον ςερεὸν, ἔχῃ ἀκόμη ςερεὰς τριπλᾶς γωνίας, δυνάμεθα ὡσαύτως νὰ τὰς ἀφαιρέσωμεν, καὶ τὸ αὐτὸ νὰ πράξωμεν ἕως οὗ νὰ φθάσωμεν εἰς πολύεδρον εἰς ἑκάςην τῶν ςερεῶν γωνιῶν τοῦ ὁποίου νὰ μὴ συνενοῦνται ὀλιγώτεραι ἀπὸ τέσσαρας ἐπιπέδους γωνίας. Ἐὰν, τῷ ὄντι, τὸ σχῆμα τοῦ προτεθέντος ςερεοῦ ἠμπορῇ νὰ ἀλλάξῃ δι' ὁποιωνδήποτε μεταβολῶν τῶν κλίσεων τῶν ἐπιπέ-

---

(1) Η ἀπόδειξις τὴν ὁποίαν ἐνταῦθα δίδομεν, εἶναι, ἐκτὸς τινῶν διασαφήσεων, ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ὑπὸ τοῦ Κ. Καυσχύου (Cauchy) παρουσιασθεῖσαν εἰς τὸ ἰνςιτοῦτον ἐν ἔτει 1812, τὴν ὁποίαν ἀνεκάλυψεν ἀναχωρῶν ἀπὸ μερικὰς ἰδέας αἱ ὁποῖαι ἐπροτέθησαν περὶ τοῦ αὐτοῦ ὑποκειμένου εἰς τὴν πρώτην ἔκδοσιν τῶν Στοιχείων τούτων, σελ. 327 καὶ ἀκολ. Ο Σ.

(2) Ἐὰν ἡ αὐτὴ κόψις ἦτον κοινὴ εἰς δύο ςερεὰς τριπλᾶς γωνίας εἰς τὴν πρώτην ἐργασίαν δὲν ἠθέλαμεν ἀφαιρέσει εἰ μὴ μίαν τούτων. Ο. Σ.

δων του, ἡ ἀλλαγὴ αὕτη δὲν ἠμπορεῖ νὰ γένῃ εἰς τὰς ἀφαιρουμένας τριγωνικὰς πυραμίδας, ἀλλ' εἰς τὸ ἐναπομένον ςερεὸν μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ὅλων τῶν τριγωνικῶν πυραμίδων. Εἰς τὰ ἀκόλουθα λοιπὸν ὁ λόγος θέλει εἶναι μόνον περὶ τῶν πολυέδρων εἰς τῶν ὁποίων τὰς ςερεὰς γωνίας συνενοῦνται τοὐλάχιςον τέσσαρες ἐπίπεδοι γωνίαι·

Τούτου τεθέντος, ἔςω Σ (σχ. 286) ὁποιαδήποτε τῶν ςερεῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου, καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς Σ ὡς ἐκ κέντρου ἂς γραφθῇ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια ἀπὸ τὴν κοινὴν συναπάντησιν τῆς ὁποίας μὲ τὰ ἐπίπεδα τῆς ςερεᾶς γωνίας, σχηματίζεται τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ. Αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου τούτου ΑΒ, ΒΓ, κτλ. μετροῦν τὰς ἐπιπέδους γωνίας ΑΣΒ, ΒΣΓ, κτλ., καὶ ἑπομένως εἶναι ἀμετάβλητοι· ὅσον διὰ τὰς γωνίας Α, Β, Γ, κτλ. τοῦ πολυγώνου, ἑκάςη τούτων εἶναι τὸ μέτρον τῆς κλίσεως δύο προσκειμένων ἐπιπέδων τῆς ςερεᾶς γωνίας: οὕτως ἡ γωνία Β εἶναι τὸ μέτρον τῆς κλίσεως τῶν ἐπιπέδων ΑΣΒ, ΣΒΓ, τὴν ὁποίαν, διὰ τὸ σύντομον, καλοῦμεν, κλίσιν ἐπὶ τῆς κόψεως ΣΒ· ὡσαύτως ἡ γωνία Γ εἶναι τὸ μέτρον τῆς κλίσεως ἐπὶ τῆς κόψεως ΣΓ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Ἠμποροῦμεν λοιπὸν νὰ κρίνωμεν περὶ τῶν μεταβολῶν τοῦ σχήματος ἑκάςης ςερεᾶς γωνίας, ἀπὸ τὰς τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ, τοῦ ὁποίου αἱ μὲν πλευραὶ εἶναι ςαθεραὶ, αἱ δὲ γωνίαι μεταβάλλονται καθ' ὁποιονδήποτε τρόπον, φυλαττομένης ὅμως πάντοτε τῆς κυρτότητος τοῦ πολυγώνου. Ἀλλ' εἰς τὰ πολύγωνα ταῦτα τὰ σημεῖα τῶν μεταβολῶν ἐπὶ τῶν γωνιῶν παρουσιάζουν ἀξιοσημειώτους νόμους, τοὺς ὁποίους ἐρχόμεθα νὰ ἐκθέσωμεν εἰς τὰ ἀκόλουθα δύο λήμματα.

ΛΗΜΜΑ Α'.

Δοθεισῶν ὅλων τῶν πλευρῶν ἑνὸς σφαιρικοῦ πολυγώνου τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ἐκτὸς τῆς τελευταίας ΑΖ, ἐὰν μεταβληθῇ μία τῶν ἀπέναντι εἰς τὴν πλευρὰν ΑΖ γωνιῶν Β,Γ,Δ,Ε, ἐν ᾧ αἱ ἄλλαι μένουν ςαθεραί· λέγω ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΖ θέλει μὲν αὐξάνει ἐὰν ἡ γωνία αὐξάνῃ, θέλει δὲ ὀλιγοςεύει ἐὰν ἡ γωνία ὀλιγοςεύῃ· ὑποτίθεται περιπλέον εἰς ὅλας τὰς περιςάσεις, ὅτι τὸ πολύγωνον εἶναι κυρτὸν πρὶν καὶ μετὰ τὴν ἀλλαγὴν τοῦ σχήματός του. σχ. 286.

Ἂς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι μεταβάλλεται ἡ γωνία Β, ἐν ᾧ αἱ ἄλλαι τρεῖς Γ, Δ, Ε, μένουν ςαθεραί· ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΖ, τὸ σχῆμα ΒΓΔΕΖ δὲν θέλει δοκιμάσει κάμμίαν μεταβολὴν καὶ ἡ ΒΖ θέλει μένει ςαθερά. Θέλομεν ἔχει λοιπὸν σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ ΑΒΖ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΖ, εἶναι σταθεραί, καὶ εἰς τὸ ὁποῖον ἡ γωνία ΑΒΖ μεταβάλλεται τόσην ποσότητα ὅσην καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ τοῦ πολυγώνου, διότι τὸ μέρος ΖΒΓ μένει σταθερόν. Τώρα, κατὰ τὰς γνωστὰς ἰδιότητας (1), ἠξεύρομεν ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΖ θέλει αὐξάνει ἐὰν ἡ γωνία ΑΒΖ αὐξάνῃ, καὶ θέλει ὀλιγοστεύει ἐὰν ἡ γωνία ΑΒΖ πάσχῃ τὸ ἴδιον.

Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ἡ γωνία Γ μεταβάλλεται, ἐν ᾧ αἱ ἄλλαι τρεῖς Β, Δ, Ε, μένουν σταθεραί· ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ διαγώνιοι ΑΖ, ΖΓ, φανερὸν ὅτι αἱ διαγώνιοι αὗται θέλουν μένει σταθεραὶ καθὼς καὶ αἱ γωνίαι ΑΓΒ, ΖΓΔ· θέλομεν ἔχει λοιπὸν ὁμοίως σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ ΑΓΖ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ΑΓ, ΓΖ εἶναι σταθεραί, καὶ εἰς τὸ ὁποῖον ἡ γωνία ΑΓΖ μεταβάλλεται τὴν αὐτὴν ποσότητα ὁποῦ καὶ ἡ γωνία Γ τοῦ πολυγώνου· ὅθεν ἀπαραλλάκτως συμπεραίνομεν ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΖ θέλει αὐξάνει ἐὰν ἡ γωνία Γ αὐξάνει, καὶ θέλει ὀλιγοστεύει ἐὰν ἡ γωνία Γ πάσχῃ τὸ ἴδιον.

Φανερὸν ὅτι ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς ἠμπορεῖ νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὴν μεταβολὴν μιᾶς τῶν δύο γωνιῶν Α καὶ Ε, καὶ ὅτι ἔχει χώραν διὰ κάθε σφαιρικὸν πολύγωνον περισσοτέρων ἀπὸ τρεῖς πλευρῶν. Διὰ τοῦτο εἰς ὅλας τὰς περιστάσεις τὸ συμπέρασμα θέλει εἶναι σύμφωνον μὲ τὴν ἐκφώνησιν τῆς προτάσεως, φθάνει μόνον τὸ πολύγωνον νὰ ἦναι κυρτὸν πρὶν καὶ μετὰ τὴν ἀλλαγὴν τοῦ σχήματός του. Ὁ περιορισμὸς οὗτος εἶναι ἀναγκαῖος, διότι, ἐάν, φερ' εἰπεῖν, ἡ γωνία Γ ὠλιγόστευεν ἕως οὗ ἡ στιγμὴ Ζ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΑΕ, τότε ἡ ΑΖ ἤθελεν εἶναι ἐλάχιστον· καί, ἐὰν ἐκ ταύτης τῆς στιγμῆς, ἀκολουθοῦσε νὰ ὀλιγοστεύῃ ἡ γωνία Ε, φανερὸν ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΖ ἤθελεν αὐξάνει ἀντὶ νὰ ὀλιγοστεύῃ· πλὴν τότε, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΖΕ γίνεται εἰσέχουσα, τὸ πολύγωνον ἤθελε παύσει τοῦ νὰ ἦναι κυρτόν.

Πόρισμα. Τῶν αὐτῶν κειμένων, ἐὰν πολλαὶ τῶν ἀπέναντι εἰς τὴν πλευρὰν ΑΖ γωνιῶν αὐξάνουν, καὶ οὐδεμία τούτων ὀλιγοστεύῃ, ἡ πλευρὰ ΑΖ ἐξ αἰτίας ὅλων ὁμοῦ τῶν μεταβολῶν ἀναγκαίως θέλει αὐξήσει. Τὸ ἐναντίον ἀκολουθεῖ ὅταν πολλαὶ τῶν ἀπέναντι εἰς τὴν πλευρὰν ΑΖ γωνιῶν ὀλιγοστεύουν, καὶ οὐδεμία τούτων αὐξάνῃ.

Διότι, ἐὰν ἐξ αἰτίας τῆς ταυτοχρόνου αὐξομειώσεως, αἱ γωνίαι Α, Β, Γ, κτλ. τοῦ πολυγώνου, τρεφθοῦν εἰς Α′, Β′, Γ′, κτλ. δυνάμεθα νὰ μεταβῶμεν διαδοχικῶς ἀπὸ τὸ προτεθὲν πολύγωνον εἰς τὸ μὴ περιέχον πάρεξ μίαν μεταβεβλημένην γωνίαν Α′· ἀπὸ τοῦτο εἰς τὸ μὴ περιέχον πάρεξ τὰς δύο μεταβεβλημένας γωνίας Α′

---

(1) Ἡ πρότασις αὕτη δεικνύεται καθ' ὃν τρόπον καὶ ἡ Γ′ τοῦ Α′ βιβλ. διὰ τὰ εὐθύγραμμα τρίγωνα. Ο. Σ.

καὶ Β′, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Τώρα εἰς ἑκάστην τῶν μεταβάσεων τούτων ἡ ἐφαρμογὴ τῆς προτάσεως εἶναι φανερὰ, καὶ φέρει πάντοτε εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον.

ΛΗΜΜΑ Β′.

Ἐὰν δεδομένου σφαιρικοῦ κυρτοῦ πολυγώνου τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι σταθεραὶ καὶ ὑπὲρ τὰς τρεῖς, μεταβάλλωμεν τὰς γωνίας καθ᾽ ὁποιονδήποτε τρόπον, χωρὶς ὅμως τὸ πολύγωνον νὰ παύσῃ τοῦ νὰ ἦναι κυρτόν· ἐὰν ἀκολούθως θέσωμεν τὸ μὲν σημεῖον + εἰς τὴν κορυφὴν κάθε αὐξανομένης γωνίας, τὸ δὲ σημεῖον — εἰς τὴν κορυφὴν κάθε ἐλαττουμένης, καὶ δὲν θέσωμεν κανὲν σημεῖον εἰς τὰς γωνίας αἱ ὁποῖαι μένουν σταθεραί· λέγω ὅτι κάμνοντες τὸν γύρον τοῦ πολυγώνου, πρέπει νὰ εὕρωμεν τέσσαρας τοὐλάχιστον ἀλλαγὰς σημείου ἀπὸ τὴν μίαν κορυφὴν εἰς τὴν ἀκόλουθον.

Τῷ ὄντι 1ον ἐὰν ν ἦναι ὁ ἀριθμὸς τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου, δὲν ἠμποροῦν νὰ ὑπάρχουν ν—2 ἀκόλουθοι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἐνταὐτῷ νὰ αὐξάνουν, ἢ αἱ μὲν νὰ αὐξάνουν αἱ δὲ νὰ μένουν σταθεραί· διότι ἐὰν μία τῶν δύο τούτων περιστάσεων ἐδίδετο, κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ προλαβόντος λήμματος, ἤθελεν ἀκολουθήσει ὅτι ἡ ἀπέναντι εἰς τὰς ν—2 ταύτας γωνίας πλευρὰ τοῦ πολυγώνου θὰ αὔξανε: συνέπεια ἐναντία εἰς τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ὅλαι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου εἶναι σταθεραί. Διὰ λόγον παρόμοιον δὲν ἠμπορεῖ νὰ ὑποτεθῇ ὅτι ν—2 ἀκόλουθοι γωνίαι ὀλιγοστεύουν ἐνταὐτῷ ἢ ὅτι μερικαὶ ὀλιγοστεύουν, ἐν ᾧ αἱ ἄλλαι μένουν σταθεραί. Εἰς τὴν σειρὰν λοιπὸν τῶν ν—2 ἀκολούθων γωνιῶν πρέπει νὰ ὑπάρχῃ τοὐλάχιστον μία ἀλλαγὴ σημείου· πολὺ δὲ περισσότερον τὴν ἀλλαγὴν ταύτην πρέπει νὰ ἀπαντήσωμεν εἰς τὴν σειρὰν τῶν ν ἀκολούθων γωνιῶν ὅταν κάμωμεν ὅλον τὸν γύρον τοῦ πολυγώνου.

2ον Αἱ μεταβολαὶ εἰς τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου δὲν ἠμποροῦν νὰ ἦναι τοιαῦται, ὥστε νὰ παρουσιάζουν μόνον μίαν σειρὰν σημείων + καὶ μίαν σημείων —, καὶ οὕτω νὰ μὴ ὑπάρχουν πάρεξ δύο ἀλλαγαὶ σημείου εἰς ὅλον τὸν γύρον τοῦ πολυγώνου.

Διότι, ἂς ὑποθέσωμεν παραδείγματος χάριν, ὅτι Α, Β, Γ εἶναι αἱ τρεῖς σημειωμέναι μὲ τὸ σημεῖον + γωνίαι, καὶ Δ, Ε, Ζ, Η αἱ τέσσαρες σημειωμέναι μὲ τὸ σημεῖον — (σχ. 287) (ἡ ὑπόθεσις αὕτη περιλαμβάνει ἐκείνην καθ᾽ ἣν ἤθελεν εἶναι μικρότερος ἀριθμὸς σημείων εἰς ἑκάστην σειρὰν, ἐξ αἰτίας τοῦ ἀμεταβλήτου μερικῶν γωνιῶν). Ἐὰν τὸ σχῆμα παριστάνῃ τὴν πρώτην κατάστασιν τοῦ πολυγώνου, ἡ διαγώνιος ΗΔ πρέπει νὰ αὐξάνῃ ὅταν αὐξάνουν ὅλαι αἱ γωνίαι Α, Β, Γ, ἢ μόνον μερικαὶ τούτων· ἀλλ᾽ ἡ αὐτὴ διαγώνιος ΗΔ ὡς ἀνήκουσα εἰς τὸ πολύγωνον ΗΖΕΔ, τοῦ ὁποίου αἱ ἄλλαι πλευραὶ εἶναι ςαθεραὶ, πρέπει νὰ ὀλιγοςεύῃ ἐν ᾧ ὀλιγοςεύουν αἱ γωνίαι Z καὶ E, ἢ τοὐλάχιςον νὰ μένῃ ςαθερὰ, ἐὰν ἀπὸ τὰς τέσσαρας γωνίας Δ, E, Z, H, αἱ δύο Δ καὶ H, ἢ μόνον μία τούτων, ὀλιγοςεύουν· ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος λοιπὸν ὑπόθεσις εἶναι ἀσύςατος· ὅθεν ἡ μεταβολὴ τῶν γωνιῶν δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι τοιαύτη ὥςε μόνον νὰ παρουσιάζῃ δύο σειρὰς τὴν μὲν συγκειμένην ἀπὸ σημεῖα +, τὴν δὲ ἀπὸ σημεῖα —.

3ον Ἀδύνατον προσέτι κάμνοντες τὸν γύρον τοῦ πολυγώνου νὰ εὕρωμεν τρεῖς ἐναλλὰξ σειρὰς σημείων + καὶ σημείων —· διότι, εἰς ταύτην τὴν ὑπόθεσιν, ἡ πρώτη καὶ ἡ τρίτη σειρὰ ἤθελον εἶναι τοῦ αὐτοῦ σημείου, καὶ ἡ μία ἤθελεν ἀκολουθεῖ μετὰ τὴν ἄλλην, ὥςε δὲν ἤθελον σχηματίζει πάρεξ μίαν μόνην σειράν· ὥςε εἰς τὸν γύρον τοῦ πολυγώνου δύο πραγματικῶς ἤθελον εἶναι αἱ σειραὶ, ἡ μία συγκειμένη ἀπὸ σημεῖα +, καὶ ἡ ἄλλη ἀπὸ σημεῖα —· πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀπεδείξαμεν ἀδύνατον.

Λοιπὸν τέλος πάντων αἱ ἀλλαγαὶ τοῦ σημείου τὰς ὁποίας κάμνοντες τὸν γύρον τοῦ πολυγώνου θέλομεν εὕρῃ, πρέπει νὰ ἦναι τοὐλάχιςον τέσσαρες τὸν ἀριθμόν.

Πόρισμα. Ὅτι ἀπεδείξαμεν διὰ τὰ σφαιρικὰ πολύγωνα, ἀμέσως ἐφαρμόζεται εἰς τὰς ςερεὰς γωνίας τὰς ὁποίας μετροῦν τὰ πολύγωνα ταῦτα. Ὅθεν, δοθείσης μιᾶς κυρτῆς ςερεᾶς γωνίας, εἰς τὴν ὁποίαν συνενοῦνται ὑπὲρ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας, ἐὰν καθ᾽ ὁποιονδήποτε τρόπον μεταβληθῶσιν αἱ κλίσεις ἐπὶ τῶν κόψεων, χωρὶς ὅμως νὰ παύσῃ ἡ ςερεὰ γωνία τοῦ νὰ ἦναι κυρτή· καὶ ἐὰν τεθῇ ἐφ᾽ ἑκάςης κόψεως τὸ σημεῖον + ἢ τὸ σημεῖον —, καθὼς ἡ κλίσις ἐπὶ ταύτης τῆς κόψεως αὐξάνει ἢ ὀλιγοςεύει, καὶ αἱ κόψεις ἐπὶ τῶν ὁποίων ἡ κλίσις μένει ςαθερὰ δὲν σημειωθοῦν μὲ κἀνὲν σημεῖον, λέγω ὅτι γενομένου τοῦ γύρου τῆς ςερεᾶς γωνίας, πρέπει νὰ ἀπαντηθῶσι τοὐλάχιςον τέσσαρες ἀλλαγαὶ σημείου ἀπὸ τὴν μίαν κόψιν εἰς τὴν ἀκόλουθον.

Διὰ τῆς προτάσεως ταύτης καὶ τοῦ θεωρήματος τοῦ Εὐλήρου περὶ τῶν πολυέδρων (25, 7), δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν τὸ ἑπόμενον θεώρημα καθ᾽ ὅλην του τὴν γενικότητα.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δοθέντος ἑνὸς κυρτοῦ πολυέδρου, εἰς τοῦ ὁποίου τὰς ςερεὰς γωνίας συνέρχονται ὑπὲρ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας· ἀδύνατον νὰ μεταβληθοῦν αἱ κλίσεις τῶν ἐπιπέδων τοῦ πολυέδρου τούτου, ὥςε νὰ προκύψῃ δεύτερον πολύεδρον σχηματισμένον μὲ τὰ αὐτὰ ἐπίπεδα καὶ οὕτω διατεταγμένα πρὸς ἄλληλα καθὼς εὑρίσκονται εἰς τὸ δοθέν.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὴν πρότασιν ταύτην, πρέπει νὰ διακρίνωμεν δύο περιστάσεις, ἐκείνην καθ' ἣν μεταβάλλομεν τὰς κλίσεις ἐπὶ ὅλων τῶν κόψεων, καὶ ἐκείνην καθ' ἣν μερικὰς τῶν κλίσεων τούτων.

ΠΡΩΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μεταβάλλομεν ἐνταῦθα τὰς κλίσεις ἐπὶ ὅλων τῶν κόψεων, καὶ ἂς καλέσωμεν N τὸν ὅλον ἀριθμὸν τῶν ἀλλαγῶν τοῦ σημείου τὰς ὁποίας κάμνοντες τὸν γῦρον ἑκάστης στερεᾶς γωνίας θέλομεν εὕρῃ μεταβαίνοντες ἀπὸ μίαν κόψιν εἰς τὴν ἀκόλουθον.

Εἴδομεν εἰς τὸ Β' λῆμμα ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀλλαγῶν τοῦ σημείου, δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι μικρότερος τοῦ τέσσαρα διὰ κάθε στερεὰν γωνίαν.

Ἐὰν λοιπὸν καλέσωμεν Σ τὸν ἀριθμὸν τῶν στερεῶν γωνιῶν, θέλομεν ἔχει $N > 4Σ$, τοῦ σημείου $>$ μὴ ἀποκλείοντες τὴν ἰσότητα.

Παρατηρῶ τώρα ὅτι δύο ἐφεξῆς κόψεις μιᾶς στερεᾶς γωνίας ἀνήκουν πάντοτε εἰς μίαν ἕδραν τοῦ πολυέδρου, καὶ δὲν ἀνήκουν παρὰ εἰς μίαν μόνην· ὁ ὅλος λοιπὸν ἀριθμὸς τῶν ἀλλαγῶν τοῦ σημείου τὰς ὁποίας ἠθέλαμεν παρατηρήσει ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς κόψεων κάθε στερεᾶς γωνίας, πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν ὅλον ἀριθμὸν τῶν ἀλλαγῶν τοῦ σημείου τῶν παρατηρουμένων ἐπὶ τῶν ἐφεξῆς πλευρῶν ἑκάστης ἕδρας· διότι δὲν δίδεται κάμμία ἀλλαγὴ σημείου εἰς τὸ ἓν σύστημα ἥτις νὰ μὴ ἀντιστοιχεῖ εἰς παρομοίαν ἀλλαγὴν εἰς τὸ ἄλλο.

Τώρα, διὰ κάθε τριγωνικὴν ἕδραν, ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀλλαγῶν τοῦ σημείου δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι μεγαλήτερος τοῦ δύο· διότι ὁπωσδήποτε καὶ ἂν τρεφθοῦν τὰ σημεῖα τῆς σειρᾶς $+-+$ ἢ τῆς $+--$, δὲν συνάγονται παρὰ δύο ἀλλαγαὶ σημείου.

Διὰ κάθε τετραγωνικὴν ἕδραν, αἱ ἀλλαγαὶ τοῦ σημείου εἶναι τὸ πολὺ τέσσαρες τὸν ἀριθμόν· τοῦτο εἶναι φανερόν.

Ἐν γένει, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν μιᾶς ἕδρας ἦναι ἄρτιος $=2ν$, ὁ μεγαλήτερος ἀριθμὸς τῶν ἀλλαγῶν τοῦ σημείου τὰς ὁποίας κάμνοντες τὸν γῦρον τῶν πλευρῶν ἠμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν, εἶναι $2ν$· τοῦτο δὲ ἀκολουθεῖ ὅταν αἱ πλευραὶ φέρουν ἐναλλὰξ τὰ σημεῖα $+$ καὶ $-$.

Ἀλλ' ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν μιᾶς ἕδρας ἦναι περιττὸς $= 2ν+1$, ὁ μεγαλήτερος ἀριθμὸς τῶν ἀλλαγῶν τοῦ σημείου θέλει εἶναι μόνον $2ν$· διότι ἐὰν εἰς τὰς πλευρὰς δοθοῦν ἐναλλὰξ τὰ σημεῖα $+$ καὶ $-$, ἡ πρώτη καὶ ἡ τελευταία ἀναγκαίως θέλουν ἔχει τὸ αὐτὸ σημεῖον· διὰ τοῦτο ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀλλαγῶν τοῦ σημείου θέλει εἶναι μικρότερος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν κατὰ μεγάλα.

Τούτου τεθέντος, ἔςω α ὁ ἀριθμὸς τῶν τριγώνων, β ὁ τῶν τετραπλεύρων, γ ὁ τῶν πενταγώνων, κτλ. τῶν συγκροτούντων τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δεδομένου πολυέδρου· ἐκ τῶν εἰρημένων ἕπεται ὅτι ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν ἀλλαγῶν τοῦ σημείου τὰς ὁποίας κάμνοντες τὸν γῦρον ἑκάςης ἕδρας θέλομεν παρατηρήσει, δὲν δύναται νὰ ἦναι μείζων τοῦ 2α διὰ τὰς τριγωνικὰς ἕδρας, τοῦ 4β διὰ τὰς τετραγωνικὰς, τοῦ 4γ διὰ τὰς πενταγωνικὰς, τοῦ 6δ διὰ τὰς ἑξαγωνικάς. Θέλομεν ἔχει λοιπὸν

$$N < 2\alpha + 4\beta + 4\gamma + 6\delta + 6\varepsilon + 8\zeta + 8\kappa + \text{κτλ.}$$

Ἔςω A ὁ ἀριθμὸς τῶν κόψεων τοῦ πολυέδρου, καὶ H ὁ τῶν ἑδρῶν του, θέλομεν ἔχει:

$$2A = 3\alpha + 4\beta + 5\gamma + 6\delta + 7\varepsilon + 8\zeta + 8\kappa + \text{κτλ.}$$

$$H = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \kappa + \text{κτλ.}$$

Ἀλλὰ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Ἐλήρου, $\Sigma + H = A + 2$· λοιπὸν $4\Sigma = 8 + 4A - 4H$, καὶ τῶν ἀντεισαγωγῶν γενομένων θέλει εἶναι:

$$4\Sigma = 8 + 2\alpha + 4\beta + 6\gamma + 8\delta + 10\varepsilon + \text{κτλ.}$$

Ἀπὸ τὴν σύγκρισιν τῆς τιμῆς ταύτης μὲ τὸ ἤδη εὑρεθὲν ὅριον ἐξάγεται:

$$N < 4\Sigma - 8.$$

Ἀλλ' αἱ δύο ἀνισότητες $N > 4\Sigma$ καὶ $N < 4\Sigma - 8$ ἀδύνατον νὰ συνυπάρχωσι· ἀδύνατον λοιπὸν εἶναι νὰ μεταβληθῶσιν ἐνταυτῷ ὅλαι αἱ κλίσεις ἐπὶ τῶν κόψεων τοῦ πολυέδρου, χωρὶς νὰ χαλάσῃ ἡ συναρμολογία (coherence) τῶν ἐπιπέδων τῶν σχηματιζόντων τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πολυέδρου.

ΔΕΥΤΕΡΑ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι δὲν μεταβάλλονται ὅλαι ἐνταυτῷ αἱ κλίσεις ἐπὶ τῶν κόψεων, ἀλλ' ὅτι μερικαὶ τούτων μένουν ςαθεραί.

Ἔςω ΖΙ (σχ. 204) μία τῶν κόψεων τούτων· ἠμποροῦμεν νὰ τὴν νοήσωμεν ἀφῃρημένην, καὶ τὰς δύο προσκειμένας ἕδρας ΖΙΗ, ΕΖΙΘ ἑνωμένας εἰς μίαν μόνην μὴ ἐπίπεδον περατουμένην ἀπὸ τὴν ἀμεταβλήτου μορφῆς περίμετρον ΓΖΗΘΙ. Ἂς καλέσωμεν Σ', H' καὶ A' ὅ,τι ἀπογίνονται οἱ ἀριθμοὶ Σ, H καὶ A μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν μιᾶς κόψεως· θέλομεν ἔχει $H' = H - 1$, καὶ $A' = A - 1$· περιπλέον ἔχομεν $\Sigma' = \Sigma$, διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν ςερεῶν γωνιῶν εἶναι ὁ αὐτὸς καὶ εἰς τὰ δύο ςερεά· λοιπὸν $\Sigma' + H' - A' = \Sigma + H - A = 2$. Ὅθεν βλέπομεν ὅτι τὸ θεώρημα τοῦ Εὐλήρου ἔχει τὸν τόπον του εἰς τὸ νέον πολύεδρον τὸ ὁποῖον περιέχει μίαν κόψιν ὀλιγώτερον, καὶ μίαν ἕδραν ὀλιγώτερον, διότι δύο ἕδραι ἑνώθησαν εἰς μίαν μόνην μὴ ἐπίπεδον.

Ἐὰν ἀπὸ τὸ δεύτερον τοῦτο στερεὸν ἀφαιρέσωμεν ἀκόμη μίαν τῶν κόψεων ἐπὶ τῶν ὁποίων ἡ κλίσις μένει ἀμετάβλητος, ἡ ἀφαίρεσις τῆς κόψεως ταύτης θέλει δώσει πάλιν ἀφορμὴν εἰς τὴν ἕνωσιν δύο προσεχῶν (contiguës) ἑδρῶν εἰς μίαν μόνην· καὶ ὡσαύτως θέλομεν δείξει ὅτι τὸ θεώρημα τοῦ Εὐλήρου ἔχει ἀκόμη τὸ τόπον του εἰς τὸ τρίτον στερεὸν τὸ προκύπτον ἀπὸ τὴν ἀφαίρεσιν δύο κόψεων.

Δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν ὅσων θέλομεν κόψεων, φθάνει μόνον νὰ μὴ συναφαιρῆται καμμία στερεὰ γωνία· καὶ τὸ θεώρημα τοῦ Εὐλήρου πάντοτε θέλει ἔχει τὸν τόπον του εἰς τὸ ἐναπομένον στερεόν: τοῦτο δὲ ἠμποροῦμεν ἀκόμη νὰ ἴδωμεν κατ' εὐθεῖαν καὶ γενικῶς, ἐξετάζοντες τὴν ἀπόδειξιν τὴν ὁποίαν ἐδώκαμεν εἰς τὸ θεώρημα τοῦ Εὐλήρου· ἡ ἀπόδειξις αὕτη, τῷ ὄντι, δὲν ὑποθέτει ὅτι αἱ ἕδραι τοῦ πολυέδρου εἶναι ἐπίπεδοι· διὰ τοῦτο ἤθελεν ἔχει ἐπίσης τὸν τόπον της, καὶ ὅταν αἱ ἕδραι ἤθελον περατοῦνται ἀπὸ περιμέτρους μὴ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον κειμένας· ἐκεῖνο μόνον ὁποῦ ὑποθέτει εἶναι ὅτι κάθε περίμετρος, κατὰ τὴν κατασκευήν μας, παριστάνεται ἀπὸ σφαιρικὸν πολύγωνον, καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν τῶν πολυγώνων τούτων ἰσοῦται μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. Καὶ πάλιν δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἦναι κυρτὰ ὅλα ταῦτα τὰ πολύγωνα· ἀρκεῖ νὰ ἠμπορῇ νὰ θεωρηθῇ καθὲν τούτων ὡς τὸ ἄθροισμα πολλῶν κυρτῶν πολυγώνων· τοῦτο δὲ ἀκολουθεῖ πάντοτε, ὅταν, διὰ τῆς ἀφαιρέσεως πολλῶν κόψεων αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς τὸ πολύεδρον, πολλαὶ τῶν ἐπιπέδων ἑδρῶν ἑνοῦνται εἰς μίαν μόνην μὴ ἐπίπεδον· διότι τότε τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον τὸ ὁποῖον παριστάνει ταύτην, σύγκειται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν σφαιρικῶν κυρτῶν πολυγώνων τὰ ὁποῖα ἐπαράστενον τὰς ἀφαιρεθείσας ἕδρας.

Ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὴν περίστασιν καθ' ἣν ἐν ᾧ ἀφαιροῦνται αἱ κόψεις ἐπὶ τῶν ὁποίων ἡ κλίσις δὲν μεταβάλλεται, συναφαιρεῖται μία ἢ περισσότεραι στερεαὶ γωνίαι, εἴτε ἐπειδὴ αἱ κλίσεις ἐπὶ ὅλων τῶν κόψεων, εἰς ἑκάστην τῶν γωνιῶν τούτων, εἶναι ἀμετάβλητοι, εἴτε διὰ τὸ ἀδύνατον τῆς μεταβολῆς τῶν κλίσεων τούτων ἐπὶ περισσοτέρων τῶν τριῶν κόψεων, καὶ τότε ἀναγκαίως εἶναι σταθεραί.

Ἂς ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι δὲν ἀφαιρεῖται πάρεξ μία στερεὰ γωνία, καὶ ἔστω μ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν τῆς γωνίας ταύτης, ἢ τῶν κόψεων αἱ ὁποῖαι ἀπολήγουν εἰς τὴν κορυφὴν της. Ἀφαιρουμένης τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος στερεᾶς γωνίας, συναφαιροῦνται μ κόψεις, καὶ αἱ μ ἕδραι αἱ σχηματίζουσαι τὴν στερεὸν γωνίαν καταντοῦν εἰς μίαν μόνην· ἐὰν λοιπὸν καλέσωμεν Σ′, Α′, Η′ ὅ,τι ἀπογίνονται οἱ ἀριθμοὶ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν μιᾶς στερεᾶς γωνίας, θέλομεν ἔχει $\Sigma'=\Sigma-\iota$, $A'=A-\mu$, $H'=H-(\mu-\iota)$. Ἐντεῦθεν συνάγομεν $\Sigma'+H'-A'=\Sigma+H-A=2$: Τὸ θεώρημα λοιπὸν τοῦ Εὐλήρου ἔχει ἀκόμη τὸν τόπον του εἰς τὸ νέον ςερεόν.

Εἶναι τώρα φανερὸν ὅτι ἠμποροῦμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ὅσας ςερεὰς γωνίας θέλομεν τοῦ δεδομένου πολυέδρου, καὶ τὸ θεώρημα τοῦ Εὐλήρου πάντοτε θέλει ἔχει τὸν τόπον του εἰς τὸ ἐναπομένον ςερεόν· διότι ἀφαιροῦντες τὰς ςερεὰς γωνίας ἀνὰ μίαν, ἔχομεν διαδοχικῶς διάφορα πολυέδρα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δύο ἐφεξῆς ὑπάγονται εἰς τὴν περίςασιν τὴν ὁποίαν ἐξετάσαμεν.

Ἐν γένει λοιπὸν, ἐὰν ἀπὸ τὸ προτεθὲν πολύεδρον ἀφαιρεθοῦν ὅλαι αἱ κόψεις ἐπὶ τῶν ὁποίων ἡ κλίσις δὲν μεταβάλλεται, εἴτε διὰ τῆς ἀφαιρέσεως ταύτης ὁ ἀριθμὸς τῶν γωνιῶν μένῃ ὁ αὐτὸς, εἴτε γίνῃ μικρότερος, τὸ ἐναπομένον πολύεδρον πάντοτε θέλει πληροῖ εἰς τὸ θεώρημα τοῦ Εὐλήρου, τοῦτ᾽ ἔςιν, καλοῦντες σ, η, α τὰς ποσότητας αἱ ὁποῖαι διὰ τὸ πολύεδρον τοῦτο ἀντιςοιχοῦν εἰς τὰς Σ, Η, Α, τοῦ προτεθέντος, θέλομεν ἔχει $\sigma+\eta-\alpha=\Sigma+H-A=2$.

Ἀλλ᾽ εἰς τὸ τελευταῖον τοῦτο ςερεὸν, ὅλαι ἐνταυτῷ αἱ κλίσεις ἐπὶ τῶν κόψεων, πρέπει νὰ μεταβληθοῦν, ἐπειδὴ ἀφῃρέθησαν ὅλαι αἱ κόψεις ἐπὶ τῶν ὁποίων ἡ κλίσις δὲν μεταβάλλεται· τὸ ςερεὸν λοιπὸν τοῦτο ὑπάγεται εἰς τὴν πρώτην περίςασιν· ἡ ταυτόχρονος λοιπὸν μεταβολὴ ὅλων τούτων τῶν κλίσεων δὲν ἠμπορεῖ νὰ λάβῃ χώραν χωρὶς βλάβην τῆς φύσεως τοῦ πολυέδρου.

Λοιπὸν τέλος πάντων ὁποιονδήποτε κυρτὸν πολύεδρον, δὲν ἠμπορεῖ νὰ τρεφθῇ εἰς ἄλλο κυρτὸν πολύεδρον, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχεται ὑπὸ τῶν αὐτῶν πολυγωνικῶν ἐπιπέδων καὶ διατεταγμένων κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον τὸ ἓν ὡς πρὸς τὸ ἄλλο.

ΤΕΛΟΣ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ.