$$\beta' = \alpha\left(1 + \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{1}{8}\omega^2 + \kappa\tau\lambda.\right)$$

$$\alpha' = \alpha\left(1 + \tfrac{1}{4}\omega - \frac{1}{32}\omega^2 + \kappa\tau\lambda.\right).$$

Καὶ ἐὰν κάμωμεν παρομοίως $\beta' = \alpha'(1+\omega')$. θέλομεν ἔχει

$$\omega' = \tfrac{1}{4}\omega - \frac{5}{32}\omega^2 + \kappa\tau\lambda.$$

Ἀλλ' ἡ τιμὴ τῆς $\chi$ πρέπει νὰ ἦναι ἡ αὐτὴ, εἴτε ἡ σειρὰ $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, κτλ. ἀρχίζει ἀπὸ $\alpha$ εἴτε ἀπὸ $\alpha'$· λοιπὸν θέλομεν ἔχει

$$\alpha\left(1 + \Pi\omega + K\omega^2 + \kappa\tau\lambda.\right) = \alpha'\left(1 + \Pi\omega' + K\omega'^2 + \kappa\tau\lambda\right)$$

Ἀντεισάγοντες εἰς ταύτην τὴν ἐξίσωσιν τὰς τιμὰς τῶν $\alpha'$ καὶ $\omega'$ διὰ $\alpha$ καὶ $\omega$ ἐκφραζομένας, καὶ συγκρίνοντες τοὺς ὁμοίους ὅρους εὑρίσκομεν $\Pi = \tfrac{1}{3}$, καὶ $K = -\frac{1}{15}$· λοιπὸν

$$\chi = \alpha\left(1 + \tfrac{1}{3}\omega - \frac{1}{15}\omega^2\right).$$

Ἐὰν ἡ πρώτη ἡμίσεια τῶν ψηφίων τῶν ἀκτίνων $\alpha$ καὶ $\beta$ ἦναι ἡ αὐτὴ καὶ εἰς τὰς δύο, δυνάμεθα νὰ ἀποῤῥίψωμεν τὸν ὅρον $\omega^2$, καὶ ἡ ἀνωτέρω τιμὴ ἀνάγεται εἰς $\chi = \alpha\left(1 + \tfrac{1}{3}\omega\right) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{3}$. Οὕτω κάμνοντες $\alpha = 1,1282657$, καὶ $\beta = 1,1286063$, συνάγομεν ἀμέσως $\chi = 1,1283792$.

Ἐὰν δὲ αἱ ἀκτῖνες συμφωνοῦν μόνον εἰς τὸ τρίτον μέρος τῶν ψηφίων των, πρέπει νὰ λάβωμεν τοὺς τρεῖς ὅρους τῆς ἀνωτέρω σειρᾶς: οὕτω κάμνοντες $\alpha = 1,1265639$ καὶ $\beta = 1,1320149$, εὑρίσκομεν $\chi = 1,1283791$.

Ἠμποροῦσαμεν νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι $\alpha$ καὶ $\beta$ συμφωνοῦν εἰς ἔτι ὀλιγώτερα ψηφία· ἀλλὰ τότε ἔπρεπε νὰ λογαριάσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ $\chi$ μὲ περσσοτέρους ὅρους.

Ἡ προσέγγισις τῆς ΙΔ' προτάσεως, ἥτις εἶναι τοῦ Ἰακώβου Γρηγορίου, ἐπιδέχεται παρομοίους ἐπιτομάς· περὶ τούτων παραπέμπομεν εἰς τὸ σύγγραμμα τούτου τοῦ συγγραφέως ἐπιγραφόμενον: *Vera circuli et hyperbolae quadratura* σύγγραμμα μεγάλης ἀξίας διὰ τὸν χρόνον καθ' ὃν ἐφάνη.

## ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Δ'.

### Ἔνθα ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον καὶ τὸ τετράγωνόν του, εἶναι ἄλογοι ἀριθμοί.

Ἂς θεωρήσωμεν τὴν ἄπειρον σειράν

$$1 + \frac{\alpha}{\omega} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^2}{\omega.\omega+1} + \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{\alpha^3}{\omega\cdot\omega+1\cdot\omega+2} + \kappa\tau\lambda.$$

τῆς ὁποίας ὁ γενικὸς ὅρος εἶναι $\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots\nu}\cdot\frac{\alpha^\nu}{\omega.\omega+1.\omega+2\ldots(\omega+\nu-1)}$ καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι $\varphi:\omega$ παριστάνει τὸ ἄθροισμά της. Ἐὰν ἀντὶ $\omega$ τεθῇ $\omega+1$, $\varphi:(\omega+1)$ παρομοίως θέλει εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς

$$1+\frac{\alpha}{\omega+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^2}{\omega+1.\omega+2}+\frac{1}{2\cdot3}\cdot\frac{\alpha^3}{\omega+1.\omega+2.\omega+3}+\text{κτλ.}$$

Ας ἀφαιρέσωμεν κάθε ὅρον τῆς δευτέρας σειρᾶς ἀπὸ κάθε ὅρον τῆς πρώτης, καὶ θέλομεν ἔχει $\varphi:\omega-\varphi:(\omega+1)$ διὰ τὸ ἄθροισμα τοῦ ὑπολοίπου τὸ ὁποῖον εἶναι

$$\frac{\alpha}{\omega.\omega+1}+\frac{\alpha^2}{\omega.\omega+1.\omega+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^3}{\omega.\omega+1.\omega+2.\omega+3}+\text{κτλ.}$$

Ἀλλὰ τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο ἠμπορεῖ νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{\alpha}{\omega.\omega+1}\cdot\left(1+\frac{\alpha}{\omega+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^2}{\omega+2\,\omega+3}+\text{κτλ.}\right),$$

καὶ τότε ἀνάγεται εἰς $\frac{\alpha}{\omega.\omega+1}\varphi:(\omega+2)$. Ἐν γένει λοιπὸν ἔχομεν

$$\varphi:\omega-\varphi:(\omega+1)=\frac{\alpha}{\omega.\omega+1}\varphi:(\omega+2)$$

Ας διαιρέσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην διὰ $\varphi:(\omega+1)$, καὶ, πρὸς ἁπλούστευσιν τοῦ ἐξαγομένου, ἔστω $\psi:\omega$ νέα λειτουργία τῆς $\omega$, τοιαύτη ὥστε $\psi\cdot\omega=\frac{\alpha}{\omega}\cdot\frac{\varphi:(\omega+1)}{\varphi:(\omega)}$. τότε ἀντὶ $\frac{\varphi:\omega}{\varphi:(\omega+1)}$ καὶ $\frac{\varphi:(\omega+2)}{\varphi:(\omega+1)}$ δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $\frac{\alpha}{\omega\psi:\omega}$, καὶ $\frac{(\omega+1)\,\psi:(\omega+1)}{\alpha}$. πράττοντες λοιπὸν τὴν τοιαύτην ἀντεισαγωγὴν εὑρίσκομεν

$$\psi:\omega=\frac{\alpha}{\omega+\psi:(\omega+1)},$$

Ἀλλὰ θέτοντες διαδοχικῶς εἰς ταύτην τὴν ἐξίσωσιν ἀντὶ $\omega$, $\omega+1$, $\omega+2$, κτλ, συνάγομεν

$$\psi:(\omega+1)=\frac{\alpha}{\omega+1+\psi:(\omega+2)},$$

$$\psi:(\omega+2)=\frac{\alpha}{\omega+2+\psi:(\omega+3)}\cdot\text{κτλ}$$

Η τιμὴ λοιπὸν τῆς λειτουργίας ψ:ω ἠμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τοῦ συνεχοῦς κλάσματος:

$$\psi:\omega = \cfrac{\alpha}{\omega + \cfrac{\alpha}{\omega+1 + \cfrac{\alpha}{\omega+2 + \text{κτλ.}}}}$$

Αντιστρόφως τὸ συνεχὲς τοῦτο κλάσμα ἐπ' ἄπειρον προεκτανθὲν ἔχει δι' ἄθροισμα ψ:ω, ἢ τὸ ἰσοδύναμον $\frac{\alpha}{\omega}\cdot\frac{\varphi:(\omega+1)}{\varphi:\omega}$, καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἀναπτυγμένον εἰς κοινὰς σειρὰς εἶναι

$$\frac{\alpha}{\omega}\cdot\frac{1+\frac{\alpha}{\omega+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^2}{\omega+1\,.\,\omega+2}+\text{κτλ.}}{1+\frac{\alpha}{\omega}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^2}{\omega\,.\,\omega+1}+\text{κτλ.}}$$

Εστω τώρα $\omega = \frac{1}{2}$, τὸ συνεχὲς κλάσμα ἀποβαίνει

$$\cfrac{2\alpha}{1 + \cfrac{4\alpha}{3 + \cfrac{4\alpha}{5 + \text{κτλ.}}}}$$

εἰς τὸ ὁποῖον οἱ ἀριθμηταί, ἐκτὸς τοῦ πρώτου, εἶναι ἴσοι μὲ 4α· οἱ παρονομασταὶ δὲ σχηματίζουν τὴν σειρὰν τῶν περιττῶν ἀριθμῶν 1, 3, 5, 7, κτλ. Η τιμὴ λοιπὸν τοῦ συνεχοῦς τούτου κλάσματος ἠμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ ἀκόμη καὶ διὰ

$$2\alpha\cdot\frac{1+\frac{4\alpha}{2\cdot3}+\frac{16\alpha^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{64\alpha^2}{2\cdot3\cdots7}+\text{κτλ.}}{1+\frac{4\alpha}{2}+\frac{16\alpha^2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{64\alpha^3}{2\cdot3\cdots6}+\text{κτλ.}}$$

Αλλ' αἱ σειραὶ αὗται ἀναφέρονται εἰς γνωστοὺς τύπους, καὶ γνωστὸν εἶναι ὅτι ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου ὁ ὑπερβολικὸς λογάριθμος εἶναι 1 παρασταθῇ διὰ ε, ἡ ἀνωτέρω ἔκφρασις ἀνάγεται εἰς

$$\frac{\varepsilon^{2\sqrt{\alpha}} - \varepsilon^{-2\sqrt{\alpha}}}{\varepsilon^{2\sqrt{\alpha}} + \varepsilon^{-2\sqrt{\alpha}}}\cdot\sqrt{\alpha}$$

εἰς τρόπον ὥστε ἔχομεν ἐν γένει

$$\frac{\varepsilon^{2\sqrt{\alpha}} - \varepsilon^{-2\sqrt{\alpha}}}{\varepsilon^{2\sqrt{\alpha}} + \varepsilon^{-2\sqrt{\alpha}}} \cdot 2\sqrt{\alpha} = \cfrac{4\alpha}{1 + \cfrac{4\alpha}{3 + \cfrac{4\alpha}{5 + \text{κτλ}}}}$$

Εντεῦθεν προκύπτουν δύο ἀρχικοὶ τύποι καθὼς α εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν. Εσω κατὰ πρῶτον $4\alpha = \chi^2$, θέλομεν ἔχει

$$\frac{\varepsilon^{\chi} - \varepsilon^{-\chi}}{\varepsilon^{\chi} + \varepsilon^{-\chi}} = \cfrac{\chi}{1 + \cfrac{\chi^2}{3 + \cfrac{\chi^2}{5 + \text{κτλ.}}}}$$

ἀκολούθως ἔσω $4\alpha = -\chi^2$. ἀντεισάγοντες ταύτην τὴν τιμὴν καὶ ἐνθυμούμενοι ὅτι $\frac{\varepsilon^{\chi\sqrt{-1}} - \varepsilon^{-\chi\sqrt{-1}}}{\varepsilon^{\chi\sqrt{-1}} + \varepsilon^{-\chi\sqrt{-1}}} = \sqrt{-1}.$ ἐφ. χ, εὑρίσκομεν

$$\text{ἐφ.}\ \chi = \cfrac{\chi}{1 - \cfrac{\chi^2}{3 - \cfrac{\chi^2}{5 - \cfrac{\chi^2}{7 - \text{κτλ.}}}}}$$

Οὗτος εἶναι ὁ τύπος ἐπὶ τοῦ ὁποίου θέλομεν θεμελιώσει τὴν ἀπόδειξίν μας. Αλλὰ πρέπει πρότερον νὰ ἀποδείξωμεν τὰ ἀκόλουθα δύο λήμματα.

**ΛΗΜΜΑ Α΄.** Εσω συνεχὲς κλάσμα ἐπ' ἄπειρον προεκτεινόμενον τὸ

$$\cfrac{\mu}{\nu + \cfrac{\mu'}{\nu' + \cfrac{\mu''}{\nu'' + \text{κτλ.}}}}$$

εἰς τὸ ὁποῖον $\mu$, $\nu$, $\mu'$, $\nu'$, κτλ. εἶναι ἀριθμοὶ ἀκέραιοι θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί· ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ὅλα τὰ συστατικὰ κλάσματα $\frac{\mu}{\nu}$, $\frac{\mu'}{\nu'}$, $\frac{\mu''}{\nu''}$, κτλ. εἶναι μικρότερα μονάδος, λέγω ὅτι ἡ ὅλη τιμὴ τοῦ συνεχοῦς κλάσματος εἶναι ἐξ ἀνάγκης ἄλογος ἀριθμός.

Λέγω, κατὰ πρῶτον, ὅτι ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι μικροτέρα μονάδος. Τῷ ὄντι, χωρὶς νὰ ἐλαττώσωμεν τὴν γενικότητα τοῦ συνεχοῦς κλάσματος, ἠμποροῦμεν νὰ ὑποθέσωμεν ὅλους τοὺς παρονομαστὰς $\nu$, $\nu'$, $\nu''$, κτλ. θετικούς. Εὰν τώρα λάβωμεν ἕνα μόνον ὅρον τῆς προτεθείσης σειρᾶς, θέλομεν ἔχει, ἐξ ὑποθέσεως, $\frac{\mu}{\nu} < 1$. Κἂν δὲ λάβωμεν τοὺς δύο πρώτους, ἐπειδὴ $\frac{\mu'}{\nu'} < 1$, φανερὸν εἶναι ὅτι $\nu + \frac{\mu'}{\nu'}$ εἶναι ποσότης μείζων τῆς $\nu - 1$: ἀλλ᾽ ὁ ἀριθμητὴς $\mu$ εἶναι μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ $\nu$· ἐπειδὴ δὲ καὶ οἱ δύο εἶναι ἀριθμοὶ ἀκέραιοι, ἕπεται ὅτι $\mu$ εἶναι ἀριθμὸς μικρότερος ἀκόμη καὶ ἀπὸ $\nu + \frac{\mu'}{\nu'}$. Η προκύπτουσα λοιπὸν τιμὴ ἀπὸ τοὺς δύο ὅρους

$$\frac{\mu}{\nu} + \frac{\mu'}{\nu'}$$

εἶναι μικροτέρα μονάδος. Ας λογαριάσωμεν τρεῖς ὅρους τοῦ προτεθέντος συνεχοῦς κλάσματος· καὶ ἐν πρώτοις, ὡς εἴδομεν, ἡ τιμὴ τοῦ μέρους

$$\frac{\mu'}{\nu'} + \frac{\mu''}{\nu''}$$

εἶναι μικροτέρα μονάδος. Ας καλέσωμεν τὴν τιμὴν ταύτην $\omega$· φανερὸν ὅτι $\frac{\mu}{\nu+\omega}$ εἶναι ἀκόμη μικρότερον μονάδος: ἡ προκύπτουσα λοιπὸν τιμὴ ἀπὸ τοὺς τρεῖς ὅρους

$$\frac{\mu}{\nu} + \frac{\mu'}{\nu'} + \frac{\mu''}{\nu''}$$

εἶναι μικροτέρα μονάδος. Εὰν ἀκολουθήσωμεν τὸν αὐτὸν συλλογισμὸν, θέλομεν ἴδει ὅτι, ὁποιοσδήποτε εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων τοῦ προτεθέντος συνεχοῦς κλάσματος τοὺς ὁποίους λογαριάζομεν, ἡ προκύτουσα τιμὴ εἶναι μικροτέρα μονάδος· καὶ ἐὰν λοιπὸν τὸ συνεχὲς κλάσμα ἐπ᾽ ἄπειρον προεκτανθῇ, ἡ τιμὴ του ἀκόμη θέλει εἶναι μικροτέρα μονάδος· τότε δὲ μόνον ἰσοῦται μὲ αὐτὴν ὅταν τὸ προτεθὲν συνεχὲς κλάσμα ἦναι τῆς μορφῆς

$$\frac{\mu}{\mu+1} - \frac{\mu'}{\mu'+1} - \frac{\mu''}{\mu''+1} - \text{κτλ}$$

εἰς κάθε ἄλλην περίστασιν εἶναι μικροτέρα.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν τὶς ἀρνῆται ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ προτεθέντος συνεχοῦς κλάσματος εἶναι ἴση μὲ ἄλογον ἀριθμὸν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἰσοῦται μὲ λογικὸν, καὶ ἔσω ὁ ἀριθμὸς οὗτος $\frac{B}{A}$, ἔνθα B καὶ A εἶναι ὁποιοιδήποτε ἀκέραιοι ἀριθμοί· θέλομεν ἔχει λοιπὸν

$$\frac{B}{A} = \cfrac{\mu}{\nu + \cfrac{\mu'}{\nu' + \cfrac{\mu''}{\nu'' + \text{κτλ.}}}}$$

Ἔςωσαν Γ, Δ, Ε, κτλ. ἀπροσδιόριςοι ἀριθμοὶ τοιοῦτοι ὥςε

$$\frac{\Gamma}{B} = \cfrac{\mu'}{\nu' + \cfrac{\mu''}{\nu'' + \cfrac{\mu'''}{\nu''' + \text{κτλ.}}}}$$

$$\frac{\Delta}{\Gamma} = \cfrac{\mu''}{\nu'' + \cfrac{\mu'''}{\nu''' + \cfrac{\mu^{IV}}{\nu^{IV} + \text{κτλ.}}}}$$

καὶ οὕτως ἐπ' ἄπειρον. Ἐπειδὴ τὰ διάφορα ταῦτα συνεχῆ κλάσματα ἔχουν ὅλους τοὺς ὅρους των μικροτέρους μονάδος, ἀκολουθεῖ ὅτι αἱ τιμαί των ἢ τὰ ἀθροίσματα $\frac{B}{A}$, $\frac{\Gamma}{B}$, $\frac{\Delta}{\Gamma}$, $\frac{E}{\Delta}$, κτλ. κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα, πρέπει νὰ ἦναι μικρότεραι μονάδος, καὶ οὕτω θέλομεν ἔχει $B < A$, $\Gamma < B$, $\Delta < \Gamma$, κτλ. ἐκ τοῦ ὁποίου βλέπομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ A, B, Γ, Δ κτλ. συγκροτοῦν μίαν ἐπ' ἄπειρον φθίνουσαν σειράν. Ἀλλ' ἡ ἄλυσις τῶν συνεχῶν κλασμάτων δίδει τὰς ἐξισώσεις

$$\frac{B}{A} = \cfrac{\mu}{\nu + \cfrac{\Gamma}{B}} \text{ ἐκ τῆς ὁποίας } \Gamma = \mu A - \nu B,$$

$$\frac{\Gamma}{B} = \cfrac{\mu'}{\nu' + \cfrac{\Delta}{\Gamma}} \text{ ἐκ τῆς ὁποίας } \Delta = \mu' B - \nu' \Gamma,$$

$$\frac{\Delta}{\Gamma} = \cfrac{\mu''}{\nu'' + \cfrac{E}{\Delta}} \text{ ἐκ τῆς ὁποίας } E = \mu'' \Gamma - \nu'' \Delta,$$

Ἐπειδὴ δὲ οἱ δύο πρῶτοι ἀριθμοὶ A καὶ B εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ἀκέραιοι, ἕπεται ὅτι καὶ ὅλοι οἱ ἄλλοι Γ, Δ, Ε, κτλ. οἱ ὁποῖοι ἕως τώρα ἦσαν ἀπροσδιόριςοι, εἶναι ὁμοίως ἀκέραιοι. Τώρα τὸ ἕως τώρα ἦσαν ... τὸ νὰ ἦναι μία σειρὰ A, B, Γ, Δ, Ε κτλ. ἐνταυτῷ φθίνουσα καὶ σύνθετος ἀπὸ ἀκεραίους ἀριθμοὺς, περικλείει ἀντίφασιν· διότι περιπλέον οὐδεὶς τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, κτλ. ἠμπορεῖ νὰ ἦναι μηδὲν, ἐπειδὴ τὸ προτεθὲν συνεχὲς κλάσμα ἐκτείνεται ἐπ' ἄπειρον, καὶ οὕτω τὰ παριςανόμενα ἀθροίσματα ἀπὸ $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$, $\frac{\Gamma}{\mathrm{B}}$, $\frac{\Delta}{\Gamma}$, κτλ, πρέπει πάντοτε νὰ ἦναι κάτι τί. Η ὑπόθεσις λοιπὸν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦ προτεθέντος συνεχοῦς κλάσματος ἰσοῦται μὲ λογικὴν ποσότητα $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$ εἶναι ἀσύςατος· ἐξ ἀνάγκης λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ἄλογος ἀριθμός.

ΛΗΜΜΑ Β΄. Τῶν αὐτῶν κειμένων, ἐὰν τὰ συςατικὰ κλάσματα $\frac{\mu}{\nu}$, $\frac{\mu'}{\nu'}$, $\frac{\mu''}{\nu''}$, κτλ. εἰς μὲν τὴν ἀρχὴν τῆς σειρᾶς ἦναι ὁποιουδήποτε μεγέθους· ὕςερον δὲ ἀπὸ κάποιον διάςημα ἰσοῦνται ςαθερῶς μὲ ποσότητας μικροτέρας μονάδος· λέγω ὅτι τὸ προτεθὲν συνεχὲς κλάσμα, ἐὰν ὑποτεθῇ πάντοτε ὅτι ἐκτείνεται ἐπ' ἄπειρον, ἔχει ἄλογον τιμήν.

Διότι ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ὅλα τὰ κλάσματα τὰ ὁποῖα ἕπονται μετὰ τὸ $\frac{\mu''}{\nu'}$ δηλαδὴ τὰ $\frac{\mu'''}{\nu'''}$, $\frac{\mu^{\mathrm{IV}}}{\nu^{\mathrm{IV}}}$, $\frac{\mu^{\mathrm{V}}}{\nu^{\mathrm{V}}}$ κτλ ἐπ' ἄπειρον, εἶναι μικρότερα μονάδος· τότε, κατὰ τὸ Α΄ Λῆμμα, τὸ συνεχὲς κλάσμα.

$$\cfrac{\mu'''}{\nu''' + \cfrac{\mu^{\mathrm{IV}}}{\nu^{\mathrm{IV}} + \cfrac{\mu^{\mathrm{V}}}{\nu^{\mathrm{V}} + \text{κτλ}}}}$$

ἔχει ἄλογον τιμήν. Ας καλέσωμεν τὴν τιμὴν ταύτην ω καὶ τὸ προτεθὲν συνεχὲς κλάσμα ἀποβαίνει

$$\cfrac{\mu}{\nu + \cfrac{\mu'}{\nu' + \cfrac{\mu''}{\nu'' + \omega}}}$$

Αλλ' ἐὰν κάμωμεν διαδοχικῶς

$\frac{\mu''}{\nu''+\omega} = \omega'$, $\frac{\mu'}{\nu'+\omega'} = \omega''$, $\frac{\mu}{\nu+\omega''} = \omega'''$, φανερὸν ὅτι ἐπειδὴ ω εἶναι ποσότης ἄλογος, ὅλαι αἱ ποσότητες $\omega'$, $\omega''$, $\omega'''$, πρέπει παρομοίως νὰ ἦναι τοιαῦται. Τώρα ἡ τελευταία $\omega'''$, ἰσοῦται μὲ τὸ προτεθὲν συνεχὲς κλάσμα· ἡ τιμὴ λοιπὸν τούτου εἶναι ποσότης ἄλογος.

Μετὰ τὴν στερέωσιν τῶν δύο τούτων λημμάτων ἠμποροῦμεν, διὰ να ἐπανέλθωμεν ἐπὶ τὸ προκείμενον, νὰ ἀποδείξωμεν τὴν γενικὴν ταύτην πρότασιν.

## ΘΕΩΡΗΜΑ.

Η ἐφαπτομένη τόξου συμμετρικοῦ μὲ τὴν ἀκτῖνα εἶναι ἀσύμμετρος μὲ τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα.

Τῷ ὄντι, ἔςω ἡ ἀκτὶς $=1$, καὶ τὸ τόξον $\chi = \frac{\mu}{\nu}$, ἔνθα $\mu$ καὶ $\nu$ εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί· ἐὰν εἰς τὸν ἀνωτέρω εὑρεθέντα τύπον ἀντὶ $\chi$ ἀντεισάξωμεν $\frac{\mu}{\nu}$, εὑρίσκομεν,

$$\text{ἐφ.}\ \frac{\mu}{\nu} = \cfrac{\mu}{\nu - \cfrac{\mu^2}{3\nu - \cfrac{\mu^2}{5\nu - \cfrac{\mu^2}{7\nu - \text{κτλ.}}}}}$$

Τώρα ἐπειδὴ οἱ παρονομασταὶ τοῦ συνεχοῦς τούτου κλάσματος $3\nu$, $5\nu$, $7\nu$ κτλ. ἀδιακόπως αὐξάνουν, ὁ δὲ ἀριθμητὴς $\mu^2$ μένει τοῦ αὐτοῦ μεγέθους, ἀκολουθεῖ ὅτι τὰ συςατικὰ κλάσματα εἶναι ἤθελουν γένει μικρότερα μονάδος· λοιπὸν κατὰ τὸ Β΄ λῆμμα ἡ τιμὴ τοῦ συνεχοῦς τούτου κλάσματος δηλαδὴ ἐφ. $\frac{\mu}{\nu}$ εἶναι ποσότης ἄλογος. ὅθεν ἡ ἐφαπτομένη τόξου συμμετρικοῦ μὲ τὴν ἀκτῖνα, εἶναι ἀσύμμετρος μὲ τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα.

Εντεῦθεν προκύπτει, ὡς ἄμεσος συνέπεια, ἡ πρότασις ἥτις εἶναι τὸ ἀντικείμενον ταύτης τῆς σημειώσεως. Εςω $\pi$ ἡ ἡμιπεριφέρεια τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι $1$· ἐὰν $\pi$ ἦτον ποσότης λογική, $\frac{\pi}{4}$ ἤθελεν εἶναι παρομοίως ποσότης λογική, καὶ ἑπομένως ἡ ἐφαπτομένη του ἤθελεν εἶναι ποσότης ἄλογος· ἀλλ' ἐξ ἐναντίας ἠξεύρομεν ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου $\frac{\pi}{4}$ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα· λοιπὸν $\pi$ δὲν δύναται νὰ ἦναι λογικὴ ποσότης. Ο λόγος λοιπὸν τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶναι ἄλογος ἀριθμός. (1)

Πιθανὸν ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\pi$ οὔτε εἶναι ἐκ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀλόγων ποσοτήτων, τοῦτ' ἔςιν ὅτι δὲν δύναται νὰ ἦναι ἡ ῥίζα

---

(1) Η πρότασις αὕτη ἀπεδείχθη πρώτην φορὰν ἀπὸ τὸν Λαμβέρτον, εἰς τὰ ὑπομνήματα τοῦ Βερολίνου, ἐν ἔτει 1761. Ο. Σ.

μιᾶς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως πεπερασμένου ἀριθμοῦ ὅρων τῆς ὁποίας οἱ συντελεσταὶ εἶναι λογικοὶ ἀριθμοί: ἀλλ' ἡ ἀκριβὴς ἀπόδειξις ταύτης τῆς προτάσεως φαίνεται δυσκολωτάτη τοῦτο μόνον δυνάμεθα νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ π εἶναι ἐπίσης ἄλογος ἀριθμός.

Τῷ ὄντι ἐὰν εἰς τὸ συνεχὲς κλάσμα τὸ ἐκφράζον τὴν τιμὴν τῆς ἐφ. χ γένῃ $\chi = \pi$, ἐξ ἀφορμῆς ὅτι ἐφ. $\pi = 0$, πρέπει νὰ ἦναι

$$0 = 3 - \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \cfrac{\pi^2}{9 - \text{κτλ.}}}}$$

Ἀλλ' ἐὰν $\pi^2$ ἦτον λογικὴ ποσότης, καὶ ἰσοῦτο μὲ $\frac{\mu}{\nu}$, ὄντων $\mu$ καὶ $\nu$ ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἤθελε προκύψει

$$3 = \cfrac{\mu}{5\nu - \cfrac{\mu}{7\nu - \cfrac{\mu}{9\nu - \text{κτλ}}}}$$

Τώρα φανερὸν εἶναι ὅτι εἰς τὸ συνεχὲς τοῦτο κλάσμα ὑπάρχουν τὰ ὑποτιθέμενα ἀπὸ τὸ Β' λῆμμα· λοιπὸν ἡ τιμή του εἶναι ἄλογος, καὶ δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν 3. Ὅθεν τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, εἶναι ἄλογος ἀριθμός.

## ΣΗΜΕΙΣΙΣ Ε'.

### Ἐνθα δίδεται ἡ ἀναλυτικὴ λύσις διαφόρων προβλημάτων ἀφορώντων τὸ τρίγωνον, τὸ ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον, τὸ παραλληλεπίπεδον καὶ τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα.

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΡΩΤΟΝ.

Δοθεισῶν τῶν τριῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνειά του, ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου.

Ἐστωσαν (σχ. 126) αἱ πλευραὶ $\mathrm{B\Gamma} = \alpha$, $\mathrm{A\Gamma} = \beta$, $\mathrm{AB} = \gamma$· ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α κατεβάσωμεν τὴν κάθετον ΑΔ ἐπὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΒΓ, θέλομεν ἔχει (12, 3) $\overline{\mathrm{A\Gamma}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{B\Gamma}}^2 - 2\mathrm{B\Gamma} \times \mathrm{B\Delta}$· λοιπὸν $\mathrm{B\Delta} = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha}$. Ἡ τιμὴ αὕτη δίδει $\overline{\mathrm{AB}}^2 - \overline{\mathrm{B\Delta}}^2$ ἢ $\overline{\mathrm{A\Delta}}^2 =$
$$\gamma^2 - \left(\frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha}\right)^2 = \frac{4\alpha^2\gamma^2 - (\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)^2}{4\alpha^2}.$$
λοιπὸν

$A\Delta = \frac{\sqrt{[4\alpha^2\gamma^2-(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^2]}}{2\alpha}$. Εςω Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου· γνωςὸν εἶναι ὅτι $E = \frac{1}{2} B\Gamma \times A\Delta$· λοιπὸν $E = \frac{1}{4}\sqrt{[4\alpha^2\gamma^2-(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^2]} = \frac{1}{4}\sqrt{(2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4)}$. Ο τύπος οὗτος ἠμπορεῖ νὰ τεθῇ ὑπὸ ἄλλην μορφὴν ἐπιτηδειοτέραν διὰ τὸν λογαριθμικὸν ὑπολογισμόν· πρὸς τοῦτο παρατηρητέον ὅτι ἡ ποσότης $4\alpha^2\gamma^2-(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^2$ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο παραγόντων $2\alpha\gamma+(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)$ καὶ $2\alpha\gamma-(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)$· ὁ πρῶτος $=(\alpha+\gamma)^2-\beta^2=(\alpha+\gamma+\beta)(\alpha+\gamma-\beta)$· ὁ δεύτερος $=\beta^2-(\alpha-\gamma)^2=(\beta+\alpha-\gamma)(\beta-\alpha+\gamma)$· λοιπὸν θέλομεν ἔχει

$$E=\frac{1}{4}\sqrt{[(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)(\beta+\gamma-\alpha)]}$$

Ἐὰν τέλος κάμωμεν $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\pi$, καὶ τοῦτο δίδει $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$, $\alpha+\beta-\gamma=2\pi-2\gamma$, $\alpha+\gamma-\beta=2\pi-2\beta$, $\beta+\gamma-\alpha=2\pi-2\alpha$, θέλομεν ἔχει ἔτι ἁπλουςέραν ἔκφρασιν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου τὴν

$$E=\sqrt{(\pi.\pi-\alpha.\pi-\beta.\pi-\gamma)}$$

Οθεν βλέπομεν ὅτι γνωρίζοντες τὰς τρεῖς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδόν του, πρέπει ἀπὸ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν πλευρῶν του νὰ ἀφαιρέσωμεν ἑκάςην τῶν ἰδίων πλευρῶν, καὶ ἀφ' οὗ πολλαπλασιάσωμεν τὰ τρία συναγόμενα ὑπόλοιπα μεταξύ των καὶ μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν πλευρῶν, νὰ ἐξάξωμεν τέλος τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου: ἡ τετραγωνικὴ αὕτη ῥίζα θέλει εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

Εςω τώρα ω ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον κύκλου, καὶ φ ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ αὐτὸ τρίγωνον· κατὰ τὴν λβ' πρότασιν τοῦ Γ' βιβλίου, ἔχομεν $\omega = \frac{\frac{1}{4}\alpha\beta\gamma}{E}$, καὶ $\varphi = \frac{2E}{\alpha+\beta+\gamma} = \frac{E}{\pi}$. ἀντεισάγοντες λοιπὸν τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τῆς Ε, εὑρίσκομεν

$$\omega = \frac{\frac{1}{4}\alpha\beta\gamma}{\sqrt{(\pi.\pi-\alpha.\pi-\beta.\pi-\gamma)}},\ \varphi=\sqrt{\left(\frac{\pi-\alpha.\pi-\beta.\pi-\gamma}{\pi}\right)},$$

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

Δοθεισῶν τῶν τεσσάρων πλευρῶν ἑνὸς ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τετραπλεύρου καὶ αἱ γωνίαι του.

Εςωσαν (σχ. 135) αἱ δοθεῖσαι πλευραὶ $AB=\alpha$, $B\Gamma=\beta$, $\Gamma\Delta=\gamma$, $A\Delta=\delta$, καὶ αἱ ἄγνωςοι διαγώνιοι $A\Gamma=\chi$, $B\Delta=\psi$· κατὰ τὴν 33 πρότασιν τοῦ Γ' βιβλίου ἔχομεν τὰς δύο ἐξισώσεις $\chi\psi = \alpha\gamma + \beta\delta$ καὶ $\frac{\chi}{\psi} = \frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\alpha\beta+\gamma\delta}$· ἐκ τῶν ὁποίων

$$\chi = \sqrt{\left(\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)\,(\alpha\delta+\gamma\beta)}{\alpha\beta+\gamma\delta}\right)},\quad \psi = \sqrt{\left(\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)\,(\alpha\beta+\gamma\delta)}{\alpha\delta+\beta\gamma}\right)}$$

Ἀλλά, κατὰ τὸ προλαβὸν πρόβλημα, ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι $\alpha, \beta, \chi$: ἠμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τοῦ τύπου $\omega = \frac{\alpha\beta\chi}{\sqrt{[4\alpha^2\beta^2 - (\alpha^2+\beta^2-\chi^2)^2]}}$ ἀντεισάγοντες ἀντὶ $\chi$ τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν καὶ ἀναλύοντες τὸ ἐξαγόμενον εἰς παράγοντας, εὑρίσκομεν

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)\,(\alpha\delta+\beta\gamma)\,(\alpha\beta+\gamma\delta)}{(\alpha+\beta+\gamma-\delta)(\alpha+\beta+\delta-\gamma)(\alpha+\gamma+\delta-\beta)(\beta+\gamma+\delta-\alpha)}\right)}$$

Τούτου τεθέντος, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $\text{ΑΒΓ} = \frac{\frac{1}{2}\alpha\beta\chi}{\omega}$, τὸ τοῦ τριγώνου $\text{ΑΔΓ} = \frac{\frac{1}{2}\gamma\delta\chi}{\omega}$· λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου $\text{ΑΒΓΔ} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(\alpha\beta+\gamma\delta)\chi}{\omega} = \frac{1}{4}\sqrt{[(\alpha+\beta+\gamma-\delta)\,(\alpha+\beta+\delta-\gamma)\,(\alpha+\gamma+\delta-\beta)\,(\beta+\gamma+\delta-\alpha)]}$. Καὶ ἐάν, συντομίας χάριν, κάμωμεν, $\pi = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$ θέλομεν ἔχει τὸ ἐμβαδὸν $\text{ΑΒΓΔ} = \sqrt{(\pi-\alpha.\pi-\beta.\pi-\gamma.\pi-\delta)}$. Τέλος διὰ νὰ εὕρωμεν μίαν τῶν γωνιῶν, φερ' εἰπεῖν, τὴν Β, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ δίδει $\text{συν}\,B = \frac{\alpha^2+\beta^2-\chi^2}{2\alpha\beta}$· ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν τῆς $\chi$ καὶ ἀνάγοντες, εὑρίσκομεν $\text{συν}B = \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{2\alpha\beta+2\gamma\delta}$. Ἐντεῦθεν $\frac{1-\text{συν}\,B}{1+\text{συν}\,B}$, ἢ $\text{ἐφ}^2.\frac{1}{2}B = \frac{(\gamma+\delta)^2-(\alpha-\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2-(\gamma-\delta)^2} = \frac{(\alpha+\gamma+\delta-\beta)(\beta+\gamma+\delta-\alpha)}{(\alpha+\beta+\gamma-\delta)(\alpha+\beta+\delta-\gamma)}$. Λοιπὸν

$$\text{ἐφ}.\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\left(\frac{\pi-\alpha.\pi-\beta}{\pi-\gamma.\pi-\delta}\right)}$$

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

Δοθεισῶν εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΔΓ τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ὀρθαί, τῶν δύο πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ μετὰ τῆς περιεχομένης γωνίας ΒΑΓ, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ καὶ ἡ διαγώνιος ΑΔ. σχ. 277.

Ἔςω ΑΓ=β, ΑΒ=γ, καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ=Α. Ἐὰν προεκβληθῶσιν αἱ ΒΔ, ΑΓ ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν κατὰ τὸ Ε, τὸ τρίγωνον ΒΑΕ εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἐν Β γωνία εἶναι ὀρθὴ, καὶ εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι γνωςὴ ἡ γωνία ΒΑΕ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ, θέλει δώσει $ΑΕ = \frac{γ}{συν\ Α}$, λοιπὸν $ΓΕ = \frac{γ}{συν\ Α} - β$. Μετὰ ταῦτα τὸ ὀρθογώνιον εἰς Γ τρίγωνον ΔΓΕ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι γνωςὴ ἡ πλευρὰ ΓΕ καὶ ἡ γωνία ΓΔΕ=Α, δίδει $ΓΔ = ΓΕ\ σφ\ Α = \frac{γ - β συν Α}{ημ\ Α}$. παρομοίως λοιπὸν $ΒΔ = \frac{β - γ\ συν\ Α}{ημ\ Α}$· αὗται εἶναι αἱ τιμαὶ τῶν δύο ζητουμένων πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου.

Ἐντεῦθεν προκύπτει ἡ διαγώνιος $ΑΔ = \sqrt{(\overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΑΓ}^2)} = \sqrt{\left(β^2 + \left(\frac{γ - β συν\ Α}{ημ\ Α}\right)^2\right)} = \frac{\sqrt{(β^2+γ^2-2βγ\ συνΑ)}}{ημ\ Α}$. Ἀλλ' ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΒΑΓ ἔχομεν $ΒΓ = \sqrt{(β^2+γ^2-2βγ\ συν\ Α)}$. Ἡ διαγώνιος λοιπὸν ΑΔ ἥτις ἑνόνει τὰς δύο πλαγίας γωνίας λόγον ἔχει πρὸς τὴν διαγώνιον ΒΓ ἥτις ἑνόνει τὰς δύο ὀρθὰς ὃν ἡ μονὰς πρὸς ἡμ Α.

Σχόλιον. Ἡ διαγώνιος ΑΔ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἡ διάμετρος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸν τετράπλευρον ΑΒΔΓ.

Εἰς τὸν κύκλον τοῦτον ἡ γωνία ΑΒΓ = ΑΔΓ· ἐὰν λοιπὸν ἐπὶ τῆς ΑΒ κατεβασθῇ ἡ κάθετος ΓΖ, τὰ τρίγωνα ΒΖΓ, ΑΔΓ θέλουν εἶναι ὅμοια καὶ διὰ τοῦτο ΑΔ : ΒΓ :: ΑΓ : ΖΓ :: 1 : ἡμ Α· ἐξαγόμενον σύμφωνον μὲ τὸ προλαβόν.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

Δοθεισῶν τῶν τριῶν κόψεων ἑνὸς παραλληλεπιπέδου μετὰ τῶν γωνιῶν τὰς ὁποίας κάμνουν μεταξύ των, νὰ εὑρεθῇ ἡ ςερεότης τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Ἔςωσαν (σχ. 278) αἱ κόψεις ΣΑ=ζ, ΣΒ=η, ΣΓ=θ, καὶ αἱ περιεχόμεναι γωνίαι ΑΣΒ=γ, ΑΣΓ=β, ΒΣΓ=α. Ἀπὸ τὴν ςιγμὴν Γ ἂς κατεβασθῇ ἡ ΓΟ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΣΒ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΣΟ· τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΣΟ δίδει ΓΟ = ΓΣ ἡμ ΓΣΟ = θ ἡμ ΓΣΟ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραλληλογράμμου ΑΣΒΗ = ζη ἡμ γ, ἕπεται ὅτι ἐὰν καλέσωμεν Σ τὴν ςερεότητα τοῦ παραλληλεπιπέδου ΣΤ, θέλομεν ἔχει Σ = ζηθ ἡμ γ ἡμ ΓΣΟ. Μένει νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμ ΓΣΟ.

Πρὸς τοῦτο, ἐκ τῆς ςιγμῆς Σ ὡς ἐκ κέντρου μὲ ἀκτῖνα = 1 ἂς γραφθῇ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια ἥτις συναπαντᾷ εἰς Α, Ε, Ζ, Η τὰς εὐθείας ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, ΣΟ· ἐὰν ἀνὰ δύο ἑνωθῶσιν αἱ ςιγμαὶ Δ, Ε, Ζ διὰ τόξων μεγίςων κύκλων, θέλει σχηματισθῇ τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΔΕΖ, εἰς τὸ ὁποῖον τὸ τόξον ΖΗ εἶναι κάθετον ἐπὶ ΕΔ, ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον ΓΣΟ εἶναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ΑΣΒ. Τώρα τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, εἰς τὸ ὁποῖον ἔχομεν τὰς τρεῖς πλευρὰς ΔΕ $=\gamma$, ΔΖ $=\beta$, ΕΖ $=\alpha$, δίδει συν Ε $=\dfrac{\text{συν}\,\beta-\text{συν}\,\alpha\,\text{συν}\,\gamma}{\text{ἡμ}\,\alpha\,\text{ἡμ}\,\gamma}$,

καὶ ἡμ Ε $=\dfrac{\sqrt{(1-\text{συν}^2\alpha-\text{συν}^2\beta-\text{συν}^2\gamma+2\,\text{συν}\,\alpha\,\text{συν}\,\gamma\,\text{συν}\,\gamma)}}{\text{ἡμ}\,\alpha\,\text{ἡμ}\,\gamma}$.

Ἀκολούθως τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΕΖΗ δίδει ἡμ ΗΖ ἢ ἡμ ΓΣΟ $=$ ἡμ Ε ἡμ ΕΖ $=$ ἡμ α ἡμ Ε· λοιπὸν Σ $=\zeta\kappa\theta$ ἡμ α ἡμ γ ἡμ Ε ἢ Σ $=\zeta\kappa\theta\sqrt{(1-\text{συν}^2\alpha-\text{συν}^2\beta-\text{συν}^2\gamma+2\,\text{συν}\,\alpha\,\text{συν}\,\beta\,\text{συν}\,\gamma)}$,

Εἰς τὴν ἔκφρασιν ταύτην ἡ ὑπόῤῥιζος ποσότης εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο παραγόντων ἡμ α ἡμ γ $+$ συνβ$-$συνασυν γ καὶ ἡμ α ἡμ γ$-$συν β $+$ συν α συν γ· ὁ πρῶτος $=$ συν β $-$ συν $(\alpha+\gamma)$ $=$ 2ἡμ $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ ἡμ $\dfrac{\alpha+\gamma-\beta}{2}$, ὁ δεύτερος $=$ συν $(\alpha-\gamma)$ $-$ συν β $=$ 2ἡμ $\dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$ ἡμ $\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$. Λοιπὸν ἡ ζητουμένη ςερεότης Σ $=$

$$2\zeta\kappa\theta\sqrt{\left(\text{ἡμ}\,\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\,\text{ἡμ}\,\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\,\text{ἡμ}\,\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\,\text{ἡμ}\,\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right)}.$$

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'.

Ἐχοντες τὰς αὐτὰ δοθέντα μὲ τὰ τοῦ προλαβόντος προβλήματος, νὰ εὕρωμεν τὴν ἔκφρασιν τῆς διαγωνίου ἥτις ἑνόνει δύο ἀπέναντι κορυφάς.

Ἐςω (σχ. 278) ἡ διαγώνιος τῆς βάσεως ΣΠ$=\omega$ καὶ ἡ ζητουμένη διαγώνιος ΣΤ$=\psi$· τὸ τρίγωνον ΑΣΠ εἰς τὸ ὁποῖον συν ΣΑΠ$=-$ συν γ, δίδει $\omega^2=\zeta^2+\eta^2+2\zeta\eta$ συν γ· παρομοίως τὸ τρίγωνον ΤΣΠ εἰς τὸ ὁποῖον συν ΤΠΣ $=-$ συν ΓΣΠ, δίδει $\psi^2=\omega^2+2\theta\omega$ συν ΓΣΠ. Πρόκειται τώρα νὰ εὕρωμεν τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας ΓΣΠ ἢ τοῦ τόξου ΖΘ: τώρα εἰς τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΕΖΘ ἔχομεν, συν ΖΘ $=$ συν ΕΖ συν ΕΘ$+$ἡμ ΕΖ ἡμ ΕΘ συν Ε· ἀντεισάγοντες τὰς τιμὰς ΕΖ $=\alpha$, καὶ συν Ε $=\dfrac{\text{συν}\beta-\text{συνασυνγ}}{\text{ἡμ}\,\alpha\,\text{ἡμ}\,\gamma}$,

εὑρίσκομεν συν ΖΘ $=$ συνα συν ΕΘ$+\dfrac{\text{ἡμ ΕΘ}}{\text{ἡμ}\,\gamma}$(συν β $-$ συν α συν γ)$=$

$\dfrac{\text{ἡμ ΕΘ συν}\,\beta}{\text{ἡμ}\,\gamma}+\dfrac{\text{ἡμ}\,(\gamma-\text{ΕΘ})\,\text{συνα}}{\text{ἡμ}\,\gamma}=\dfrac{\text{ἡμΕΘσυνβ}+\text{ἡμΔΘσυνα}}{\text{ἡμ}\,\gamma}$. Λοιπὸν

2θω συν ΖΘ, ἢ $2\theta\omega\,\text{συν}\,\Gamma\Sigma\Pi = 2\theta\,\text{συν}\,\beta \cdot \dfrac{\omega\,\text{ἠμ}\,E\Theta}{\text{ἠμ}\,\gamma} + 2\theta\,\text{συν}\,\alpha \cdot \dfrac{\omega\,\text{ἠμ}\,\Delta\Theta}{\text{ἠμ}\,\gamma}$,

Ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον ΒΣΠ ἔχομεν $B\Pi = \dfrac{\Sigma\Pi\,\text{ἠμ}\,B\Sigma\Pi}{\text{ἠμ}\,\Sigma B\Pi}$ καὶ $B\Sigma = \dfrac{\Sigma\Pi\,\text{ἠμ}\,B\Pi\Sigma}{\text{ἠμ}\,\Sigma B\Pi}$· ἐπειδὴ δὲ $B\Pi = \Sigma A = \zeta$, $\Sigma\Pi = \omega$, ἠμ $\Sigma B\Pi =$ ἠμ $\gamma$, ἠμ $B\Sigma\Pi =$ ἠμ $E\Theta$, καὶ $B\Sigma = \eta$, ἠμ $B\Pi\Sigma =$ ἠμ $\Delta\Theta$· διὰ τοῦτο $\dfrac{\omega\,\text{ἠμ}\,E\Theta}{\text{ἠμ}\,\gamma} = \zeta$ καὶ $\dfrac{\omega\,\text{ἠμ}\,\Delta\Theta}{\text{ἠμ}\,\gamma} = \eta$. Λοιπὸν $2\theta\omega\,\text{συν}\,\Gamma\Sigma\Pi = 2\zeta\theta\,\text{συν}\,\beta + 2\eta\theta\,\text{συν}\,\alpha$. Λοιπὸν τέλος τὸ τετράγωνον τῆς ζητουμένης διαγωνίου: $\psi^2 = \zeta^2 + \eta^2 + \theta^2 + 2\zeta\eta\,\text{συν}\,\gamma + 2\zeta\theta\,\text{συν}\,\beta + 2\eta\theta\,\text{συν}\,\alpha$.

**Πόρισμα.** Η στερεὰ γωνία Α σχηματίζεται ἀπὸ τὰς κόψεις ζ, η, θ, αἵτινες κάμνουν ἀναμεταξύ των ἀνὰ δύο τὰς γωνίας $200^\circ - \gamma$, $200^\circ - \beta$, α· ἐπομένως ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα τοῦ συν γ καὶ συν β εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ $\overline{\Sigma E}^2$ διὰ νὰ ἔχωμεν τὴν τοῦ $\overline{AM}^2$· πράττοντες τὸ αὐτὸ διὰ τὰς ἄλλας δύο διαγωνίους εὑρίσκομεν τὰς ἀκολούθους τιμὰς τῶν τετραγώνων των.

$$\overline{\Sigma T}^2 = \zeta^2 + \eta^2 + \theta^2 + 2\zeta\eta\,\text{συν}\,\gamma + 2\zeta\theta\,\text{συν}\,\beta + 2\eta\theta\,\text{συν}\,\alpha$$

$$\overline{AM}^2 = \zeta^2 + \eta^2 + \theta^2 - 2\zeta\eta\,\text{συν}\,\gamma - 2\zeta\theta\,\text{συν}\,\beta + 2\eta\theta\,\text{συν}\,\alpha$$

$$\overline{BN}^2 = \zeta^2 + \eta^2 + \theta^2 - 2\zeta\eta\,\text{συν}\,\gamma + 2\zeta\theta\,\text{συν}\,\beta - 2\eta\theta\,\text{συν}\,\alpha$$

$$\overline{\Gamma\Pi}^2 = \zeta^2 + \eta^2 + \theta^2 + 2\zeta\eta\,\text{συν}\,\gamma - 2\zeta\theta\,\text{συν}\,\beta - 2\eta\theta\,\text{συν}\,\alpha$$

Ἐντεῦθεν διὰ τῆς προσθέσεως συνάγομεν $\overline{\Sigma T}^2 + \overline{AM}^2 + \overline{BN}^2 + \overline{\Gamma\Pi}^2 = 4\zeta^2 + 4\eta^2 + 4\theta^2$. Εἰς κάθε λοιπὸν παραλληλεπίπεδον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων διαγωνίων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δώδεκα κόψεων. Τὸ ἀξιοσημείωτον τοῦτο θεώρημα εἶναι ἀνάλογον μὲ ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔχει χώραν εἰς τὸ παραλληλόγραμμον (14, 3, πορ.), καὶ ἠμπορεῖ νὰ συναχθῇ ἀπὸ τοῦτο τὸ τελευταῖον. Διότι τὰ παραλληλόγραμμα ΣΓΤΠ, ΑΒΜΝ, δίδουν

$$\overline{\Sigma T}^2 + \overline{\Gamma\Pi}^2 = 2\overline{\Sigma\Gamma}^2 + 2\overline{\Sigma\Pi}^2$$

$$\overline{AM}^2 + \overline{BN}^2 = 2\overline{BM}^2 + 2\overline{AB}^2$$

Προσθέτοντες τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις καὶ παρατηροῦντες ὅτι $\overline{\Sigma\Gamma}^2 = \overline{BM}^2$ καὶ $\overline{\Sigma\Pi}^2 + \overline{AB}^2 = 2\overline{\Sigma A}^2 + 2\overline{\Sigma B}^2$, εὑρίσκομεν $\overline{\Sigma T}^2 + \overline{AM}^2 + \overline{BN}^2 + \overline{\Gamma\Pi}^2 = 4\overline{\Sigma A}^2 + 4\overline{\Sigma B}^2 + 4\overline{\Sigma\Gamma}^2$.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ϛ'.

Δοθεισῶν τῶν τριῶν κόψεων μιᾶς τριγωνικῆς πυραμίδος αἱ ὁποῖαι συνέρχονται εἰς τὴν αὐτὴν κορυφὴν, καὶ τῶν τριῶν γωνιῶν τὰς ὁποίας αἱ κόψεις αὗται κάμνουν μεταξύ των, νὰ εὑρεθῇ ἡ στερεότης τῆς πυραμίδος.

Εστω (σχ. 278) ΣΑΒΓ ἡ προτεθεῖσα τριγωνικὴ πυραμὶς, εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι γνωστὰ αἱ κόψεις $\Sigma A = \zeta$, $\Sigma B = \eta$, $\Sigma\Gamma = \theta$ καὶ αἱ περιεχόμεναι γωνίαι $A\Sigma B = \gamma$, $A\Sigma\Gamma = \beta$, $B\Sigma\Gamma = \alpha$. Εὰν ἐπὶ τῶν κόψεων ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, τῶν ὁποίων τὸ μέγεθος καὶ θέσις εἶναι δεδομένα, γραφθῇ τὸ παραλληλεπίπεδον ΣΤ, ἡ πυραμὶς ἥτις εἶναι τὸ τριτημόριον τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ΒΣΑΝΜΓ θέλει εἶναι τὸ ἕκτον τοῦ παραλληλεπιπέδου ΣΤ. Εὰν λοιπὸν καλέσωμεν Π τὴν στερεότητα τῆς πυραμίδος, κατὰ τὸ Δ' πρόβλ. θέλομεν ἔχει,

$$\Pi = \frac{1}{6}\zeta\eta\theta\sqrt{(1 - \text{συν}^2\alpha - \text{συν}^2\beta - \text{συν}^2\gamma + 2\,\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma)} \text{ ἢ}$$

$$\Pi = \tfrac{1}{3}\zeta\eta\theta\sqrt{\left(\text{ἡμ}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\,\text{ἡμ}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\,\text{ἡμ}\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\,\text{ἡμ}\frac{\gamma+\beta-\alpha}{2}\right)}.$$

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'.

Δοθεισῶν τῶν ἕξ πλευρῶν ἢ κόψεων μιᾶς τριγωνικῆς πυραμίδος, νὰ εὑρεθῇ ἡ στερεότης της.

Εὰν (σχ. 278) φυλάξωμεν τὰς ὀνομασίας τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος, καὶ περιπλέον κάμωμεν $B\Gamma = \zeta'$, $\Gamma A = \eta'$, $B\Delta = \theta'$, θέλομεν ἔχει $\text{συν}\,\gamma = \frac{\zeta^2+\eta^2-\theta'^2}{2\zeta\eta}$, $\text{συν}\,\beta = \frac{\zeta^2+\theta^2-\eta'^2}{2\zeta\theta}$, $\text{συν}\alpha = \frac{\eta^2+\theta^2-\zeta'^2}{2\eta\theta}$. ἀντεισάγοντες ταύτας τὰς τιμὰς εἰς τὸν εὑρεθέντα τύπον, καὶ κάμνοντες διὰ τὸ σύντομον $\eta^2+\theta^2-\zeta'^2 = Z$, $\zeta^2+\theta^2-\eta'^2 = H$, $\zeta^2+\eta^2-\theta'^2 = \Theta$, εὑρίσκομεν διὰ τὴν ζητουμένην στερεότητα

$$\Pi = \frac{1}{12}\sqrt{(4\zeta^2\eta^2\theta^2 - \zeta^2 Z^2 - \eta^2 H^2 - \theta^2\Theta^2 + ZH\Theta)}.$$

Οταν δὲ πρόκειται νὰ ἐφαρμόσωμεν τοὺς τύπους τούτους, παρατηρητέον ὅτι οἱ μὲν χαρακτῆρες ζ', η', θ' σημειόνουν τὰς πλευρὰς μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας ἢ βάσεως, οἱ δὲ ζ, η, θ τὰς τρεῖς ἄλλας κόψεις αἱ ὁποῖαι τελειόνουν εἰς τὴν κορυφὴν, καὶ εἶναι οὕτω διατεταγμέναι ὥςε ζ εἶναι ἀπέναντι τῆς ζ', η τῆς η' καὶ θ τῆς θ'.

Σχόλιον. Ἐςω Δ τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων τριγώνων τῶν συνιςώντων τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος, καὶ ρ ἡ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας. Ἐπειδὴ ἡ πυραμὶς ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς σύνθετος ἀπὸ τέσσαρας ἄλλας πυραμίδας τῶν ὁποίων βάσεις μὲν εἶναι αἱ διάφοροι ἕδραι της, κοινὴ δὲ κορυφὴ τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας, καὶ ἡ ςερεότης ἑκάςης ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους της ἐπὶ τῆς βάσεώς της· ἕπεται ὅτι ἐὰν καλέσωμεν τὴν ςερεότητα τῆς ὅλης πυραμίδος Π, θέλομεν ἔχει $\Pi = \Delta \times \frac{1}{3}\rho$· ἠμποροῦμεν λοιπὸν ἀκόμη νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ ςερεότης μιᾶς τριγωνικῆς πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἐπιφανείας της ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τῆς ἀκτῖνος τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτὴν σφαίρας. Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν συνάγομεν τὴν ἀκτῖνα τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας $\rho = \frac{3\Pi}{\Delta}$.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η'.

Ἔχοντες τὰ αὐτὰ δοθέντα τοῦ ς' προβλήματος, νὰ εὕρωμεν τὴν ἀκτῖνα τῆς περὶ τὴν πυραμίδα περιγεγραμμένης σφαίρας.

Ἀπὸ τὸ κέντρον Μ τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον ΣΑΒ (σχ. 279) περιγεγραμμένου κύκλου, ἄς ὑψώσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΣΑΒ τὴν κάθετον ΜΟ· παρομοίως ἀπὸ τὸ κέντρον Ν τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον ΣΑΓ περιγεγραμμένου κύκλου, ἄς ὑψώσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΣΑΓ τὴν κάθετον ΝΟ· λέγω 1ον ὅτι αἱ δύο αὗται κάθετοι κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. 2ον ὅτι συναπαντῶνται εἰς μίαν ςιγμὴν Ο· διότι 1ον ἐὰν ἀπὸ τὰ δύο κέντρα Μ καὶ Ν ἄξωμεν δύο καθέτους ἐπὶ τὴν ΣΑ, αἱ δύο αὗται κάθετοι θέλουν συναπαντηθῇ εἰς μίαν ςιγμὴν Δ τῆς ΣΑ· ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΜΔΝ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἰδίαν ΣΑ· καὶ ἐπειδὴ ἡ ΣΑ εἶναι κοινὴ τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΣΒ, ΑΣΓ, διὰ τοῦτο τὸ ἐπίπεδον ΜΔΝ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τοῦ ΑΣΒ καὶ ἐπὶ τοῦ ΑΣΓ· λοιπὸν ἡ ΜΟ ὡς κάθετος ὑψωμένη ἀπὸ μίαν ςιγμὴν Μ τῆς κοινῆς τομῆς τοῦ ἐπιπέδου ΑΣΒ μὲ τὸ ΜΔΝ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΣΒ, εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου ΜΔΝ (Γεωμ.)· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ κάθετος ΝΟ εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου ΜΔΝ· λοιπὸν αἱ δύο κάθετοι ΜΟ, ΝΟ εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΜΔΝ. 2ον ἐὰν τώρα αἱ δύο αὗται κάθετοι δὲν συναπαντῶνται, ἀναγκαίως πρέπει νὰ ἦναι παράλληλοι· ἀλλὰ τότε ἡ ΜΔ κάθετος εἰς τὴν ΜΟ πρέπει νὰ ἦναι κάθετος καὶ εἰς τὴν ΝΟ· πλὴν καὶ ἡ ΔΝ εἶναι ἐπίσης κάθετος εἰς τὴν ΝΟ· λοιπὸν ἤθελεν ἀκολουθήσει ὅτι ἐκ τῆς αὐτῆς ςιγμῆς Δ νὰ ἀναχωροῦν δύο κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας· καὶ ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον· λοιπὸν αἱ δύο κάθετοι ΜΟ, ΝΟ συναπαντῶνται εἰς μίαν ςιγμὴν Ο. Τούτου τεθέντος ἡ ςιγμὴ Ο ὡς ἀνήκουσα εἰς τὴν κάθετον ΜΟ ἰσάκις ἀπέχει ἀπὸ τὰς τρεῖς ςιγμὰς Σ, Α, Β· ὡς ἀνήκουσα δὲ εἰς τὴν κάθετον ΝΟ ἰσάκις ἀπέχει ἀπὸ τὰς τρεῖς ςιγμὰς Σ, Α, Γ· ὥςε ἡ ςιγμὴ Ο ἰσάκις ἀπέχει ἀπὸ τὰς τέσσαρας Σ, Α, Β, Γ· ἐὰν λοιπὸν ἐκ τῆς ςιγμῆς Ο ὡς ἐκ κέντρου μὲ ἀκτῖνα τὴν ΣΟ γράψωμεν σφαῖραν, αὕτη θέλει διέλθῃ καὶ διὰ τῶν ἄλλων τριῶν κορυφῶν τῆς πυραμίδος, ἑπομένως θέλει εἶναι ἡ περὶ τὴν πυραμίδα περιγεγραμμένη σφαῖρα. Πρόκειται λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΣΟ ταύτης τῆς σφαίρας.

Τώρα παρατηροῦμεν ὅτι ἡ θέσις τῆς ςιγμῆς Μ προσδιορίζεται εἰς τὸ ἐπίπεδον ΣΑΒ, διὰ τοῦ τετραπλεύρου ΣΔΜΘ τοῦ ὁποίου αἱ δύο γωνίαι Δ καὶ Θ εἶναι ὀρθαί, καὶ εἰς τὸ ὁποῖον ἔχομεν $ΣΔ = \frac{1}{2} ζ$, $ΣΘ = \frac{1}{2} η$, καὶ $ΔΣΒ = γ$. Λοιπὸν κατὰ τὸ γ′ πρόβλημα ἔχομεν, $ΜΔ = \dfrac{\frac{1}{2} η - \frac{1}{2} ζ \text{ συν } γ}{\text{ἡμ } γ}$· παρομοίως $ΔΝ = \dfrac{\frac{1}{2} β - \frac{1}{2} ζ \text{ συν } γ}{\text{ἡμ } β}$.

Ας καλέσωμεν Δ τὴν γωνίαν ΜΔΝ τὴν μετροῦσαν τὴν κλίσιν τῶν δύο ἐπιπέδων ΣΑΒ, ΣΑΓ· εἰς τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον τοῦ ὁποίου α, β, γ εἶναι αἱ πλευραί, Δ εἶναι ἡ ἀπέναντι εἰς τὴν πλευρὰν α γωνία, καὶ οὕτως ἔχομεν $\text{συν } Δ = \dfrac{\text{συν}α - \text{συν}β\,\text{συν}γ}{\text{ἡμ } β \text{ ἡμ } γ}$, ὥςε ἡ γωνία Δ ἠμπορεῖ νὰ ὑποτεθῇ γνωςή.

Τούτου τεθέντες, εἰς τὸ τετράπλευρον ΟΜΔΝ τοῦ ὁποίου αἱ δύο γωνίαι Μ καὶ Ν εἶναι ὀρθαί, καὶ εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι γνωςὰ αἱ δύο πλευραὶ ΜΔ, ΔΝ καὶ ἡ περιεχομένη γωνία $ΜΔΝ = Δ$, ἔχομεν, κατὰ τὸ γ′ πρόβλημα, τὸ τετράγωνον τῆς διαγωνίου $\overline{ΟΔ}^2 = \dfrac{\overline{ΔΜ}^2 + \overline{ΔΝ}^2 - 2ΔΜ \times ΔΝ \text{ συν } Δ}{\text{ἡμ}^2 Δ}$· Ἀπὸ δὲ τὸ τρίγωνον ΟΣΔ ὀρθογώνιον εἰς Δ ἔχομεν $\overline{ΣΟ}^2 = \overline{ΟΔ}^2 + \overline{ΣΔ}^2$· αὕτη εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας.

Ἐὰν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἔκφρασιν τῆς ἀκτῖνος ΣΟ διὰ τῶν δεθέντων τοῦ ϛ′ προβλήματος, ἀντεισάξωμεν εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ $\overline{ΟΔ}^2$ τὰς τιμὰς τῶν ΔΜ, ΔΝ καὶ ἀκολούθως τὰς τῶν συν Δ καὶ ἡμ Δ, θέλομεν εὕρῃ δι' ἐξαγόμενον:

$$\Sigma O = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{\frac{\zeta^2 \acute{\eta}\mu^2 \alpha + \kappa^2 \acute{\eta}\mu^2 \beta + \theta^2 \acute{\eta}\mu^2 \gamma - 2\zeta\eta(\sigma\upsilon\nu\gamma - \sigma\upsilon\nu\delta\sigma\upsilon\nu\alpha) - 2\zeta\theta(\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\,\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\gamma) - 2\kappa\theta(\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\gamma\sigma\upsilon\nu\beta)}{1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\gamma + 2\sigma\upsilon\nu\,\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\beta\,\sigma\upsilon\nu\,\gamma}\right\}}$$

# ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ ϛʹ.

## Περὶ τοῦ σιμοτινωτέρου διαςήματος δύο εὐθειῶν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κειμένων.



Ἔςωσαν δύο δεδομέναι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμεναι, τῶν ὁποίων πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ σιμοτινώτερον διάςημα. σχ. 280.

Διὰ τῆς ΑΒ ἂς περάσωμεν δύο ἐπίπεδα κάθετα μεταξύ των τὰ ὁποῖα συναπαντοῦν τὴν ΓΔ τὸ μὲν κατὰ τὸ Γ, τὸ δὲ κατὰ τὸ Δ· ἀπὸ τὰς ςιγμὰς Γ καὶ Δ ἂς κατεβάσωμεν τὰς ΓΑ, ΔΒ καθέτους ἐπὶ τὴν ΑΒ· εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΔ ἂς ἄξωμεν τὴν μὲν ΔΕ παράλληλον τῆς ΑΒ, τὴν δὲ ΑΕ κάθετον εἰς τὴν ἰδίαν· φανερὸν ὅτι ἀπὸ τὴν κατασκευὴν ταύτην σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον ΑΔΒΕ· εἰς τὸ ἐπίπεδον ΓΑΕ ἂς ἐπιζεύξωμεν τὴν ΓΕ καὶ ἐπ' αὐτῆς ἂς ἄξωμεν τὴν ΑΙ κάθετον· τέλος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΓΔΕ ἂς ἄξωμεν τὴν ΙΚʹ παράλληλον τῆς ΔΕ καὶ ἂς τὴν προεκβάλλωμεν ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΓΔ εἰς Κʹ, ἂς λάβωμεν ΑΛ = ΙΚʹ καὶ ἂς ἐπιζεύξωμεν τὴν ΚʹΛ· λέγω 1ον ὅτι ἡ εὐθεῖα ΚʹΛ εἶναι ἐνταυτῷ κάθετος εἰς τὰς δύο εὐθείας ΑΒ, ΓΔ· 2ον ὅτι ἡ ἰδία αὕτη εὐθεῖα ΚʹΛ εἶναι σιμοτινωτέρα ἀπὸ κάθε ἄλλην ἑνόνουσαν δύο ςιγμὰς τῶν γραμμῶν ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἀκολούθως ἡ ΚʹΛ ἢ ἡ ἴση μὲ αὐτὴν ΑΙ εἶναι τὸ ζητούμενον σιμοτινώτερον διάςημα.

Τῷ ὄντι 1ον ἐπειδὴ ἐκ τῆς κατασκευῆς αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΕ εἶναι κάθετοι μεταξύ των, μία τούτων εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο ἄλλων· λοιπὸν ΑΒ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΓΕ, καὶ διὰ τοῦτο κάθετος καὶ εἰς τὴν ΑΙ· περιπλέον ἡ ΚʹΙ παράλληλος οὖσα τῆς ΔΕ παραλλήλου τῆς ΑΒ, εἶναι παράλληλος τῆς ἰδίας ΑΒ· ἐπειδὴ δὲ ἐλήφθη ἡ ΑΛ = ΙΚʹ καὶ ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΑΙ· ἕπεται ὅτι τὸ σχῆμα ΑΙΚʹΛ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, λοιπὸν ἡ γωνία ΑΙΚʹ εἶναι ὀρθή· ὀρθὴ δὲ εἶναι καὶ ἡ ΑΙΓ· λοιπὸν ἡ ΑΙ εἶναι κάθετος ἐνταυτῷ εἰς τὰς δύο εὐθείας ΓΙ καὶ ΙΚʹ· λοιπὸν εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδόν των ΓΙΚʹ ἢ ΓΔΕ· λοιπὸν καὶ ἡ παράλληλος αὐτῆς ΚʹΛ εἶναι κάθετος εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΓΔΕ καὶ διὰ τοῦτο κάθετος εἰς τὴν ΓΔ, εἶναι δὲ ἡ ΚʹΛ κάθετος καὶ εἰς τὴν ΑΒ· λοιπὸν 1ον ἡ εὐθεῖα ΚʹΛ εἶναι ἐνταυτῷ κάθετος εἰς τὰς δύο εὐθείας ΑΒ, ΓΔ.