$$\Sigma O = \frac{1}{2}\sqrt{\left\{\frac{\zeta^2 \eta\mu^2\alpha + \kappa^2 \eta\mu^2\beta + \theta^2 \eta\mu^2\gamma - 2\zeta\kappa(\sigma\upsilon\nu\gamma - \sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha) - 2\zeta\theta(\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\gamma) - 2\kappa\theta(\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\gamma\,\sigma\upsilon\nu\beta)}{1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\gamma + 2\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma}\right\}}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ ϛ'.

Περὶ τοῦ σιμοτινωτέρου διαςήματος δύο εὐθειῶν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κειμένων.

Ἔςωσαν δύο δεδομέναι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμεναι, τῶν ὁποίων πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ σιμοτινώτερον διάςημα. σχ. 280.

Διὰ τῆς ΑΒ ἂς περάσωμεν δύο ἐπίπεδα κάθετα μεταξύ των τὰ ὁποῖα συναπαντοῦν τὴν ΓΔ τὸ μὲν κατὰ τὸ Γ, τὸ δὲ κατὰ τὸ Δ· ἀπὸ τὰς ςιγμὰς Γ καὶ Δ ἂς κατεβάσωμεν τὰς ΓΑ, ΔΒ καθέτους ἐπὶ τὴν ΑΒ· εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΔ ἂς ἄξωμεν τὴν μὲν ΔΕ παράλληλον τῆς ΑΒ, τὴν δὲ ΑΕ κάθετον εἰς τὴν ἰδίαν· φανερὸν ὅτι ἀπὸ τὴν κητασκευὴν ταύτην σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον ΑΔΒΕ· εἰς τὸ ἐπίπεδον ΓΑΕ ἂς ἐπιζεύξωμεν τὴν ΓΕ καὶ ἐπ' αὐτῆς ἂς ἄξωμεν τὴν ΑΙ κάθετον· τέλος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΓΔΕ ἂς ἄξωμεν τὴν ΙΚ' παράλληλον τῆς ΔΕ καὶ ἂς τὴν προεκβάλλωμεν ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΓΔ εἰς Κ', ἂς λάβωμεν ΑΛ = ΙΚ' καὶ ἂς ἐπιζεύξωμεν τὴν Κ'Λ· λέγω 1ον ὅτι ἡ εὐθεῖα Κ'Λ εἶναι ἐνταυτῷ κάθετος εἰς τὰς δύο εὐθείας ΑΒ, ΓΔ· 2ον ὅτι ἡ ἰδία αὕτη εὐθεῖα Κ'Λ εἶναι σιμοτινωτέρα ἀπὸ κάθε ἄλλην ἑνόνουσαν δύο ςιγμὰς τῶν γραμμῶν ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἀκολούθως ἡ Κ'Λ ἢ ἡ ἴση μὲ αὐτὴν ΑΙ εἶναι τὸ ζητούμενον σιμοτινώτερον διάςημα.

Τῷ ὄντι 1ον ἐπειδὴ ἐκ τῆς κατασκευῆς αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΕ εἶναι κάθετοι μεταξύ των, μία τούτων εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο ἄλλων· λοιπὸν ΑΒ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΓΕ, καὶ διὰ τοῦτο κάθετος καὶ εἰς τὴν ΑΙ· περιπλέον ἡ Κ'Ι παράλληλος οὖσα τῆς ΔΕ παραλλήλου τῆς ΑΒ, εἶναι παράλληλος τῆς ἰδίας ΑΒ· ἐπειδὴ δὲ ἐλήφθη ἡ ΑΛ = ΙΚ' καὶ ἡ ΑΛ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΑΙ· ἕπεται ὅτι τὸ σχῆμα ΑΙΚ'Λ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, λοιπὸν ἡ γωνία ΑΙΚ' εἶναι ὀρθή· ὀρθὴ δὲ εἶναι καὶ ἡ ΑΙΓ· λοιπὸν ἡ ΑΙ εἶναι κάθετος ἐνταυτῷ εἰς τὰς δύο εὐθείας ΓΙ καὶ ΙΚ'· λοιπὸν εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδόν των ΓΙΚ' ἢ ΓΔΕ· λοιπὸν καὶ ἡ παράλληλος αὐτῆς Κ'Λ εἶναι κάθετος εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΓΔΕ καὶ διὰ τοῦτο κάθετος εἰς τὴν ΓΔ, εἶναι δὲ ἡ Κ'Λ κάθετος καὶ εἰς τὴν ΑΒ· λοιπὸν 1ον ἡ εὐθεῖα Κ'Λ εἶναι ἐνταυτῷ κάθετος εἰς τὰς δύο εὐθείας ΑΒ, ΓΔ.

2ον Ἔςω Μ ὁποιαδήποτε ςιγμὴ τῆς εὐθείας ΓΑ· ἐὰν ἀπὸ τὴν ςιγμὴν Μ ἄξωμεν τὴν ΜΝ παράλληλον τῆς ΔΕ ἢ τῆς ΑΒ, τὸ μεταξὺ τῆς ςιγμῆς Μ καὶ τῆς ΑΒ εὐθείας διάςημα θέλει ἰσοῦται μὲ ΑΝ, διότι ἡ γωνία ΒΑΝ εἶναι ὀρθή. Τώρα ΑΝ > ΑΙ· λοιπὸν ΑΙ εἶναι τὸ σιμοτινώτερον διάςημα τῶν δεδομένων γραμμῶν ΑΒ, ΓΑ.

Ἔςωσαν αἱ κάθετοι ΓΑ $=\alpha$, καὶ ΑΒ $=$ ΑΕ $=\beta$· τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΑΕ δίδει ΓΕ $=\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}$· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰδίου τριγώνου τόσον ἐκφράζεται διὰ $\frac{1}{2}$ ΑΓ $\times$ ΑΕ, ὅσον καὶ διὰ $\frac{1}{2}$ ΓΕ $\times$ ΑΙ, διὰ τοῦτο ΑΙ $=\dfrac{\text{ΑΓ}\times\text{ΕΑ}}{\text{ΓΕ}}=\dfrac{\alpha\beta}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}$. Αὕτη εἶναι ἡ ἔκφρασις τοῦ σιμοτινωτέρου διαςήματος τῶν δεδομένων γραμμῶν.

Ἐὰν εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν κάμωμεν τὸ διάςημα ΑΒ $=\gamma$, καὶ καλέσωμεν Α τὴν περιεχομένην γωνίαν μεταξὺ τῶν δύο δεδομένων γραμμῶν τοῦτ' ἔςι τὴν γωνίαν ΓΔΕ τὴν περιεχομένην μεταξὺ τῆς γραμμῆς ΓΑ καὶ τῆς ΔΕ παραλλήλου τῆς ΑΒ, τὸ τρίγωνον ΓΔΕ ὀρθογώνιον εἰς Ε, ἐξ ἀφορμῆς ὅτι ἡ ΑΕ εἶναι παράλληλος τῆς ΑΒ, αὕτη δὲ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΓΑΕ, δίδει συν ΓΔΕ $=\dfrac{\text{ΔΕ}}{\text{ΓΔ}}$, ἢ συν Α $=\dfrac{\gamma}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}}$. διότι $\overline{\text{ΓΔ}}^2=\overline{\text{ΓΕ}}^2+\overline{\text{ΕΔ}}^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

Ἐντεῦθεν συνάγεται ἡμΑ $=\dfrac{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}}$ καὶ σφΑ $=\dfrac{\gamma}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Ζ'.

Περὶ τῶν συμμετρικῶν πολυέδρων.

Ὁρίζοντες τὰ συμμετρικὰ πολύεδρα (βιβλ. ς' ὁρ. 16) διὰ τὸ ἁπλούςερον ὑποθέσαμεν, ὅτι τὸ ἐπίπεδον εἰς τὸ ὁποῖον τὰ πολύεδρα ταῦτα ἀναφέρονται εἶναι τὸ ἐπίπεδον μιᾶς ἕδρας· ἠμπορούσαμεν ὅμως νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι ὁποιονδήποτε, καὶ τότε ὁ ὁρισμὸς ἤθελε καταςαθῇ γενικώτερος, χωρὶς νὰ ἀλλάξωμεν τὸ παραμικρὸν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῆς Β' προτάσεως διὰ τῆς ὁποίας ἐςερεώσαμεν τὰς ἀμοιβαίας τῶν δύο ςερεῶν σχέσεις. Ἠμπορεῖ δὲ ἀκόμη νὰ λάβῃ τινὰς ὀρθοτάτην ἰδέαν τῆς τροποϋπαρξίας τῶν δύο τούτων ςερεῶν, θεωρῶν τὸ ἓν ὡς τὴν σχηματιζομένην εἰκόνα τοῦ ἄλλου μέσα εἰς ἐπίπεδον καθρέπτην τόπον ἐπέχοντα τοῦ ἐπιπέδου εἰς τὸ ὁποῖον τὰ δύο ςερεὰ ἀναφέρονται.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Η΄.

Περὶ τῆς ΚΕ΄ προτάσεως τοῦ Ζ΄ Βιβλίου.

Από τὸ θεώρημα τοῦτο, τὸ ὁποῖον πρῶτος ὁ Εὐλῆρος ἀπέδειξεν εἰς τὰ ὑπομνήματα τῆς Πετρουπόλεως, ἐν ἔτει 1758, ἐξάγονται πολλαὶ συνέπειαι τὰς ὁποίας καλὸν εἶναι νὰ ἀναπτύξωμεν.

1ον Εςω α ὁ ἀριθμὸς τῶν τριγώνων, β ὁ τῶν τετραπλεύρων, γ ὁ τῶν πενταγώνων, κτλ. τῶν συγκροτούντων τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πολυέδρου· φανερὸν εἶναι ὅτι ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν ἰσοῦται μὲ $\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ κτλ, καὶ ὁ τῶν πλευρῶν των μὲ $3\alpha + 4\beta + 5\gamma + 6\delta +$ κτλ. Ο τελευταῖος οὗτος ἀριθμὸς εἶναι διπλάσιος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κόψεων, διότι ἡ αὐτὴ κόψις ἀνήκει εἰς δύο ἕδρας. Οθεν ἐὰν καλέσωμεν Η τὸν ἀριθμὸν τῶν ἑδρῶν καὶ Α τὸν ἀριθμὸν τῶν κόψεων, θέλομεν ἔχει

$$H = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{κτλ.}$$
$$2A = 3\alpha + 4\beta + 5\gamma + 6\delta + \text{κτλ.}$$

Καὶ ἐπειδὴ κατὰ τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος θεώρημα, $\Sigma + H = A + 2$, ἔνθα Σ παριςάνει τὸν ἀριθμὸν τῶν ςερεῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου, διὰ τοῦτο

$$2\Sigma = 4 + \alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta + \text{κτλ.}$$

Τώρα ἐπειδὴ Σ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς, ἀκολουθεῖ ὅτι τὸ δεύτερον μέλος διαιρούμενον διὰ 2 δίδει ἀκέραιον πηλίκον· ἀλλὰ τὸ δεύτερον τοῦτο μέλος μοιράζεται εἰς δύο μέρη· τὸ μὲν εἶναι $4 + 2\beta + 2\gamma + 4\delta + \ldots$, τὸ δὲ $\alpha + \gamma + \varepsilon +$ κτλ. τώρα τὸ πρῶτον εἶναι διαιρέσιμον διὰ τοῦ 2· ἀναγκαίως λοιπὸν καὶ τὸ δεύτερον εἶναι τοιοῦτον. Οθεν ὁ ἀριθμὸς τῶν περιττῶν ἑδρῶν $\alpha + \gamma + \varepsilon +$ κτλ. εἶναι πάντοτε ἄρτιος ἀριθμός.

Ας κάμωμεν, διὰ τὸ σύντομον, $\omega = \beta + 2\gamma + 3\delta +$ κτλ. τότε

$$A = \frac{3}{2}H + \tfrac{1}{2}\omega$$
$$\Sigma = 2 + \tfrac{1}{2}H + \tfrac{1}{2}\omega.$$

Εἰς κάθε λοιπὸν πολύεδρον ἔχομεν πάντοτε $A > \frac{3}{2}H$, καὶ $\Sigma > 2 + \frac{1}{2}H$, ὅπου πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ σημεῖον $>$ δὲν ἀποκλείει τὴν ἰσότητα, διότι ἠμπορεῖ νὰ ἦναι $\omega = 0$.

Ο ἀριθμὸς ὅλων τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τοῦ πολυέδρου εἶναι 2Α, ὁ τῶν ςερεῶν γωνιῶν εἶναι Σ, ὥςε ὁ μέσος ἀριθμὸς τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν ἑκάςην ςερεὰν γωνίαν, εἶναι $\frac{2A}{\Sigma}$.

Ο ἀριθμὸς οὗτος δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι μικρότερος ἀπὸ 3, ἐπειδὴ χρειάζονται τοὐλάχιςον τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι διὰ τὸν σχηματισμὸν μιᾶς στερεᾶς γωνίας· ὅθεν πρέπει νὰ ἔχωμεν $2Α > 3Σ$· τὸ σημεῖον δὲ $>$ δὲν ἀποκλείει τὴν ἰσότητα. Ἐὰν ἀντὶ Α καὶ Σ θέσωμεν τὰς τιμάς των διὰ Η καὶ ω ἐκφραζομένας, θέλομεν ἔχει $3Η + ω > 6 + \frac{3}{2}Η + \frac{3}{2}ω$, ἢ $3Η > 12 + ω$· ἀντεισάγοντες εἰς ταύτην τὴν ἀνισότητα ἀντὶ Η καὶ ω τὰς τιμάς των διὰ α, β, γ, κτλ. ἐκφραζομένας, συνάγομεν

$$3α + 2β + γ > 12 + ε + 2ζ + 3η + \text{κτλ.}$$

Η νέα αὕτη ἀνισότης δεικνύει ὅτι α, β, γ δὲν ἠμπορεῖ εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν νὰ ἦναι μηδέν, καὶ οὕτω δὲν ὑπάρχει πολύεδρον τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι νὰ ἔχουν περισσότερον ἀπὸ πέντε πλευράς.

Ἐπειδὴ $Η > 4 + \frac{1}{3}ω$, συνάγομεν $2 + \frac{1}{2}Η + \frac{1}{2}ω > 4 + \frac{1}{6}ω + \frac{1}{2}ω$, δηλαδὴ $Σ > 4 + \frac{2}{3}ω$, καὶ $\frac{3}{2}Η + \frac{1}{2}ω > 6 + ω$ ἢ $Α > 6 + ω$. Ἀλλ' εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἔχομεν $ω < 3Η - 12$· καὶ ἐντεῦθεν $Σ < 2Η - 4$, καὶ $Α < 3Η - 6$, ἔνθα πρέπει νὰ εὐθυμούμεθα ὅτι τὰ σημεῖα $>$ καὶ $<$ δὲν ἀποκλείουν τὴν ἰσότητα. Τὰ ὅρια ταῦτα ὑπάρχουν ἐν γένει διὰ κάθε πολύεδρον.

2ον Ἃς ὑποθέσωμεν $2Α > 4Σ$. Η ὑπόθεσις αὕτη ἔχει χώραν εἰς ἀπειράριθμα πολύεδρα, καὶ ἐξαιρέτως εἰς ἐκεῖνα τῶν ὁποίων ὅλαι αἱ στερεαὶ γωνίαι σχηματίζονται ἀπὸ τέσσαρα ἢ περισσότερα ἐπίπεδα· εἰς τὴν περίστασιν ταύτην ἔχομεν $Η > 8 + ω$, ἢ ἀντεισάγοντες ἀντὶ Η καὶ ω τὰς τιμάς των,

$$α > 8 + γ + 2δ + 3ε + \text{κτλ.}$$

Πρέπει λοιπὸν τὸ στερεὸν νὰ ἔχῃ τοὐλάχιστον ὀκτὼ τριγωνικὰς ἕδρας· τὸ ὅριον $Η > 8 + ω$ δίδει $Σ > 6 + ω$, καὶ $Α > 12 + 2ω$. Ἀλλ' ἐν ταὐτῷ ἔχομεν $ω < Η - 8$· καὶ ἐντεῦθεν $Σ < Η - 2$, $Α < 2Η - 4$.

3ον Ἃς ὑποθέσωμε $2 > 5Σ$· ἡ ὑπόθεσις αὕτη ἀναφέρεται πρὸς τοῖς ἄλλοις καὶ εἰς ἐκεῖνα τὰ πολύεδρα τῶν ὁποίων ὅλαι αἱ στερεαὶ γωνίαι εἶναι τοὐλάχιστον πενταπλαῖ· ἐκ ταύτης προκύπτει $Η > 20 + 3ω$, ἢ

$$α > 20 + 2β + 5γ + 8δ + \text{κτλ.}$$

Ἐκ τῆς ὁποίας βλέπομεν ὅτι εἰς τὰ τοιαῦτα πολύεδρα πρέπει τοὐλάχιστον νὰ ὑπάρχουν εἴκοσι τριγωνικαὶ ἕδραι. Εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἔχομεν $Σ > 12 + 2ω$, καὶ $Α > 30 + 5ω$· τέλος πάντων ἐκ τοῦ ὅτι $ω < \frac{1}{3}(Η - 20)$, ἐξάγονται τὰ ὅρια $Σ < \frac{2}{3}(Η - 2)$ $Α < \frac{5}{3}(Η - 2)$.

Δὲν δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν $2Α = 6Σ$· διότι ἀπὸ τὴν ἀπάλειψιν τοῦ Η μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων $Α = \frac{3}{2}Η + \frac{1}{2}ω$, καὶ

$\Sigma=2+\frac{1}{2}H+\frac{1}{2}\omega$ συνάγομεν κατὰ πρῶτον $\Lambda=3\Sigma-6-\frac{3}{2}\omega+\frac{1}{2}\omega$· μετὰ ταῦτα εὑρίσκομεν $2\Lambda+2\omega+12=6\Sigma$. Η ὑπόθεσις λοιπὸν $2\Lambda=6\Sigma$ δὲν συμφωνεῖ μὲ τὸ τοιοῦτον ἐξαγόμενον· ὅθεν συμπεραίνομεν ὅτι δὲν ὑπάρχει πολύεδρον τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ςερεαὶ γωνίαι νὰ σχηματίζωνται ἀπὸ ἕξ ἢ περισσοτέρας ἐπιπέδους γωνίας· καὶ τῷ ὄντι ἡ μικροτέρα τιμὴ τὴν ὁποίαν ἑκάςη γωνία, ἡ μία μὲ τὴν ἄλλην, ἤθελεν ἔχει, θὰ ἦτον ἡ γωνία ἰσοπλεύρου τριγώνου· τώρα ἓξ τούτων τῶν γωνιῶν κάμνουν τέσσαρας ὀρθάς, τὸ ὁποῖον εἶναι παρὰ πολὺ διὰ μίαν ςερεὰν γωνίαν.

4ον Ας θεωρήσωμεν πολύεδρον τὸ ὁποῖον ὅλας του τὰς ἕδρας ἔχει τριγωνικάς, τότε $\omega=0$, καὶ ἐπομένως $\Lambda=\frac{3}{2}H$, καὶ $\Sigma=2+\frac{1}{2}H$· ἃς ὑποθέσωμεν περιπλέον ὅτι αἱ ςερεαὶ γωνίαι τοῦ πολυέδρου εἶναι μέρος πενταπλαῖ καὶ μέρος ἑξαπλαῖ· ἔςω π ὁ ἀριθμὸς τῶν πενταπλῶν, καὶ κ ὁ τῶν ἑξαπλῶν· ἔχομεν $\Sigma=\pi+\kappa$ καὶ $2\Lambda=5\pi+6\kappa$· ἐκ τῶν ὁποίων $6\Sigma-2\Lambda=\pi$· ἀλλ' ἀπὸ ἄλλο μέρος $\Lambda=\frac{3}{2}H$, καὶ $\Sigma=2+\frac{1}{2}H$· λοιπὸν $\pi=6\Sigma-2\Lambda=12$. Εντεῦθεν ἕπεται ὅτι ἐὰν ὅλαι αἱ ἕδραι ἑνὸς πολυέδρου ἦναι τριγωνικαὶ καὶ αἱ ςερεαί του γωνίαι ἦναι μέρος πενταπλαῖ καὶ μέρος ἑξαπλαῖ, πάντοτε ὁ ἀριθμὸς τῶν πενταπλῶν θέλει ἰσοῦται μὲ 12. Ο ἀριθμὸς δὲ τῶν ἑξαπλῶν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι ἀπροσδιόριςος· ὅθεν ἀφίνοντες κ ἀπροσδιόριςον, ἔχομεν εἰς ὅλα ταῦτα τὰ ςερεὰ $\Sigma=12+\kappa$, $H=20+2\kappa$, $\Lambda=30+3\kappa$.

Θέλομεν τελειώσει τὰς ἐφαρμογὰς ταύτας ἀφ' οὗ ζητήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀναγκαίων συνθηκῶν ἢ δεδέντων διὰ τὴν προσδιόρισιν ἑνὸς πολυέδρου· ζήτημα ὠφέλιμον μέν, πλὴν δὲν φαίνεται ὅτι ἐδόθη ἀκόμη ἡ λύσις του.

Ας ὑποθέσωμεν ἐν πρώτοις ὅτι τὸ πολύεδρον εἶναι προσδιορισμένου εἴδους, τοῦτ' ἔςιν ὅτι εἶναι γνωςὸς ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν του, ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ξεχωριςὰ κάθε ἕδρας, καὶ ἡ διάταξις τῆς μιᾶς ὡς πρὸς τὴν ἄλλην. Εἶναι λοιπὸν γνωςοὶ οἱ ἀριθμοὶ Η, Σ, Λ καθὼς καὶ α, β, γ, δ, κτλ. καὶ πρόκειται νὰ προσδιορισθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν δεδέντων, γραμμῶν ἢ γωνιῶν, διὰ τῶν ὁποίων ἠμπορεῖ νὰ κατασκευασθῇ ἢ προσδιορισθῇ τὸ πολύεδρον.

Ας θεωρήσωμεν μίαν τῶν ἑδρῶν τοῦ πολυέδρου τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς βάσιν του. Εςω ν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν της· χρειάζονται $2\nu-3$ δεδέντα διὰ τὴν προσδιόρισιν ταύτης τῆς ἕδρας ἢ βάσεως. Εὰν καλέσωμεν Σ τὸν ἀριθμὸν τῶν ςερεῶν γωνιῶν, φανερὸν ὅτι $\Sigma-\nu$ παριςάνει τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐκτὸς τῆς βάσεως ςερεῶν γωνιῶν· καὶ ἐπειδὴ ἑκάστη στερεὰ γωνία ἀπαιτεῖ τρία δοθέντα διὰ τὴν προσδιόρισίν της· ἕπεται ὅτι διὰ τὴν προσδιόρισιν τῆς θέσεως τῶν κορυφῶν ἀπαιτοῦνται $3\Sigma - 3\nu$ δοθέντα· ὥστε προσθέτοντες εἰς αὐτὰ τὰ διὰ τὴν προσδιόρισιν τῆς βάσεως ἀπαιτούμενα καὶ τὰ ὁποῖα εἶναι $2\nu - 3$, ἔχομεν διὰ τὸν ὅλον ἀριθμὸν τῶν δοθέντων $3\Sigma - \nu - 3$. Πλὴν πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἐν γένει δὲν ἀπαιτοῦνται τόσα δοθέντα ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀριθμὸς οὗτος, διὰ τὴν προσδιόρισιν τοῦ πολυέδρου, διότι πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ αὐτὸν, τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀναγκαίων συνθηκῶν διὰ νὰ ἦναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον αἱ κορυφαὶ αἱ ἀνήκουσαι εἰς τὴν ἰδίαν ἕδραν· διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ πόσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν τοιούτων συνθηκῶν, ἂς παρατηρήσωμεν ὅτι τρία σημεῖα ἀρκοῦν διὰ τὴν προσδιόρισιν ἑνὸς ἐπιπέδου, δηλονότι τρία σημεῖα πάντοτε ἠμποροῦν νὰ εὑρεθοῦν εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· λοιπὸν ἀφ' οὗ προσδιορισθῇ ἡ θέσις μιᾶς ἕδρας δι' ἐκείνης τῶν τριῶν κορυφῶν αἱ ὁποῖαι εἰς αὐτὴν ἀνήκουν, διὰ νὰ περιέχῃ καὶ ὅλας τὰς ἄλλας κορυφὰς αἱ ὁποῖαι εἰς αὐτὴν ἀναφέρονται, ἀπαιτοῦνται τόσαι συνθῆκαι ὅσαι εἶναι αἱ ὑπόλοιπαι κορυφαί· καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τούτων ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν παρὰ 3· διὰ τοῦτο ἐὰν καλέσωμεν ν', ν'', ν''' κτλ. τοὺς ἀριθμοὺς τῶν πλευρῶν τῶν ἑδρῶν ἐκτὸς ἐκείνης τὴν ὁποίαν ἐλάβαμεν ὡς βάσιν, ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν ἀναγκαίων συνθηκῶν διὰ νὰ εὑρίσκωνται αἱ διάφοροι κορυφαὶ ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων εἰς τὰ ὁποῖα ἀνήκουν, ἰσοῦται μὲ $(\nu' - 3) + (\nu'' - 3) + (\nu''' - 3) +$ κτλ. Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων τῆς σειρᾶς ταύτης εἶναι $H - 1$, καὶ περιπλέον $\nu + \nu' + \nu'' +$ κτλ. $= 2\Lambda$· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς εἶναι $2\Lambda - \nu - 3(H - 1)$. Ἐὰν τώρα ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἀπὸ $3\Sigma - \nu - 3$, εὑρίσκομεν δι' ὑπόλοιπον $3\Sigma - 2\Lambda + 3H - 6$, τὸ ὁποῖον, ἐξ ἀφορμῆς ὅτι $\Sigma + H = \Lambda + 2$, ἀνάγεται εἰς Λ. Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν τῶν ἀναγκαίων δοθέντων διὰ τὴν προσδιόρισιν ἑνὸς πολυέδρου, μεταξὺ ἐκείνων τὰ ὁποῖα εἶναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους, ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν κόψεών του.

Πρέπει ὅμως νὰ σημειώσωμεν ὅτι διὰ τὰ δοθέντα ταῦτα δὲν πρέπει νὰ λάβωμεν γραμμὰς ἢ γωνίας ἀπὸ ἐκείνας ὁποῦ συνιστοῦν τὸ πολύεδρον, ὅπως τύχῃ· διότι ἀγκαλὰ καὶ ἠθέλαμεν ἔχει τόσας ἐξισώσεις ὅσας καὶ ἀγνώστους, δυνατὸν ὅμως νὰ ἀκολουθήσῃ ὁποῦ ἐξ αἰτίας μερικῶν σχέσεων μεταξὺ τῶν γνωστῶν ποσοτήτων, τὸ πρόβλημα νὰ καταστηθῇ ἀπροσδιόριστον. Κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα φαίνεται ὅτι ἡ γνῶσις μόνον τῶν κόψεων ἀρκεῖ ἐν γένει διὰ τὴν προσδιόρισιν τοῦ πολυέδρου· πλὴν δίδονται περιστάσεις κατὰ τὰς ὁποίας ἡ γνῶσις αὕτη δὲν εἶναι ἀποχρῶσα. Ἐὰν, παραδείγματος χάριν, δοθῇ μὴ τριγωνικὸν ὁποιονδήποτε πρίσμα, δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ἀπειράριθμα πρίσματα τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν ἴσας κόψεις καὶ ὁμοίως κειμένας. Διότι ὅταν ἡ βάσις ἔχῃ περισσοτέρας ἀπὸ τρεῖς πλευράς, δυνάμεθα φυλάττοντες τὰς πλευράς, νὰ ἀλλάξωμεν τὰς γωνίας, καὶ οὕτω νὰ δώσωμεν εἰς ταύτην τὴν βάσιν ἀπειραρίθμους διαφορετικὰς μορφὰς εἰς ἑκάϛην τῶν ὁποίων ἤθελεν ἀντιϛοιχεῖ ἓν ἰδιαίτερον πρίσμα περιέχον τὰς αὐτὰς κόψεις ὁποῦ καὶ τὸ δοθέν. Ἠμποροῦμεν δὲ ἀκόμη νὰ ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῆς κατὰ μῆκος κόψεως τοῦ πρίσματος ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως· τέλος πάντων τὰς δύο ταύτας μεταβολὰς ἠμποροῦμεν νὰ συνδυάσωμεν τὴν μίαν μὲ τὴν ἄλλην, καὶ πάντοτε θέλει προκύψει πρίσμα ἔχον τὰς αὐτὰς κόψεις ἢ πλευρὰς μὲ τὰς τοῦ δοθέντος. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι αἱ κόψεις μόναι δὲν ἀρκοῦν εἰς ταύτην τὴν περίϛασιν διὰ τὴν προσδιόρισιν τοῦ ϛερεοῦ.

Τὰ δοθέντα τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ λάβωμεν διὰ τὴν προσδιόρισιν ἑνὸς ϛερεοῦ, εἶναι ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα δὲν ἀφίνουν κἀμμίαν ἀπροσδιορισίαν, ἢ δὲν δίδουν πάρεξ μίαν μόνην λύσιν. Καὶ ἐν πρώτοις ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ (σχ. 281) τῆς ὁποίας ἡ προσδιόρισις ἠμπορεῖ νὰ γένῃ κατὰ πολλοὺς τρόπους, προσδιορίζεται προσέτι ὅταν ἦναι γνωϛὴ ἡ πλευρὰ ΑΒ μετὰ τῶν προσκειμένων γωνιῶν ΒΑΓ, ΑΒΓ, διὰ τὴν ϛιγμὴν Γ· μετὰ δὲ τῶν γωνιῶν ΒΑΔ, ΑΒΔ διὰ τὴν ϛιγμὴν Δ καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Ἀκολούθως ἔϛω Μ ϛιγμὴ τῆς ὁποίας πρέπει νὰ προσδιορίσωμεν τὴν θέσιν ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως· φανερὸν ὅτι ἡ ϛιγμὴ αὕτη θέλει προσδιορισθῇ ἐὰν φανταζόμενοι τὴν πυραμίδα ΜΑΒΓ, ἢ μόνον τὸ ἐπίπεδον ΜΑΒ, γνωρίζωμεν τὰς γωνίας ΜΑΒ, ΑΒΜ, καὶ τὴν κλίσιν τοῦ ἐπιπέδου ΜΑΒ ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒΓ. Ἐὰν διὰ μέσου ἄλλων τριῶν παρομοίων δοθέντων, προσδιορίσωμεν τὴν θέσιν ἑκάϛης τῶν κορυφῶν τοῦ πολυέδρου τῶν ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, φανερὸν ὅτι τὸ πολύεδρον θέλει προσδιορισθῇ κατὰ πάντα καὶ κατὰ ἕνα μόνον τρόπον, τοῦτ' ἔϛι δὲν θέλει εἶναι δυνατὸν ἄλλο δεύτερον πολύεδρον νὰ ἔχῃ τὰ αὐτὰ δοθέντα καὶ νὰ μὴ ἰσοῦται μὲ αὐτό· ὥϛε τὰ δύο πολύεδρα ἤθελον εἶναι ἴσα· ἤθελον δὲ εἶναι συμμετρικὰ ἐὰν ἐκατασκευάζοντο κατὰ διάφορα μέρη τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως.

Δὲν χρειάζονται πάντοτε τρία δοθέντα διὰ τὴν προσδιόρισιν ἑκάϛης κορυφῆς ἑνὸς πολυέδρου· διότι ἐὰν ἡ ϛιγμὴ Μ πρέπει νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ ἑνὸς ἤδη προσδιορισμένου ἐπιπέδου τοῦ ὁποίου ἡ κοινὴ τομὴ μὲ τὴν βάσιν εἶναι ἡ ΖΗ, ἀρκεῖ ἀφ' οὗ λάβωμεν τὴν ΖΗ κατ' ἀρέσκειαν, νὰ γνωρίζωμεν τὰς γωνίας ΜΗΖ, ΜΖΗ· ὅθεν βλέπομεν ὅτι εἰς ταύτην τὴν περίϛασιν χρειάζεται ἓν δοθὲν ὀλιγώτερον. Ἐὰν δὲ ἡ ϛιγμὴ Μ πρέπει νὰ εὑρίσκεται ἐπάνω εἰς δύο ἤδη προσδιορισμένα ἐπίπεδα, ἢ εἰς τὴν κοινὴν τομήν των ΜΚ' ἥτις συναπαντᾷ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ εἰς Κ', τότε γνωρίζοντες τὴν πλευρὰν ΑΚ', τὴν γωνίαν ΑΚ'Μ καὶ τὴν κλίσιν τοῦ ἐπιπέδου

ΑΚ΄Μ ἐπὶ τῆς βάσεως, ἔχομεν χρείαν ἀπὸ μόνην τὴν γωνίαν ΜΑΚ. Διὰ αὐτῶν τῶν μερικῶν συνθηκῶν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀναγκαίων δοθέντων διὰ τὴν κατὰ πάντα προσδιόρισιν ἑνὸς πολυέδρου καὶ κατὰ ἕνα μόνον τρόπον, πάντοτε ἠμπορεῖ νὰ ἀναχθῇ εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν κορυφῶν του Α.

Η πλευρὰ ΑΒ καὶ ἀριθμὸς δοθεισῶν γωνιῶν ἴσος μὲ Α—1 προσδιορίζει ἓν πολύεδρον· ἄλλη κατ᾽ ἀρέσκειαν πλευρὰ καὶ αἱ αὐταὶ γωνίαι προσδιορίζουν ἄλλο ὅμοιον πολύεδρον. Ὅθεν ἕπεται ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀναγκαίων συνθηκῶν διὰ τὴν ὁμοιότητα δύο πολυέδρων τοῦ αὐτοῦ εἴδους, ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν κορυφῶν παρὰ μονάδα.

Τὸ ζήτημα τὸ ὁποῖον ἐλύσαμεν ἤθελεν εἶναι ἔτι ἁπλούστερον ἐὰν δὲν ἦτον γνωστὸν τὸ εἶδος τοῦ πολυέδρου, ἀλλὰ μόνον ὁ ἀριθμὸς τῶν στερεῶν γωνιῶν του. Τότε προσδιορίζομεν τρεῖς κορυφὰς διὰ μέσου τριγώνου τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖ τρία δοθέντα· τὸ τρίγωνον τοῦτο θεωροῦμεν ὡς τὴν βάσιν τοῦ στερεοῦ· μετὰ ταῦτα ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐκτὸς ταύτης τῆς βάσεως κορυφῶν εἶναι Σ—3, καὶ ἡ προσδιόρισις ἑκάστης ἀπαιτεῖ τρία δοθέντα, φανερὸν ὅτι ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν ἀναγκαίων δοθέντων διὰ τὴν προσδιόρισιν τοῦ πολυέδρου ἰσοῦται μὲ $3+3(\Sigma-3)$ ἢ $3\Sigma-6$.

Χρειάζονται λοιπὸν $3\Sigma-7$ συνθῆκαι διὰ τὴν μεταξὺ δύο στερεῶν τὰ ὁποῖα ἔχουν ἰσαρίθμους στερεὰς γωνίας ὁμοιότητα.

ΣΗΜΕΙΣΙΣ Θ΄.

Περὶ τῶν Κανονικῶν πολυέδρων (βλέπε τὸ παράρτημα εἰς τὸ Ζ΄ Βιβλίον).

Εἰς τὴν Β΄ πρότασιν τοῦ παραρτήματος τούτου ἀπεδείξαμεν τὴν ὕπαρξιν τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων, τοῦτ᾽ ἔστιν, ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ διαταχθῇ ἀριθμός τις ἴσων ἐπιπέδων οὕτω πως ὥστε νὰ προκύψῃ στερεὸν μονόμορφον καθ᾽ ὅλην του τὴν ἔκτασιν. Μᾶς ἐφάνη ὅτι εἰς ἄλλα συγγράμματα ὑποτίθεται ἡ ὕπαρξις τῆς τοιαύτης διατάξεως, χωρὶς νὰ ἀποδεικνύεται· ἢ ἀποδεικνύεται μὲν πλὴν διὰ περιπεπλεγμένων καὶ δυσλήπτων σχημάτων, καθὼς τοῦτο παρατηρεῖται εἰς τὸν Εὐκλείδην.

Εἴδομεν εἰς τὸ αὐτὸ παράρτημα (προβλ. Γ΄ καὶ Δ΄) διὰ πόσον ἁπλουστάτων κατασκευῶν προσδιορίζεται ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἑδρῶν ἑνὸς κανονικοῦ πολυέδρου, καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς τε ἐγγεγραμμένης καὶ περιγεγραμμένης σφαίρας· ἀλλ᾽ ἴσως δὲν θέλει εἶναι ἀνωφελὲς νὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὰ αὐτὰ προβλήματα τὸν Τριγωνομετρικὸν ὑπολογισμὸν ὅστις περιπλέον θέλει μᾶς χορηγήσει νέας προτάσεις.

Ἔςωσαν α, β, γ (σχ. 222) αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ συγκροτοῦσαι τὴν ςερεὰν γωνίαν Ο, καὶ ἂς ζητήσωμεν τὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται αἱ γωνίαι α καὶ β· ἐκ τῆς ςιγμῆς Ο ὡς ἐκ κέντρου γράφομεν τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ· εἰς τὸ τρίγωνον τοῦτο γνωρίζομεν τὰς τρεῖς πλευρὰς $ΒΓ = α$, $ΑΓ = β$, $ΑΒ = γ$· ἠμποροῦμεν λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὴν γωνίαν Γ τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῶν πλευρῶν α καὶ β διὰ τοῦ γνωςοῦ τύπου $συν\,Γ = \frac{συν\,γ - συν\,α\;συν\,β}{ἡμ\,α\;ἡμ\,β}$. Ἂς ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον τοῦτον εἰς τὰ πέντε κανονικὰ πολύεδρα καὶ θέλομεν προσδιορίσει τὴν κλίσιν δύο προσκειμένων ἑδρῶν εἰς ἕκαςον τούτων.

σχ. 243. Εἰς τὸ τετράεδρον, αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ συγκροτοῦσαι τὴν ςερεὰν γωνίαν Σ, εἶναι γωνίαι ἰσοπλεύρων τριγώνων· ἐὰν λοιπὸν καλέσωμεν τὴν ἡμιπεριφέρειαν ἢ τὸ τόξον τῶν $200° = π$, θέλομεν ἔχει $α = β = γ = \frac{1}{3}π$· ὅθεν $συν\,Γ = \frac{συν\,α - συν^2 α}{ἡμ^2 α}$ $= \frac{συν\,α\,(1 - συν\,α)}{1 - συν^2 α} = \frac{συν\,α}{1 + συν\,α}$· ἀλλὰ γνωςὸν εἶναι ὅτι $συν\,\frac{1}{3}π = \frac{1}{2}$· λοιπὸν $συν\,Γ = \frac{1}{3}$.

σχ. 245. Εἰς τὸ ἑξάεδρον ἢ κύβον, αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν ςερεὰν γωνίαν Α, εἶναι ὀρθαί· ὅθεν $α = β = γ = \frac{1}{2}π$, καὶ $συν\,α = 0$· ὅθεν $συν\,Γ = 0$. Ἡ γωνία λοιπὸν δύο προσκειμένων ἑδρῶν εἶναι ὀρθή.

σχ. 243. Εἰς τὸ ὀκτάεδρον, ἐὰν κάμωμεν $α = ΔΑΣ = \frac{1}{3}π$, $β = ΔΑΤ = \frac{1}{3}π$, $γ = ΤΑΣ = \frac{1}{2}π$, θέλομεν ἔχει $συν\,Γ = \frac{συν\,\frac{1}{2}π - συν^2 \frac{1}{3}π}{ἡμ^2 \frac{1}{3}π}$. ἀλλὰ $συν\,\frac{1}{2}π = 0$, $συν\,\frac{1}{3}π = \frac{1}{2}$, $ἡμ\,\frac{1}{3}π = \frac{1}{2}\sqrt{3}$· λοιπὸν $συν\,Γ = -\frac{1}{3}$· παραβάλλοντες τὴν τιμὴν ταύτην μὲ τὴν εὑρεθεῖσαν διὰ τὸ τετράεδρον, βλέπομεν ὅτι ἡ κλίσις τῶν ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου καὶ ἡ κλίσις τῶν ἑδρῶν τοῦ ὀκταέδρου εἶναι τοιαῦται ὥςε ἡ μία εἶναι παραπλήρωμα τῆς ἄλλης.

σχ. 246. Εἰς τὸ δωδεκάεδρον, ἑκάςη τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ὁποῦ συγκροτοῦν τὴν ςερεὰν γωνίαν, ἰσοῦται μὲ γωνίαν κανονικοῦ πενταγώνου· κάμνοντες λοιπὸν $α = β = γ = \frac{3}{5}π$, εὑρίσκομεν $συν\,Γ = \frac{συν\,α}{1 + συν\,α}$· ἀλλὰ $συν\,\frac{3}{5}π = -συν\left(π - \frac{3}{5}π\right)$ $= -συν\,\frac{2π}{5} = -ἡμ\left(\frac{1}{2}π - \frac{2}{5}π\right) = -ἡμ\,\frac{1}{10}π = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$.

λοιπὸν $\text{συν}\,\Gamma = \frac{1-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{(1-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{20} = -\frac{4\sqrt{5}}{20}$

$= -\frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, ἀκολούθως $\text{ἡμ}\,\Gamma = \frac{2}{\sqrt{5}}$, καὶ $\text{ἐφ}\,\Gamma = -2$.

σχ. 247. Εἰς τὸ εἰκοσάεδρον, πρέπει νὰ κάμωμεν $\gamma = \Gamma'B'\Delta' = \frac{3}{5}\pi$, $\alpha = \beta = \Gamma'B'A' = \frac{1}{3}\pi$, καὶ θέλομεν ἔχει $\text{συν}\,\Gamma =$

$\frac{\text{συν}\,\frac{3}{5}\pi - \text{συν}^2\,\frac{1}{3}\pi}{\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{3}\pi} = \frac{\frac{1}{4}(1-\sqrt{5})-\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{-\sqrt{5}}{3}$. λοιπὸν $\text{ἡμ}\,\Gamma$

$= \frac{2}{3}$. Τοιαῦται εἶναι αἱ ἁπλούσαται ἐκφράσεις διὰ τῶν ὁποίων προσδιορίζεται ἡ κλίσις δύο ἑδρῶν εἰς τὰ πέντε κανονικὰ πολύεδρα. Ἀλλ' εἶναι δυνατὸν νὰ τὰς συμπεριλάβωμεν εἰς ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν τύπον.

Τῷ ὄντι (σχ. 248) ἔςω ν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἑκάςης ἕδρας, μ ὁ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἱ ὁποῖαι συνενοῦνται εἰς ἑκάςην ςερεὰν γωνίαν· ἐὰν ἀπὸ τὴν ςιγμὴν Ο ὡς κέντρον μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν μονάδα γράψωμεν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν, αὐτὴ θέλει συναπαντήσει τὰς τρεῖς γραμμὰς ΟΑ, ΟΓ, ΟΔ εἰς π', κ, ρ, καὶ ἀπὸ τὴν ἕνωσιν τῶν ςιγμῶν τούτων διὰ τόξων μεγίςων κύκλων θέλει σχηματισθῆ σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ π'κρ· εἰς τὸ τρίγωνον τοῦτο ἡ ἐν ρ γωνία εἶναι ὀρθή· διότι αἱ εὐθεῖαι ΔΓ, ΟΔ εἶναι κάθετοι εἰς τὴν ΔΑ· λοιπὸν ἡ ΔΑ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΟΔΓ, ἐπομένως τὸ ἐπίπεδον ΟΑΔ εἶναι κάθετον εἰς τὸ ἐπίπεδον ΟΔΓ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ κλίσις των ἢ ἡ γωνία ρ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου π'κρ εἶναι ὀρθή· προσέτι ἐπειδὴ ἡ γωνία κ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ἄλλό τι δὲν εἶναι παρὰ ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων ΟΓΔ καὶ ΟΑΓ, αὐτὴ δὲ ἰσοῦται μὲ τὴν εἰς τὸ κέντρον Γ ἡμιγωνίαν τῆς κανονικῆς ἕδρας τῆς ὁποίας ΑΒ εἶναι ἡ πλευρὰ ἡ ὁποία ἡμιγωνία εἶναι ἴση μὲ $\frac{\pi}{\nu}$, διὰ τοῦτο $\kappa = \frac{\pi}{\nu}$· εὐκόλως δὲ βλέπομεν ὅτι ἡ γωνία π' τοῦ ἰδίου σφαιρικοῦ τριγώνου ἥτις ἄλλό τι δὲν εἶναι παρὰ ἡ κλίσις τοῦ ἐπιπέδου ΟΑΔ ἐπὶ ΟΑΓ εἶναι τοιοῦτον μέρος δύο ὀρθῶν ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν συνερχομένων ἐπιπέδων γωνιῶν εἰς τὴν ςιγμὴν Α· λοιπὸν $\pi' = \frac{\pi}{\mu}$.

Εἰς τὸ σφαιρικὸν λοιπὸν τρίγωνον π'κρ ἐκτὸς τῆς ὀρθῆς γωνίας γνωρίζομεν τὰς γωνίας $\pi' = \frac{\pi}{\mu}$ καὶ $\kappa = \frac{\pi}{\nu}$. Τώρα κατὰ τὴν δ' ἀρχὴν τῶν σφαιρικῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ἡμ κ : συν π' :: 1 : συν κρ· ἐκ τῆς ὁποίας συν κρ $=\frac{\text{συν } \pi'}{\text{ἡμ } \kappa}$· ἀλλὰ συν κρ = συν ΓΟΔ = ἡμ ΓΛΟ = ἡμ $\frac{1}{2}$ Γ, ὅπου Γ σημειόνει τὴν γωνίαν ΓΛΒ· λοιπὸν ἡμ $\frac{1}{2}$ Γ $=\frac{\text{συν } \frac{\pi}{\mu}}{\text{ἡμ } \frac{\pi}{\nu}}$· Τύπος γενικὸς τὸν ὁποῖον ἐὰν διαδοχικῶς ἐφαρμόσωμεν εἰς τὰ πέντε πολύεδρα, θέλομεν εὕρη τὰς ἰδίας τιμὰς τοῦ συν Γ ἢ $1-2$ἡμ^2 $\frac{1}{2}$ Γ τὰς ὁποίας δι' ἄλλης ὁδοῦ εὕρομεν· ἀρκεῖ, πρὸς τοῦτο, νὰ ἀντεισάξωμεν εἰς κάθε περίστασιν τὰς τιμὰς τοῦ μ καὶ ν, τοῦτ' ἔςι νὰ κάμωμεν διὰ τὸ:

	τετράεδρον,	ἑξάεδρον,	ὀκτάεδρον,	δωδεκάεδρον,	εἰκοσάεδρον
μ =	3	3	4	3	5.
ν =	3	4	3	5	3.

Τὸ αὐτὸ σφαιρικὸν τρίγωνον π'κρ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐσυνάξαμεν τὴν κλίσιν δύο προσκειμένων ἑδρῶν, δίδει συν π'κ = σφπ' σφ κ, ἢ $\frac{\Gamma\text{Ο}}{\text{ΟΑ}}=$ σφ $\frac{\pi}{\mu}$ σφ $\frac{\pi}{\nu}$· Ἐὰν λοιπὸν καλέσωμεν Ρ τὴν ἀκτῖνα τῆς περὶ τὸ πολύεδρον περιγεγραμμένης σφαίρας, καὶ ρ τὴν τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ αὐτὸ πολύεδρον, θέλομεν ἔχει $\frac{\text{Ρ}}{\rho}=\frac{1}{\text{σφ } \frac{\pi}{\mu}} \times \frac{1}{\text{σφ } \frac{\pi}{\nu}}=$ ἐφ $\frac{\pi}{\mu}$ ἐφ $\frac{\pi}{\nu}$· περιπλέον, κάμνοντες τὴν πλευρὰν ΑΒ = α, ἔχομεν ΓΑ $=\frac{\frac{1}{2}\alpha}{\text{ἡμ } \frac{\pi}{\nu}}$, καὶ ἑπομένως $\text{Ρ}^2=\rho^2+\frac{\frac{1}{4}\alpha^2}{\text{ἡμ}^2\frac{\pi}{\nu}}$· αἱ δύο αὗται ἐξισώσεις δίδουν διὰ κάθε πολύεδρον τὰς τιμὰς τῶν ἀκτίνων Ρ καὶ ρ τῆςτε ἐγγεγραμμένης καὶ περιγεγραμμένης σφαίρας. Ὑποθέτοντες τὴν γωνίαν Γ γνωςὴν ἔχομεν ἀκόμη, ρ = $\frac{1}{2}$ α σφ $\frac{\pi}{\nu}$ ἐφ $\frac{1}{2}$ Γ καὶ Ρ = $\frac{1}{2}$ α ἐφ $\frac{\pi}{\mu}$ ἐφ $\frac{1}{2}$ Γ.

Βλέπομεν ὅτι εἰς τὸ δωδεκάεδρον καὶ εἰκοσάεδρον ὁ λόγος $\frac{\text{Ρ}}{\rho}$

ἔχει τὴν αὐτὴν τιμὴν ἐφ $\frac{\pi}{3}$ ἐφ $\frac{\pi}{5}$. Ἐὰν λοιπὸν ἡ ἀκτὶς Ρ ἦναι ἡ αὐτὴ καὶ διὰ τὰ δύο, ἡ ἀκτὶς ρ θέλει εἶναι ἐπίσης ἡ αὐτή· δηλονότι, ἐὰν τὰ δύο ταῦτα στερεὰ ἐγγράφωνται εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν, τὰ αὐτὰ καὶ περιγράφονται εἰς μίαν καὶ τὴν ἰδίαν σφαῖραν, καὶ τ' ἀνάπαλιν. Η αὐτὴ ἰδιότης ὑπάρχει εἰς τὸ ἑξάεδρον καὶ ὀκτάεδρον, διότι ἡ τιμὴ τοῦ $\frac{P}{\rho}$ εἶναι καὶ διὰ τὰ δύο ἴση μὲ ἐφ $\frac{\pi}{3}$ ἐφ $\frac{\pi}{4}$.

Ἂς σημειώσωμεν ὅτι τὰ κανονικὰ πολύεδρα δὲν εἶναι τὰ μόνα τὰ ὁποῖα περιέχονται ὑπὸ ἴσων κανονικῶν πολυγώνων· διότι ἐὰν ἐπὶ μιᾶς κοινῆς ἕδρας ἐπιστηρίξωμεν δύο κανονικὰ ἴσα τετράεδρα, θέλει προκύψει στερεὸν περιεχόμενον ὑπὸ ἓξ ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων τριγώνων. Δυνατὸν δὲ νὰ σχηματισθῇ ἄλλο στερεὸν μὲ δέκα ἴσα καὶ ἰσόπλευρα τρίγωνα· ἀλλὰ τὰ κανονικὰ πολύεδρα εἶναι τὰ μόνα τὰ ὁποῖα ἔχουν ἐνταυτῷ τὰς στερεὰς γωνίας ἴσας.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ΄.

Περὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου.

Ἐστὼ 1 ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, π ἡ ἡμιπεριφέρεια μεγίστου κύκλου· ἔστωσαν α, β, γ αἱ τρεῖς πλευραὶ ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου· Α, Β, Γ τὰ τόξα μεγίστου κύκλου τὰ ὁποῖα μετροῦν τὰς ἀπέναντι γωνίας· ἔστω $Α+Β+Γ-\pi=Σ$· κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα εἰς τὸ κείμενον (23, 7), τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ τόξον Σ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος, καὶ οὕτω παριστάνεται διὰ Σ. Τώρα, ἐκ τῶν ἀναλογιῶν τοῦ Νεπήρου ἔχομεν

$$\text{ἐφ}\,\frac{Α+Β}{2} : \text{σφ}\,\frac{Γ}{2} :: \text{συν}\,\frac{α-β}{2} : \text{συν}\,\frac{α+β}{2}.$$

καὶ ἐντεῦθεν $\text{ἐφ}\,\frac{1}{2}(Α+Β) = \frac{\text{συν}\,\frac{1}{2}(α-β)}{\text{συν}\,\frac{1}{2}(α+β)}\,\text{σφ}\,\frac{1}{2}Γ = \frac{(\text{σφ}\,\frac{1}{2}α\,\text{σφ}\,\frac{1}{2}β+1)}{\text{σφ}\,\frac{1}{2}α\,\text{σφ}\,\frac{1}{2}β-1}\,\text{σφ}\,\frac{1}{2}Γ$· ἀπὸ ἄλλο μέρος $\text{ἐφ}\,\frac{1}{2}(Α+Β+Γ) = \frac{\text{ἐφ}\,\frac{1}{2}(Α+Β)+\text{ἐφ}\,\frac{1}{2}Γ}{1-\text{ἐφ}\,\frac{1}{2}(Α+Β)\,\text{ἐφ}\,\frac{1}{2}Γ}$. ἀντεισάγοντες εἰς ταύτην τὴν ἐξίσωσιν ἀντὶ $\text{ἐφ}\,\frac{1}{2}(Α+Β)$ τὴν ἀνωτέρω τιμὴν εὑρίσκομεν $\text{ἐφ}\,\frac{1}{2}(Α+Β+Γ) = \frac{(1+\text{ἐφ}^2\,\frac{1}{2}Γ)\,\text{σφ}\,\frac{1}{2}α\,\text{σφ}\,\frac{1}{2}β+1-\text{ἐφ}^2\,\frac{1}{2}Γ}{-2\,\text{ἐφ}\,\frac{1}{2}Γ}$. ἀλλ' ἐπειδὴ $1+\text{ἐφ}^2\,\frac{1}{2}Γ$

$$= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 \frac{1}{2}\Gamma}$$ · διὰ τοῦτο $\varepsilon\varphi \frac{1}{2}(A+B+\Gamma) = \frac{\sigma\varphi\frac{1}{2}\alpha\sigma\varphi\frac{1}{2}\beta + \sigma\upsilon\nu^2\frac{1}{2}\Gamma - \eta\mu^2\frac{1}{2}\Gamma}{-2\eta\mu\frac{1}{2}\Gamma\,\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2}\Gamma}$

$$= \frac{\sigma\varphi\frac{1}{2}\alpha\sigma\varphi\frac{1}{2}\beta + \sigma\upsilon\nu\Gamma}{-\eta\mu\,\Gamma} = -\sigma\varphi\tfrac{1}{2}\Sigma$$ · δηλαδὴ $\sigma\varphi\frac{1}{2}\Sigma = \frac{\sigma\varphi\frac{1}{2}\alpha\sigma\varphi\frac{1}{2}\beta + \sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu\,\Gamma}$,

τύπος ἁπλούςατος διὰ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ λογαριάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου, ὅταν γνωρίζωμεν δύο πλευρὰς α καὶ β καὶ τὴν περιεχομένην γωνίαν Γ· ἀπὸ τὸν αὐτὸν δὲ τύπον ἠμποροῦμεν νὰ ἐξάξωμεν πολλὰς ἀξιοσημειώτους συνεπείας.

1ον Ὅταν ἡ γωνία Γ ἦναι ςαθερὰ, καθὼς καὶ τὸ γινόμενον $\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}\sigma\varphi\frac{\beta}{2}$, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου τὸ παριςανόμενον διὰ Σ μένει ςαθερόν. Δύο λοιπὸν τρίγωνα ΓΑΒ, ΓΔΕ τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν γωνίαν Γ ἴσην, εἶναι ἰσοδύναμα ὅταν ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία $\varepsilon\varphi\frac{1}{2}\Gamma A : \varepsilon\varphi\frac{1}{2}\Gamma\Delta :: \varepsilon\varphi\frac{1}{2}\Gamma E : \varepsilon\varphi\frac{1}{2}\Gamma B$, δηλονότι, ὅταν αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν ἡμίσεων τῶν πλευρῶν ὁποῦ περιέχουν τὴν ἴσην γωνίαν, ἦναι ἀντιπεπονθότως ἀνάλογοι. (σχ. 282)

2ον Διὰ νὰ κάμωμεν ἐπὶ τῆς δοθείσης πλευρᾶς ΓΔ καὶ μὲ τὴν αὐτὴν γωνίαν Γ, τρίγωνον τὸ ΓΔΕ ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθὲν ΓΑΒ, πρέπει νὰ προσδιορίσωμεν ΓΕ διὰ τῆς ἀναλογίας:

$$\varepsilon\varphi\tfrac{1}{2}\Gamma\Delta : \varepsilon\varphi\tfrac{1}{2}\Gamma A :: \varepsilon\varphi\tfrac{1}{2}\Gamma B : \varepsilon\varphi\tfrac{1}{2}\Gamma E.$$

3ον Διὰ νὰ κάμωμεν μὲ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς Γ τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΓΔΕ ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθὲν ΓΑΒ, πρέπει νὰ λάβωμεν $\varepsilon\varphi\frac{1}{2}\Gamma\Delta$, ἢ $\varepsilon\varphi\frac{1}{2}\Gamma E$, μέσην ἀνάλογον μεταξὺ $\varepsilon\varphi\frac{1}{2}\Gamma A$ καὶ $\varepsilon\varphi\frac{1}{2}\Gamma B$.

4ον Διὰ τοῦ αὐτοῦ τύπου $\sigma\varphi\frac{1}{2}\Sigma = \frac{\sigma\varphi\frac{1}{2}\alpha\,\sigma\varphi\frac{1}{2}\beta + \sigma\upsilon\nu\,\Gamma}{\eta\mu\,\Gamma}$ ἀποδεικνύεται ἁπλούςατα ἡ ΚΖ΄ πρότασις τοῦ Ζ΄ βιβλίου: ὅτι, δηλαδὴ, ἀπὸ ὅλα τὰ σχηματιζόμενα σφαιρικὰ τρίγωνα μὲ δύο δεδομένας πλευρὰς α καὶ β, τὸ μεγαλήτερον εἶναι ἐκεῖνο εἰς τὸ ὁποῖον ἡ περιεχομένη γωνία ἀπὸ τὰς δεδομένας πλευρὰς, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων δύο γωνιῶν Α καὶ Β.

Μὲ τὴν ἀκτῖνα ΟΩ = 1 ἂς γραφθῇ ἡ ἡμιπεριφέρεια ΨΜΩ· ἂς γένῃ τὸ τόξον ΩΧ = Γ, καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τοῦ κέντρου ἂς ληφθῇ $O\Pi = \sigma\varphi\frac{1}{2}\alpha\,\sigma\varphi\frac{1}{2}\beta$· τέλος πάντων ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΠΧ καὶ ἂς καταβασθῇ ἡ ΧΥ κάθετος ἐπὶ τὴν ΠΩ. σχ. 283.

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΠΧΥ ἔχομεν $\sigma\varphi\Pi = \frac{\Pi Y}{XY} = \frac{\sigma\varphi\frac{1}{2}\alpha\,\sigma\varphi\frac{1}{2}\beta + \sigma\upsilon\nu\,\Gamma}{\eta\mu\,\Gamma}$ · λοιπὸν $\Pi = \frac{1}{2}\Sigma$· ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν Σ θέλει εἶναι μεγίςη ὅταν ἡ Π γένῃ τοιαύτη. Τώρα ἐὰν ἄξωμεν τὴν

ΠΜ ἐφαπτομένην εἰς τὴν περιφέρειαν, φανερὸν ὅτι ἡ γωνία ΜΠΟ θέλει εἶναι μεγίστη ἀπὸ ὅλας ἐκείνας τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ εἶναι εἰς τὴν στιγμὴν Π καὶ αἱ δύο πλευραὶ τελειόνουν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ μεταβλητοῦ τόξου ΧΩ, καὶ τότε ἡ γωνία ΜΠΟ=ΜΟΩ$-\frac{1}{2}\pi$· τὸ σφαιρικὸν λοιπὸν τρίγωνον τὸ σχηματιζόμενον μὲ δύο δεδομένας πλευρὰς περιέχει τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν ὅταν ἡ $\Sigma = \Gamma - \frac{1}{2}\pi$, ἢ $\Gamma = A + B$, ὅταν δηλ. ἡ γωνία Γ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων· ἐξαγόμενον σύμφωνον μὲ τὴν ἀναφερθεῖσαν πρότασιν.

Τὸ μέγιστον δὲν ἔχει χώραν ὅταν ἡ στιγμὴ Π εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ κύκλου, ὅταν, δηλαδὴ, σφ $\frac{1}{2}$ α σφ $\frac{1}{2}$ β $<$ 1: συνθήκη ἀπὸ τὴν ὁποίαν διαδοχικῶς ἐξάγεται σφ $\frac{1}{2}$ α $<$ ἐφ $\frac{1}{2}$ β, ἐφ $(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha) <$ ἐφ $\frac{1}{2}$ β, $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\beta$, καὶ τέλος $\pi < \alpha + \beta$· ἐξαγόμενον σύμφωνον μὲ τὸ σχόλιον τῆς ἰδίας προτάσεως.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Λ΄. Νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου διὰ μέσου τῶν τριῶν πλευρῶν του.

Πρὸς τοῦτο, πρέπει νὰ ἀντεισάξωμεν εἰς τὸν τύπον

$$\text{σφ}\,\tfrac{1}{2}\Sigma = \frac{\text{σφ}\,\frac{1}{2}\alpha\ \text{σφ}\,\frac{1}{2}\beta + \text{συν}\,\Gamma}{\text{ἡμ}\,\Gamma}$$

τὰς τιμὰς τοῦ ἡμ Γ καὶ συν Γ ἐκπεφρασμένας διὰ α, β, γ· τώρα ἔχομεν $\text{συν}\,\Gamma = \frac{\text{συν}\,\gamma - \text{συν}\,\alpha\ \text{συν}\,\beta}{\text{ἡμ}\,\alpha\ \text{ἡμ}\,\beta}$ καὶ σφ $\frac{1}{2}$ α σφ $\frac{1}{2}$ β $=$ (2σφ α $+$ ἐφ $\frac{1}{2}$ α)(2σφ β $+$ ἐφ $\frac{1}{2}$ β) $=$ 4σφ α σφ β $+$ 2σφ β ἐφ $\frac{1}{2}$ α $+$ 2σφ α ἐφ $\frac{1}{2}$ β $+$ ἐφ $\frac{1}{2}$ α ἐφ $\frac{1}{2}$ β· ἀντεισάγοντες εἰς ταύτην τὴν ἔκφρασιν ἀντὶ σφ α καὶ σφ β τὰς τιμὰς $\frac{\text{συν}\,\alpha}{\text{ἡμ}\,\alpha}$ καὶ $\frac{\text{συν}\,\beta}{\text{ἡμ}\,\beta}$ καὶ ἀντὶ ἐφ $\frac{1}{2}$ α, καὶ ἐφ $\frac{1}{2}$ β τὰς τιμὰς $\frac{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\alpha}{\text{συν}\,\frac{1}{2}\alpha}$, καὶ $\frac{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\beta}{\text{συν}\,\frac{1}{2}\beta}$· ἔπειτα εἰς τὸ ἐξαγόμενον ἀντὶ συν $\frac{1}{2}$ α καὶ συν $\frac{1}{2}$ β τὰ ἴσα $\frac{\text{ἡμ}\,\alpha}{2\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\alpha}$ καὶ $\frac{\text{ἡμ}\,\beta}{2\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\beta}$, εὑρίσκομεν

$$\frac{4\text{συν}\,\alpha\ \text{συν}\,\beta + 4\text{συν}\,\beta\ \text{ἡμ}^2\,\tfrac{1}{2}\alpha + 4\text{συν}\,\alpha\ \text{ἡμ}^2\,\tfrac{1}{2}\beta + 4\text{ἡμ}^2\,\tfrac{1}{2}\alpha\ \text{ἡμ}^2\,\tfrac{1}{2}\beta}{\text{ἡμ}\,\alpha\ \text{ἡμ}\,\beta}$$

$=$ σφ $\frac{1}{2}$ α σφ $\frac{1}{2}$ β: ἀλλ᾽ ἐπειδὴ 4ἡμ^2 $\frac{1}{2}$ α $=$ 2 $-$ 2συν α, καὶ 4ἡμ^2 $\frac{1}{2}$ β $=$ 2 $-$ 2συν β, συνάγομεν 4συν α συν β $+$ 2συν β $-$ 2συν α συν β $+$ 2συν α $-$ 2συν α συν β $+$ 1 $-$ συν β $-$ συν α $+$ συν α συν β ἢ $\frac{1 + \text{συν}\,\alpha + \text{συν}\,\beta + \text{συν}\,\alpha\ \text{συν}\,\beta}{\text{ἡμ}\,\alpha\ \text{ἡμ}\,\beta}$

$$= \frac{1 + \text{συν}\,\alpha}{\text{ἡμ}\,\alpha} \cdot \frac{1 + \text{συν}\,\beta}{\text{ἡμ}\,\beta} = \text{σφ}\,\tfrac{1}{2}\alpha\ \text{σφ}\,\tfrac{1}{2}\beta\text{· ἐντεῦθεν προκύπτει·}$$

$$\text{συν}\,\Gamma + \text{σφ}\,\tfrac{1}{2}\alpha\ \text{σφ}\,\tfrac{1}{2}\beta = \frac{1 + \text{συν}\,\alpha + \text{συν}\,\beta + \text{συν}\,\gamma}{\text{ἡμ}\,\alpha\ \text{ἡμ}\,\beta}.$$

Μετὰ ταῦτα ἡ τιμὴ τοῦ συν Γ δίδει

$$1+\text{συν}\,\Gamma=\frac{\text{συν}\,\gamma-\text{συν}\,(\alpha+\beta)}{\text{ἡμ}\,\alpha\,\text{ἡμ}\,\beta}=\frac{2\,\text{ἡμ}\,\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\,\text{ἡμ}\,\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}{\text{ἡμ}\,\alpha\,\text{ἡμ}\,\beta}$$

$$1-\text{συν}\,\Gamma=\frac{\text{συν}(\alpha-\beta)-\text{συν}\,\gamma}{\text{ἡμ}\,\alpha\,\text{ἡμ}\,\beta}=\frac{2\,\text{ἡμ}\,\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\,\text{ἡμ}\,\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}}{\text{ἡμ}\,\alpha\,\text{ἡμ}\,\beta}.$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς δύο ταύτας ποσότητας μεταξύ των καὶ ἐξάγοντες τὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου, εὑρίσκομεν

$$\text{ἡμ}\,\Gamma=\frac{2\sqrt{\left(\text{ἡμ}\,\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\,\text{ἡμ}\,\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\,\text{ἡμ}\,\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\,\text{ἡμ}\,\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right)}}{\text{ἡμ}\,\alpha\,\text{ἡμ}\,\beta}$$

Λοιπὸν τέλος πάντων

$$\text{σφ}\,\tfrac{1}{2}\,\Sigma=\frac{1+\text{συν}\,\alpha+\text{συν}\,\beta+\text{συν}\,\gamma}{2\sqrt{\left(\text{ἡμ}\,\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\,\text{ἡμ}\,\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\,\text{ἡμ}\,\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\,\text{ἡμ}\,\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right)}}$$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου λύεται τὸ προτεθὲν πρόβλημα, ἀλλ' ἠμποροῦμεν νὰ φθάσωμεν εἰς ἁπλούστερον ἐξαγόμενον.

Πρὸς τοῦτο ἂς ξαναλάβωμεν τὸν τύπον

$$\text{σφ}\,\tfrac{1}{2}\,\Sigma=\frac{\text{σφ}\,\frac{1}{2}\,\alpha\;\text{σφ}\,\frac{1}{2}\,\beta+\text{συν}\,\Gamma}{\text{ἡμ}\,\Gamma}$$

Ἐκ τούτου συνάγομεν $1+\text{σφ}^2\,\frac{1}{2}\,\Sigma$, ἢ $\frac{1}{\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\,\Sigma}=$ $\frac{\text{σφ}^2\,\frac{1}{2}\,\alpha\;\text{σφ}^2\,\frac{1}{2}\,\beta+2\,\text{σφ}\,\frac{1}{2}\,\alpha\;\text{σφ}\,\frac{1}{2}\,\beta\;\text{συν}\,\Gamma+1}{\text{ἡμ}^2\,\Gamma}$. Ἀλλ' ἡ τιμὴ τοῦ συνΓ δίδει $2\,\text{σφ}\,\frac{1}{2}\,\alpha\;\text{σφ}\,\frac{1}{2}\,\beta\;\text{συν}\,\Gamma=\frac{2\,\text{συν}\,\frac{1}{2}\,\alpha\;\text{συν}\,\frac{1}{2}\,\beta}{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\,\alpha\;\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\,\beta}\times\frac{\text{συν}\gamma-\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta}{\text{ἡμ}\,\alpha\;\text{ἡμ}\,\beta}$.

ἐπειδὴ δὲ $\text{ἡμ}\,\alpha\;\text{ἡμ}\,\beta=2\,\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\,\alpha\;\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\,\beta\;\text{συν}\,\frac{1}{2}\,\alpha\;\text{συν}\,\frac{1}{2}\,\beta$, διὰ τοῦτο $2\,\text{σφ}\,\frac{1}{2}\,\alpha\;\text{σφ}\,\frac{1}{2}\,\beta\;\text{συν}\,\Gamma=\frac{\text{συν}\gamma-\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta}{\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\,\alpha\,\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\,\beta}$. θέτοντες εἰς τὸν ἀριθμητὴν, ἀντὶ τῶν συν γ, συν α, συν β τὰς τιμάς των $1-2\,\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\,\gamma$, $1-2\,\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\,\alpha$, $1-2\,\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\,\beta$, καὶ ἀνάγοντες, εὑρίσκομεν

$$2\,\text{σφ}\,\tfrac{1}{2}\,\alpha\;\text{σφ}\,\tfrac{1}{2}\,\beta\;\text{συν}\,\Gamma=\frac{\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\,\alpha+\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\,\beta-\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\,\gamma}{\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\,\alpha\;\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\,\beta}-2.$$

Ἀπὸ ἄλλο μέρος $\text{σφ}^2\,\frac{1}{2}\,\alpha.\text{σφ}^2\,\frac{1}{2}\,\beta=\frac{1-\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\,\alpha}{\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\,\alpha}.\frac{1-\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\,\beta}{\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\,\beta}=$

$\frac{1-\text{ἡμ}^2\frac{1}{2}\alpha-\text{ἡμ}^2\frac{1}{2}\beta}{\text{ἡμ}^2\frac{1}{2}\alpha\,\text{ἡμ}^2\frac{1}{2}\beta}+1$. Ἀντεισάγοντες λοιπὸν ταύτας τὰς τιμὰς εὑρίσκομεν $\frac{1}{\text{ἡμ}^2\frac{1}{2}\Sigma}=\frac{1-\text{ἡμ}^2\frac{1}{2}\gamma}{\text{ἡμ}^2\frac{1}{2}\alpha\,\text{ἡμ}^2\frac{1}{2}\beta\,\text{ἡμ}^2\Gamma}$, ἑπομένως $\text{ἡμ}\frac{1}{2}\Sigma=\frac{\text{ἡμ}\frac{1}{2}\alpha\,\text{ἡμ}\frac{1}{2}\beta\,\text{ἡμ}\Gamma}{\text{συν}\frac{1}{2}\gamma}$, καὶ ξαναθέτοντες τὴν τιμὴν τοῦ ἡμΓ, ἔχομεν

$$\text{ἡμ}\frac{1}{2}\Sigma=\frac{\sqrt{\left(\text{ἡμ}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\,\text{ἡμ}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\,\text{ἡμ}\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\,\text{ἡμ}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right)}}{2\,\text{συν}\frac{1}{2}\alpha\,\text{συν}\frac{1}{2}\beta\,\text{συν}\frac{1}{2}\gamma}$$

Τύπος ἐπιτήδειος διὰ τὸν λογαριθμικὸν ὑπολογισμόν.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν τύπον τοῦτον μὲ τὴν τιμὴν τῆς $\text{σφ}\frac{1}{2}\Sigma$, θέλομεν εὕρη

$$\text{συν}\frac{1}{2}\Sigma=\frac{1+\text{συν}\,\alpha+\text{συν}\,\beta+\text{συν}\,\gamma}{4\,\text{συν}\frac{1}{2}\alpha\,\text{συν}\frac{1}{2}\beta\,\text{συν}\frac{1}{2}\gamma}=\frac{\text{συν}^2\frac{1}{2}\alpha+\text{συν}^2\frac{1}{2}\beta+\text{συν}^2\frac{1}{2}\gamma-1}{2\,\text{συν}\frac{1}{2}\alpha\,\text{συν}\frac{1}{2}\beta\,\text{συν}\frac{1}{2}\gamma}$$

Νέος τύπος ὅστις ἔχει τὸ καλὸν νὰ σύγκειται ἀπὸ λογικοὺς ὅρους·

Ἐντεῦθεν συνάγομεν ἀκόμη $\frac{1-\text{συν}\frac{1}{2}\Sigma}{\text{ἡμ}\frac{1}{2}\Sigma}$, ἢ

$$\text{ἐφ}\frac{1}{4}\Sigma=\frac{1-\text{συν}^2\frac{1}{2}\alpha-\text{συν}^2\frac{1}{2}\beta-\text{συν}^2\frac{1}{2}\gamma+2\,\text{συν}\frac{1}{2}\alpha\,\text{συν}\frac{1}{2}\beta\,\text{συν}\frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{\left(\text{ἡμ}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\,\text{ἡμ}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\,\text{ἡμ}\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\,\text{ἡμ}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right)}}$$

Τώρα τὸν ἀριθμητὴν ταύτης τῆς ἐκφράσεως ἠμποροῦμεν νὰ ἀναλύσωμεν εἰς παράγοντας καθὼς ἐκάμαμεν διὰ παρομοίαν ποσότητα (Σημ. Ε΄ προβλ. Δ΄)· καὶ οὕτως ἔχομεν.

$$\text{ἐφ}\frac{1}{4}\Sigma=\frac{4\,\text{ἡμ}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}\,\text{ἡμ}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{4}\,\text{ἡμ}\frac{\alpha+\gamma-\beta}{4}\,\text{ἡμ}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{4}}{\sqrt{\left(\text{ἡμ}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\,\text{ἡμ}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\,\text{ἡμ}\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\,\text{ἡμ}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right)}}$$

Ἀλλὰ $\frac{\text{ἡμ}\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{\text{ἡμ}\,\pi}}=\sqrt{\left(\frac{\text{ἡμ}^2\frac{1}{2}\pi}{2\,\text{ἡμ}\frac{1}{2}\pi\,\text{συν}\frac{1}{2}\pi}\right)}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\text{ἐφ}\frac{1}{2}\pi\right)}$·

λοιπὸν τέλος πάντων

$$\text{ἐφ}\frac{1}{4}\Sigma=\sqrt{\left(\text{ἐφ}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}\,\text{ἐφ}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{4}\,\text{ἐφ}\frac{\alpha+\gamma-\beta}{4}\,\text{ἐφ}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{4}\right)}$$

Ὁ χαριέστατος οὗτος τύπος χρεωστεῖται εἰς τὸν Σίμωνα Λουιλλιέρον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Δοθεισῶν τῶν τριῶν πλευρῶν ΒΓ=α, ΑΓ=β, ΑΒ=γ, νὰ προσδιορίσωμεν τὴν θέσιν τῆς στιγμῆς Ι, πόλου τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περιγεγραμμένου κύκλου. (σχ. 284).

Η θέσις τῆς τοιαύτης στιγμῆς προσδιορίζεται διὰ τοῦ ἀποστήματός της ἀπὸ τὴν στιγμὴν Γ ἤγουν διὰ ΓΙ καὶ τῆς γωνίας τὴν ὁποίαν τὸ τόξον ΓΙ κάμνει μὲ τὸ ΑΓ· ἔσω λοιπὸν $\text{ΑΓΙ} = \chi$, καὶ τὸ τόξον $\text{ΑΙ} = \text{ΓΙ} = \text{ΒΙ} = \varphi$. Εἰς τὰ τρίγωνα ΓΑΙ, ΓΒΙ ἔχομεν ἀπὸ τοὺς γνωστοὺς τύπους $\text{συν}\chi = \dfrac{\text{συν}\varphi - \text{συν}\beta\,\text{συν}\varphi}{\text{ημ}\,\beta\ \text{ημ}\,\varphi} = \dfrac{1 - \text{συν}\,\beta}{\text{ημ}\,\beta}\ \text{σφ.}\ \varphi = \dfrac{\text{ημ}\,\beta}{1 + \text{συν}\,\beta}\ \text{σφ.}\ \varphi$, $\text{συν}(\Gamma - \chi) = \dfrac{1 - \text{συν}\,\alpha}{\text{ημ}\,\alpha}\ \text{σφ.}\varphi$. Λοιπὸν $\dfrac{\text{συν}(\Gamma - \chi)}{\text{συν}\,\chi}$, ἢ $\text{συν}\,\Gamma + \text{ημ}\,\Gamma\,\text{εφ}\chi = \dfrac{(1 + \text{συν}\beta)\,(1 - \text{συν}\alpha)}{\text{ημ}\,\alpha\ \text{ημ}\,\beta}$· ἀντεισάγοντες εἰς ταύτην τὴν ἐξίσωσιν τὰς τιμὰς τοῦ συν Γ καὶ ημ Γ ἐκπεφρασμένας διὰ α, β, γ, καὶ, διὰ τὸ σύντομον, κάμνοντες $\text{Μ} = \sqrt{(1 - \text{συν}^2\alpha - \text{συν}^2\beta - \text{συν}^2\gamma + 2\,\text{συν}\alpha\,\text{συν}\alpha\,\text{συν}\gamma)}$, εὑρίσκομεν $\text{εφ}\chi = \dfrac{1 + \text{συν}\beta - \text{συν}\gamma - \text{συν}\alpha}{\text{Μ}}$, τύπος διὰ τοῦ ὁποίου προσδιορίζεται ἡ γωνία ΑΓΙ. Δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἐξ αἰτίας τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΑΓΙ, ΑΒΙ, ΒΓΙ, ἔχομεν $\text{ΑΓΙ} = \frac{1}{2}(\Gamma + \text{Α} - \text{Β})$· διότι $\text{ΑΓΙ} = \text{ΑΓΒ} - \text{ΙΓΒ} = \text{ΑΓΒ} - [\text{ΓΒΑ} - (\text{ΓΑΒ} - \text{ΙΓΑ})] = \text{ΑΓΒ} - \text{ΓΒΑ} + \text{ΓΑΒ} - \text{ΙΓΑ}$· δηλαδὴ $2\text{ΙΓΑ} = \Gamma + \text{Α} - \text{Β}$· καὶ $\text{ΙΓΑ} = \frac{1}{2}(\Gamma + \text{Α} - \text{Β})$· παρομοίως $\text{ΒΓΙ} = \frac{1}{2}(\text{Β} + \Gamma - \text{Α})$, $\text{ΒΑΙ} = \frac{1}{2}(\text{Α} + \text{Β} - \Gamma)$. Ἐντεῦθεν προκύπτουν οἱ ἀξιοσημείωτοι οὗτοι τύποι:

$$\text{εφ}\ \tfrac{1}{2}\,(\text{Α} + \Gamma - \text{Β}) = \frac{1 + \text{συν}\beta - \text{συν}\alpha - \text{συν}\gamma}{\text{Μ}}$$

$$\text{εφ}\ \tfrac{1}{2}\,(\text{Β} + \Gamma - \text{Α}) = \frac{1 + \text{συν}\alpha - \text{συν}\beta - \text{συν}\gamma}{\text{Μ}}$$

$$\text{εφ}\ \tfrac{1}{2}\,(\text{Α} + \text{Β} - \Gamma) = \frac{1 + \text{συν}\gamma - \text{συν}\alpha - \text{συν}\beta}{\text{Μ}}$$

εἰς τοὺς ὁποίους ἠμποροῦμεν νὰ ὑποσυνάψωμεν καὶ τὸν δίδοντα τὴν τιμὴν τῆς σφ $\frac{1}{2}\Sigma$, ὅστις δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τῆς μορφῆς:

$$\text{εφ}\ \tfrac{1}{2}\,(\text{Α} + \text{Β} + \Gamma) = \frac{-1 - \text{συν}\alpha - \text{συν}\beta - \gamma}{\text{Μ}}.$$

Η εὑρεθεῖσα τιμὴ τῆς εφ χ, δίδει $1 + \text{εφ}^2\chi$ ἢ $\dfrac{1}{\text{συν}^2\chi} = \dfrac{2(1 + \text{συν}\beta)\,(1 - \text{συν}\gamma)\,(1 - \text{συν}\alpha)}{\text{Μ}^2} = \dfrac{16\,\text{συν}^2\frac{1}{2}\beta\,\text{ημ}^2\frac{1}{2}\gamma\,\text{ημ}^2\frac{1}{2}\alpha}{\text{Μ}^2}$. λοιπὸν $\dfrac{1}{\text{συν}\,\chi} = \dfrac{4\,\text{συν}\frac{1}{2}\beta\ \text{ημ}\frac{1}{2}\gamma\ \text{ημ}\frac{1}{2}\alpha}{\text{Μ}}$. Ἀλλ' ἐκ τῆς ἐξισώσεως συν χ

$= \dfrac{1-\text{συν}\,\beta}{\text{ἡμ}\,\beta}$ σφ.φ = ἐφ ½ β σφ.φ, ἐξάγεται ἐφ.φ = $\dfrac{\text{ἐφ}\,\frac{1}{2}\beta}{\text{συν}\,\gamma}$ · λοιπὸν ἐφ.φ = $\dfrac{4\,\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\alpha\,\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\beta\,\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\gamma}{M} =$

$$\frac{2\,\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\alpha\,\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\beta\,\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\gamma}{\sqrt{\left(\text{ἡμ}\,\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\,\text{ἡμ}\,\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\,\text{ἡμ}\,\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\,\text{ἡμ}\,\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right)}}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΓ′. Νὰ προσδιορισθῇ ἐπὶ τῆς τῆς σφαίρας ἡ γραμμὴ ἐπὶ τῆς ὁποίας αἱ κορυφαὶ τῶν τριγώνων τὰ ὁποῖα ἔχου βάσιν καὶ τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν.

Εςω ΑΒΓ ἓν τῶν σφαιρικῶν τριγώνων τῶν ὁ βάσις εἶναι ΑΒ=γ, καὶ ἡ δεδομένη ἐπιφάνεια Α . . . . . . Ἀπὸ τὴν ςιγμὴν τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ ἄς ὑψωθῇ ἡ ἀπροσδιόριςος κάθετος ΙΠΚ′· ἐὰν ληφθῇ τὸ τόξον ΙΠ ἴσον μὲ τεταρτημόριον, ἡ ςιγμὴ Π θέλει εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΑΒ, καὶ τὸ τόξον ΠΓΔ ἠγμένον διὰ τῶν ςιγμῶν Π, Γ θέλει εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ΑΒ. Εςω ΙΔ=π′, ΓΔ=κ· τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ, ΒΓΔ, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχομεν ΑΓ=β, ΒΓ=α, ΑΔ=π′+½ γ, ΒΔ=π′−½ γ, δίδουν συνα=συνκσυν(π′−½γ), συνβ=συνκσυν(π′+½γ). Ἀλλ' ἀνωτέρω εὕρομεν:

$$\text{σφ}\,\tfrac{1}{2}\Sigma = \frac{1+\text{συν}\,\alpha+\text{συν}\,\beta+\text{συν}\,\gamma}{\text{ἡμ}\,\alpha\,\text{ἡμ}\,\beta\,\text{ἡμ}\,\Gamma}.$$

ἀντεισάγοντες εἰς τὸν τύπον τοῦτον τὰς τιμὰς συνα+συνβ=2συνκ συνπ′σύν ½ γ, 1+συν γ=2συν^2 ½ γ, ἡμ β ἡμ Γ=ἡμ γ ἡμ Β = 2ἡμ ½ γ συν ½ γ ἡμ Β· θέλομεν ἔχει

$$\text{σφ}\,\tfrac{1}{2}\Sigma = \frac{\text{συν}\,\frac{1}{2}\gamma+\text{συν}\,\pi'\,\text{συν}\,\kappa}{\text{ἡμ}\,\alpha\,\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\gamma\,\text{ἡμ}\,B}.$$

Ἀπὸ ἄλλο μέρος εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΓΔ, ἔχομεν προσέτι ἡμαἡμΒ=ἡμκ· λοιπὸν σφ ½ Σ= $\dfrac{\text{συν}\frac{1}{2}\gamma+\text{συν}\pi'\text{σύν}\kappa}{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\gamma\,\text{ἡμ}\,\kappa}$, ἤ συν π′ συν κ=σφ ½ Σ ἡμ ½ γ ἡμ κ−συν ½ γ· αὕτη εἶναι ἡ μεταξὺ π′ καὶ κ σχέσις ἡ ὁποία πρέπει νὰ προσδιορίσῃ τὴν γραμμὴν ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖνται ὅλαι αἱ ςιγμαὶ Γ.

Προεκβληθείσης τῆς ΙΠ ποσότητα τινὰ ΠΚ′=χ, ἄς ἐπιζευχθῇ ἡ Κ′Γ καὶ ἔςω Κ′Γ=ψ· εἰς τὸ τρίγωνον ΠΚ′Γ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ΠΓ = ½ π−κ καὶ ἡ γωνία Κ′ΠΓ=π−π′, ἡ πλευρὰ Κ′Γ εὑρίσκεται διὰ τοῦ τύπου συν Κ′Γ=συν Κ′ΠΓ ἡμ ΠΚ′ ἡμΠΓ+συνΠΚ′ συν ΠΓ, ἤ

$$\text{συν}\,\psi = \text{ἡμ}\,\kappa\,\text{συν}\,\chi - \text{ἡμ}\,\chi\,\text{συν}\,\kappa\,\text{συν}\,\pi'.$$

ἀντεισάγοντες εἰς ταύτην τὴν ἐξίσωσιν ἀντὶ συν χ συν π′ τὴν τιμήν του σφ ½ Σ ἡμ ½ γ ἡμ χ—συν ½ γ, εὑρίσκομεν

$$\text{συν}\,\psi = \text{ἡμ}\,\chi\ \text{συν}\ \tfrac{1}{2}\gamma + \text{ἡμ}\,\chi\,(\text{συν}\,\chi - \text{ἡμ}\,\chi\ \text{σφ}\ \tfrac{1}{2}\Sigma\ \text{ἡμ}\ \tfrac{1}{2}\gamma)$$

Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν Σ καὶ γ ςαθερὰ, καὶ θέλωμεν ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ χ καὶ ψ νὰ μένῃ ἐπίσης ςαθερὰ ὁποιαδήποτε εἶναι ἡ θέσις τῆς ςιγμῆς Γ, ἀρκεῖ νὰ κάμωμεν τὸν συντελεςὴν τοῦ ἡμ χ ἴσον μὲ τὸ μηδέν· διότι τότε ἐπειδὴ συν χ—ἡμ χ σφ ½ Σ ἡμ ½ γ=ο συνάγομεν σφ χ=σφ ½ Σ ἡμ ½ γ, καὶ ψ=ἡμ χ συν ½ γ, τιμαὶ αἱ ὁποῖαι μένουν ςαθεραὶ ὅταν Σ καὶ γ ἦναι ἐπίσης ςαθερά· αἱ τιμαὶ λοιπὸν αὗται ὄχι μόνον εἶναι τοιαῦται σχετικῶς πρὸς τὴν κορυφὴν Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἀλλὰ σχετικῶς πρὸς τὴν κορυφὴν κάθε ἄλλου τριγώνου τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν μὲ τὸ ΑΒΓ· ὥςε ὅλαι αὗται αἱ κορυφαὶ ἰσάκις ἀπέχουν ἀπὸ μίαν ςιγμὴν τῆς καθέτου ΙΠΚ διὰ τὴν ὁποίαν χ=σφ ½ Σ ἡμ ½ γ, καὶ ψ=ἡμ χ συν ½ γ· εὑρίσκονται λοιπὸν ἐπὶ τοῦ μικροῦ κύκλου τοῦ ὁποίου πόλος εἶναι ἡ τοιαύτη ςιγμή. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν δὲ τὸν τοιοῦτον κύκλον, ἀφ' οὗ ἄξωμεν τὸ τόξον ΙΠ κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως ΑΒ, λαμβάνομεν ἐκεῖθεν τοῦ πόλου, τὸ μέρος ΠΚ′ τοιοῦτον ὥςε σφ ΠΚ′=σφ ½ Σ ἡμ ½ γ, καὶ ὁ γραφόμενος μικρὸς κύκλος ἐκ τῆς ςιγμῆς Κ′ ὡς ἐκ πόλου μὲ διάςημα τὸ Κ′Γ τοιοῦτον ὥςε συν Κ′Γ=ἡμ ΠΚ′ συν ½ γ θέλει εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος ὅλων τῶν κορυφῶν τῶν τριγώνων τῆς αὐτῆς βάσεως γ καὶ τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας Σ.

Τὸ ὡραῖον τοῦτο θεώρημα χρεωςεῖται εἰς τὸν Δεξέλλον· (βλέπε nova Acta Petropolitana Tom V, par. I).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ ΙΑ′.

Περὶ τῆς Γ′ προτάσεως τοῦ Η′ βιβλίου.

Τὴν πρότασιν ταύτην δυνάμεθα ἀκριβέςερον νὰ ἀποδείξωμεν ἀνάγοντές την εἰς τὰ προοιμιώδη λήμματα τὰ ὁποῖα ἐπροτάξαμεν τοῦ βιβλίου τούτου, κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον.

Λέγω πρῶτον ὅτι ἡ περατουμένη κυρτὴ ἐπιφάνεια ἀπὸ τὰς κόψεις ΑΖ, ΒΗ. καὶ ἀπὸ τὰ τόξα ΑωΒ, ΖχΗ δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι μικροτέρα τοῦ ἀντιςοιχοῦντος μέρους τοῦ ἐγγεγραμμένου πρίσματος, τοῦ ὀρθογωνίου, δηλαδὴ, ΑΒΗΖ. σχ. 252.

Τῷ ὄντι ἔςω Σ ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος κυρτὴ ἐπιφάνεια, καὶ, εἰ δυνατὸν, ἔςω τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΗΖ ἢ ΑΒ×ΑΖ=Σ+Μ· ἔνθα Μ εἶναι ποσότης θετική.

Ἂς προεκβληθῇ τὸ ὕψος ΑΖ τοῦ πρίσματος καὶ τοῦ κυλίνδρου ποσότητα τινὰ ΑΖ′ ἴσην μὲ ν φοραῖς τὴν ΑΖ, ὄντος ν ὁποιουδή-