ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΕΙΣ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄.

ΠΕΡΙ ΤΙΝΩΝ ΟΝΟΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΩΝ.

Εἰς τὸ σύγγραμμα τοῦτο εἰσήξαμεν νέας τινὰς ἐκφράσεις καὶ ὁρισμοὺς σκοπὸν δι' αὐτῶν ἔχοντες νὰ δώσωμεν εἰς τὴν γεωμετρικὴν γλῶσσαν περισσοτέραν τὴν ἀκρίβειαν καὶ βραχυλογίαν· Εἰς τὴν σημείωσιν λοιπὸν ταύτην θέλομεν ἀποδώσει λόγον τῶν μεταβολῶν τούτων, καὶ προτείνει ἄλλας τινὰς αἱ ὁποῖαι ἀποβλέπουν εἰς τὸν αὐτὸν σκοπόν.

Εἰς τὸν κοινὸν ὁρισμὸν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου καὶ τοῦ τετραγώνου, λέγεται ὅτι αἱ γωνίαι τούτων τῶν σχημάτων εἶναι ὀρθαί· ὀρθότερον ἤθελεν εἶναι νὰ λέγεται ὅτι αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι· διότι νὰ ὑποθέσῃ τινὰς ὅτι αἱ τέσσαρες γωνίαι ἑνὸς τετραπλεύρου ἠμποροῦν νὰ ἦναι ὀρθαί, καὶ ἀκόμη ὅτι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των, εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς νὰ ὑποθέσῃ προτάσεις αἵτινες χρήζουν ἀποδείξεως. Τὸ ἀνάρμοςον τοῦτο καὶ ἄλλα παρόμοια δὲν ἤθελον λάβῃ χώραν, ἐὰν, ἀντὶ, κατὰ τὴν καθεςῶσαν συνήθειαν, νὰ προτάσσωνται οἱ ὁρισμοί, ἐτίθετο ἕκαςος ἐκεῖ ἔνθα ἀποδείκνυται τὸ ὑπ' αὐτοῦ ὑποτιθέμενον.

Η λέξις κλίσις πρέπει νὰ νοῆται κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν ὁποῦ καὶ ἡ λέξις γωνία· καὶ αἱ δύο δεικνύουν τὴν τροποϋπαρξίαν (maniere d'être) δύο γραμμῶν ἢ δύο ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα συναπαντῶνται, ἢ προεκβαλλόμενα ἤθελον συναπαντηθῇ. Η κλίσις δύο γραμμῶν εἶναι μηδὲν ὅταν ἡ γωνία ἦναι μηδὲν, τοῦτ' ἔςιν ὅταν αἱ γραμμαὶ ἦναι παράλληλοι ἢ ταυτίζωνται. Η κλίσις εἶναι ἡ μεγαλητέρα ὅταν ἡ γωνία ἦναι ἡ μεγαλητέρα, ἢ ὅταν αἱ δύο γραμμαὶ κάμνουν μεταξύ των ἀμβλυτάτην γωνίαν. Η δὲ λέξις ῥοπὴ ἐκλαμβάνεται εἰς διαφορετικὴν ἔννοιαν· μία γραμμὴ τόσον περισσότερον ῥέπει ἐπὶ μιᾶς ἄλλης ὅσον ἀπομακρύνεται τῆς καθέτου εἰς αὐτήν.

Ο Εὐκλείδης καὶ ἄλλοι συγγραφεῖς συχνώτατα ὀνομάζουν ἴσα τρίγωνα ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα μόνον κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, καὶ ςερεὰ ἴσα ἐκεῖνα τὰ ςερεὰ τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι ἴσα εἰ μὴ κατὰ τὴν ςερεότητα. Μᾶς ἐφάνη καταλληλότερον νὰ ὀνομάσωμεν τὰ τρίγωνα ταῦτα ἢ τὰ ςερεὰ ἰσοδύναμα τρίγωνα ἢ ἰσοδύναμα στερεὰ, καὶ νὰ φυλάξωμεν τὴν ὀνομασίαν ἴσα τρίγωνα, ἴσα στερεὰ, δι' ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα ἐφαρμόζουν διὰ τῆς ἐπιθέσεως.

Εἶναι προσέτι ἀναγκαῖον νὰ διακρίνωμεν εἰς τὰ στερεὰ καὶ τὰς καμπύλας ἐπιφανείας δύο διαφορετικὰ εἴδη ἰσότητος. Τῷ ὄντι, δύο στερεὰ, δύο στερεαὶ γωνίαι, δύο σφαιρικὰ τρίγωνα ἢ πολύγωνα, ἠμποροῦν νὰ ἦναι ἴσα καθ' ὅλα των τὰ συστατικὰ μέρη, χωρὶς μ' ὅλον τοῦτο νὰ ἐφαρμόζουν διὰ τῆς ἐπιθέσεως. Η παρατήρησις αὕτη φαίνεται ὅτι δὲν ἔγινεν εἰς τὰ στοιχειώδη βιβλία, καὶ ὅμως, διὰ τὴν ἔλλειψιν ταύτην, πολλαὶ ἀποδείξεις θεμελιούμεναι ἐπὶ τῆς ἐφαρμόσεως τῶν σχημάτων δὲν εἶναι ἀκριβεῖς. Τοιαῦται εἶναι ἐκεῖναι διὰ τῶν ὁποίων πολλοὶ συγγραφεῖς διατείνονται νὰ ἀποδείξουν τὴν ἰσότητα τῶν σφαιρικῶν τριγώνων εἰς τὰς αὐτὰς περιστάσεις καὶ καθ' ὃν τρόπον ἀποδεικνύεται ἡ τῶν εὐθυγράμμων: πρὸ πάντων δὲ ἠμποροῦμεν νὰ φέρωμεν ὡς παράδειγμα τὸν Ρομβέρτον Σίμσωνα (1), ὅστις πολεμῶν τὴν ἀπόδειξιν τῆς κη' προτάσεως τοῦ ια' βιβλίου τοῦ Εὐκλείδου, θεμελιόνει τὴν ἰδικήν του ἐπὶ μιᾶς ἐφαρμόσεως ἥτις δὲν ὑπάρχει. Εκρίναμεν λοιπὸν πρέπον νὰ δώσωμεν εἰς ταύτην τὴν ἰσότητα, ἥτις δὲν συνεπιφέρει τὴν ἐφάρμοσιν, ἰδιαίτερον ὄνομα· ὅθεν τὴν ὠνομάσαμεν ἰσότητα ἐκ συμμετρίας, καὶ τὰ σχήματα τὰ ὁποῖα ἔχουν μὲν ὅλα των τὰ συστατικὰ μέρη ἴσα, πλὴν ἐπιτιθέμενα δὲν ἐφαρμόζουν, σχήματα συμμετρικά.

Αλλην λοιπὸν ἰδέαν πρέπει νὰ ἔχωμεν τῶν ἴσων σχημάτων, ἄλλην τῶν ἰσοδυνάμων, καὶ ἄλλην τέλος τῶν συμμετρικῶν, καὶ τὰς τρεῖς ταύτας ὀνομασίας ὡς ἀναφερομένας εἰς διαφορετικὰ πράγματα δὲν πρέπει νὰ συγχέωμεν εἰς μίαν μόνην.

Εἰς τὰς προτάσεις αἱ ὁποῖαι ἀποβλέπουν τὰ πολύγωνα, τὰς στερεὰς γωνίας καὶ τὰ πολύεδρα, ἀπεκλείσαμεν ῥητῶς ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα ἤθελον ἔχει εἰσεχούσας γωνίας. Διότι, ἐκτὸς ὅτι πρέπει εἰς τὰ στοιχεῖα νὰ περιορίζεται τινὰς εἰς τὰ ἁπλούστερα σχήματα, ἐὰν δὲν ἐπράτταμεν οὕτω, μερικαὶ προτάσεις, ἢ δὲν ἤθελον εἶναι ἀληθεῖς, ἢ ἤθελον χρήζει τροπολογίας. Επεριωρίσθημεν λοιπὸν εἰς τὴν θεωρίαν τῶν γραμμῶν καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τὰς ὁποίας ὀνομάζομεν κυρτὰς, καὶ εἶναι τοιαῦται ὥστε δὲν τέμνονται ἀπὸ εὐθεῖαν γραμμὴν εἰς περισσότερα τῶν δύο σημεῖα.

Συχνώτατα ἐμεταχειρίσθημεν τὴν ἔκφρασιν γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων γραμμῶν· διὰ τῆς ὁποίας ἐννοοῦμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τῶν παριστανόντων ταύτας τὰς γραμμὰς, αἱ

(1) Βλέπε τὸ πόνημα τούτου τοῦ συγγραφέως, ἐπιγραφόμενον: Euclidis Elementorum libri sex, etc. Glasguæ, 1756.

θετεῖαι ὑποτίθενται ἐκτιμούμεναι μὲ μίαν κατ' ἀρέσκειάν γραμμικὴν μονάδα. Στερεωθείσης τῆς ἐννοίας ταύτης τῆς λέξεως, ἡ χρῆσίς της δὲν φέρει καμμίαν δυσκολίαν. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἤθελεν ἐννοῆται ἡ σημασία τοῦ γινομένου ἐπιφανείας καὶ γραμμῆς, ἐπιφανείας καὶ στερεοῦ κτλ: ἀρκεῖ νὰ στερεωθῇ μίαν φορὰν διὰ πάντα ὅτι τὰ γινόμενα ταῦτα θεωροῦνται ἢ πρέπει κἂν νὰ θεωροῦνται ὡς γινόμενα ἀριθμῶν, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἀναφέρεται εἰς τὸ εἶδος εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει. Οὕτως τὸ γινόμενον ἐπιφανείας καὶ στερεοῦ ἄλλο τι δὲν εἶναι εἰμὴ τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μὲν παριστάνει μονάδας ἐπιφανείας, ὁ δὲ στερεάς.

Συχνάκις εἰς τὴν ὁμιλίαν θέλοντες νὰ φανερώσωμεν τὴν στιγμὴν τὴν εὑρισκομένην ἐπὶ τῆς κορυφῆς μιᾶς γωνίας, μεταχειριζόμεθα τὴν ἰδίαν λέξιν *γωνία*: ὁ τρόπος οὗτος τοῦ ἐκφράζεσθαι δὲν εἶναι ὀρθός· καλὸν ἦτον πρὸς περισσοτέραν καθαρότητα καὶ ἀκρίβειαν νὰ ὀνομασθῶσιν μὲ ἰδιαίτερον ὄνομα, καθὼς μὲ τὸ ὄνομα *κορυφαὶ* αἱ εὑρισκόμεναι στιγμαὶ εἰς τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν πολυγώνου ἢ πολυέδρου. Οὕτως ἐννοητέα ἡ ὀνομασία *κορυφαὶ πολυγώνου ἢ πολυέδρου* τὴν ὁποίαν συχνὰ ἐμεταχειρίσθημεν.

Εἰς τὸν ὁρισμὸν τῶν *εὐθυγράμμων ὁμοίων σχημάτων* ἀκολουθήσαμεν τὸν κοινόν· πλὴν παρατηροῦμεν ὅτι περιέχει τρεῖς περιττὰς συνθήκας. Διότι, διὰ νὰ κατασκευάσωμεν πολύγωνον ν πλευρῶν, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν μίαν πλευράν, καὶ νὰ ἔχωμεν τὴν θέσιν τῶν κορυφῶν τῶν ἐκτὸς ταύτης τῆς πλευρᾶς κειμένων γωνιῶν. Τώρα ὁ ἀριθμὸς τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι $\nu - 2$, καὶ ἡ θέσις ἑκάστης κορυφῆς ἀπαιτεῖ δύο διδόμενα· ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι ὁ ὅλος ἀριθμὸς τῶν ἀπαιτουμένων διὰ τὴν κατασκευὴν πολυγώνου ν πλευρῶν εἶναι $1 + 2\nu - 4$ ἢ $2\nu - 3$. Πλὴν εἰς τὸ ὅμοιον πολύγωνον εἶναι μία πλευρὰ κατ' ἀρέσκειαν· ὅθεν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀναγκαίων συνθηκῶν διὰ τὴν ὁμοιότητα πολυγώνου μὲ ἄλλο δοθὲν, εἶναι $2\nu - 4$. Τώρα ἀπὸ τὸν κοινὸν ὁρισμὸν ἀπαιτεῖται, 1ον αἱ γωνίαι νὰ ἦναι ἴσαι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, τὸ ὁποῖον δίδει χώραν εἰς ν συνθήκας. 2ον αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ νὰ ἦναι ἀνάλογοι, τὸ ὁποῖον δίδει χώραν εἰς $\nu - 1$ συνθήκας. Ὅλαι λοιπὸν αἱ συνθῆκαι εἶναι $2\nu - 1$, δηλαδὴ τρεῖς περισσότερον. Πρὸς ἀποφυγὴν τούτου, ἠμπορεῖ νὰ ἀναλυθῇ ὁ ὁρισμὸς εἰς δύο ἄλλους, κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον.

1ον *Δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια ὅταν ἔχουν δύο γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν.*

2ον *Δύο πολύγωνα εἶναι ὅμοια ὅταν καὶ εἰς τὰ δύο ἠμποροῦν νὰ σχηματισθοῦν ἰσάριθμα τρίγωνα ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα.*

Ἀλλὰ διὰ νὰ μὴ περιέχῃ καὶ ὁ τελευταῖος οὗτος ὁρισμὸς συνθήκας περιττὰς, πρέπει ὁ ἀριθμὸς τῶν τριγώνων νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου παρὰ δύο· καὶ τοῦτο ἠμπορεῖ νὰ γένῃ κατὰ δύο τρόπους. Δυνατὸν εἶναι ἀπὸ δύο ὁμολόγους γωνίας νὰ ἀχθῶσιν διαγώνιοι εἰς τὰς ἀπέναντι γωνίας, καὶ τότε ὅλα τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα εἰς ἕκαςον πολύγωνον ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφὴν, καὶ τὸ ἄθροισμά των ἰσοῦται μὲ τὸ πολύγωνον· ἢ δυνατὸν νὰ ὑποτεθῇ ὅτι ὅλα τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα εἰς ἓν πολύγωνον, ἔχουν διὰ κοινὴν βάσιν μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, καὶ κορυφὰς τὰς τῶν διαφόρων ἀπέναντι ταύτης τῆς βάσεως γωνιῶν. Εἴτε εἰς τὴν μίαν εἴτε εἰς τὴν ἄλλην περίςασιν ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν σχηματιζομένων τριγώνων καὶ εἰς τὰ δύο μέρη εἶναι ν—2, ὁ ἀριθμὸς τῶν διὰ τὴν ὁμοιότητά των ἀπαιτουμένων συνθηκῶν εἶναι 2ν—4, καὶ ὁ ὁρισμὸς δὲν περιέχει τίποτε περιττόν. Τεθέντος τοῦ νέου τούτου ὁρισμοῦ, ὁ παλαιὸς καταντᾷ εἰς θεώρημα· τὸ ὁποῖον ἀμέσως ἀποδεικνύεται.

Οχι ὀλιγώτερον ἀτελὴς εἰς τὰ ςοιχειώδη βιβλία εὑρίσκεται ὁ ὁρισμὸς τῶν πολυέδρων ὁμοίων ςερεῶν. Εἰς τὸν Εὐκλείδην ὁ ὁρισμὸς οὗτος κρέμαται ἀπὸ ἀναπόδεικτον θεώρημα· εἰς ἄλλους συγγραφεῖς περιέχει πολλὰ πλεονάζοντα. Ημεῖς λοιπὸν ἀπερρίψαμεν τοὺς ὁρισμοὺς τούτους τῶν ςερεῶν, καὶ ἀντ' αὐτῶν ἀντικαταςήσαμεν ἄλλον θεμελιούμενον ἐπὶ τῶν ἀρχῶν τὰς ὁποίας ἐξεθέσαμεν. Αλλ' ἐπειδὴ ἔχομεν νὰ κάμωμεν πολλὰς ἄλλας παρατηρήσεις περὶ τῆς ὑποθέσεως ταύτης, θέλομεν ἐπιςρέψει εἰς αὐτὴν εἰς ἰδιαιτέραν σημείωσιν.

Ο ὁρισμὸς τῆς καθέτου ἐν ἐπιπέδῳ ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς θεώρημα. Ο τῆς κλίσεως δύο ἐπιπέδων ἔχει χρείαν παρομοίως νὰ βεβαιωθῇ δι' ἑνὸς συλλογισμοῦ· διὰ πολλοὺς ἄλλους ὑπάρχει τὸ ἴδιον· καὶ ἰδοὺ διατὶ φυλάττοντες τοὺς ὁρισμοὺς τούτους κατὰ τὴν παλαιὰν συνήθειαν, ἐφροντίσαμεν νὰ παραπέμπωμεν εἰς τὰς προτάσεις ὅπου αὐτοὶ ἀποδεικνύονται· ἐνίοτε δὲ εὐχαριςήθημεν εἰς τὴν πρόσθεσιν μιᾶς συντόμου διασαφήσεως.

Η σχηματιζομένη γωνία ἀπὸ τὴν συναπάντησιν δύο ἐπιπέδων καὶ ἡ σχηματιζομένη ςερεὰ γωνία ἀπὸ πολλὰ ἐπίπεδα συναπαντώμενα εἰς τὴν αὐτὴν ςιγμὴν, εἶναι μεγέθη, ἕκαςον τοῦ ἰδίου εἴδους, εἰς τὰ ὁποῖα καλὸν ἴσως ἦτον νὰ δοθῶσιν ἰδιαίτερα ὀνόματα· διότι ἄλλως εἶναι δύσκολον νὰ ἀποφύγῃ τινὰς τὴν ἀσάφειαν καὶ τὰς περιφράσεις εἰς τὸν περὶ τῆς διατάξεως τῶν ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα συγκροτοῦν τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς πολυέδρου λόγον· καὶ ἐπειδὴ ἡ θεωρία τῶν ςερεῶν τούτων ὀλίγον ἐκαλλιεργήθη μέχρι τῆς σήμερον, δὲν εἶναι ἀνοίκειον νὰ εἰσαχθῶσιν νέαι ἐκφράσεις ὅταν τὰς ἀπαιτῇ ἡ ἰδία φύσις τῶν πραγμάτων.

Ηθελα προτείνει νὰ ὀνομάζεται ἀγκωνὴ (coin) ἡ σχηματιζομένη γωνία ἀπὸ δύο ἐπίπεδα· ἡ κόψις τῆς ἀγκωνῆς ἤθελεν εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων. Η ἀγκωνὴ ἤθελε σημειόνεται διὰ τεσσάρων γραμμάτων, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ δύο μεσαῖα θὰ ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν κόψιν. Τότε ἡ ὀρθὴ ἀγκωνὴ ἤθελεν εἶναι ἡ σχηματιζομένη γωνία ἀπὸ δύο ἐπίπεδα κάθετα μεταξύ των. Τέσσαρες ὀρθαὶ ἀγκωναὶ ἤθελον πληροῖ ὅλον τὸ γωνιῶδες στερεὸν χωρίον ὁλόγυρα μιᾶς δεδομένης εὐθείας. Ο νέος δὲ οὗτος ὁρισμὸς δὲν ἤθελεν ἐμποδίσει ἀπὸ τὸ νὰ ἔχῃ πάντοτε ἡ ἀγκωνὴ μέτρον τὴν σχηματιζομένην γωνίαν ἀπὸ τὰς δύο καθέτους τὰς ἠγμένας εἰς ἕκαστον τῶν ἐπιπέδων εἰς τὴν αὐτὴν στιγμὴν τῆς κοινῆς τομῆς ἢ κόψεως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'.

Περὶ τῆς ἀποδείξεως τῆς ΙΘ' προτάσεως τοῦ Α' βιβλίου, καὶ περί τινων ἄλλων θεμελιωδῶν προτάσεων τῆς Γεωμετρίας.

Η ἀπόδειξις τῆς ΙΘ' προτάσεως τὴν ὁποίαν δίδομεν εἰς τὸ κείμενον, ἴσως εἶναι μεταξὺ τῶν στοιχειωδῶν ἀποδείξεων ἡ ἁπλουστέρα καὶ ἡ πλέον ἄμεσος· ἐλπίζομεν ὅτι οἱ ἐρασταὶ τῆς γεωμετρικῆς ἀκριβείας θέλουν τὴν ἀποδεχθῇ, καὶ δι' αὐτῆς θέλει ἐκλείψει ἀπὸ τὰ στοιχεῖα ἡ ἀτέλεια εἰς τὴν ὁποίαν ἡ θεωρία τῶν παραλλήλων ἕως τοῦ νῦν εὑρίσκετο.

Εδῶ λαμβάνομεν ἀφορμὴν νὰ κάμωμεν νέας τινὰς παρατηρήσεις ἐπάνω εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῆς ἰδίας προτάσεως, τὴν ὁποίαν ἐδώκαμεν εἰς τὴν 3ην ἔκδοσιν τούτου τοῦ συγγράμματος, δημοσιευθεῖσαν ἐν ἔτει 1800 καὶ εἰς τὰς ἀκολούθους μέχρι τῆς 8ης. πρὸς τοῦτο εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἀνακαλέσωμεν διὰ βραχέων τὴν ἀρχὴν ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐθεμελιοῦτο ἡ ἀπόδειξις αὕτη.

Ημεῖς ἀπεδείξαμεν τότε μὲ πολλὴν ἀκρίβειαν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου δὲν ἠμπορεῖ νὰ ὑπερβαίνῃ δύο ὀρθάς. Πρότασις ἡ ὁποία δεικνύει οὐσιώδη διαφορὰν μεταξὺ τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων καὶ τῶν σφαιρικῶν, καὶ χωρίζει τὰ πρῶτα ἀπὸ τὰ δεύτερα. Στερεωθέντος τοῦ πρώτου τούτου μέρους, ἔμενε νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι μικρότερον ἀπὸ δύο ὀρθάς· τώρα καθὼς εἰς τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα ἡ ὑπεροχὴ τῶν τριῶν γωνιῶν ἐπάνω εἰς δύο ὀρθὰς, εἶναι ἀνάλογος τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου· οὕτω καὶ εἰς τὰ εὐθύγραμμα ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ἦτον μικρότερον δύο ὀρθῶν, τὸ ἐλλεῖπον ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τοῦτο διὰ νὰ ἐξισοῦται μὲ δύο ὀρθὰς, ἤθελεν εἶναι ἀνάλογον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου. Εντεῦθεν φανερὸν γίνεται ὅτι ἐὰν ἔχοντες δεδομένον τρίγωνον ἠμπορέσαμεν νὰ κατασκευάσωμεν ἄλλο, εἰς τὸ ὁποῖον τὸ δεδομένον νὰ περιέχεται τοὐλάχιστον μ φοραῖς, τὸ ἔλλειπον ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ νέου τούτου τριγώνου διὰ νὰ ἐξισοῦται μὲ δύο ὀρθὰς, ἤθελεν ἰσοῦται μὲ μ φοραῖς τοὐλάχιστον τὸ ἔλλειπον ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν τοῦ δεδομένου διὰ νὰ ἐξισοῦται ἐπίσης μὲ δύο ὀρθὰς, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ μεγάλου τριγώνου βαθμηδὸν ἤθελεν ὀλιγοστεύει ἀναλόγως τῆς αὐξήσεως τοῦ μ, ἕως οὗ νὰ κατασταθῇ μηδὲν ἢ ἀρνητικόν. Ἄτοπον ἐξαγόμενον καὶ διὰ τοῦτο τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι μικρότερον ἀπὸ δύο ὀρθάς.

Ὁδηγούμενοι ἀπὸ τὴν ἀποδεικτικὴν ταύτην ἀρχὴν ἥτις εἶναι ἀλάνθαστος, ἐδείξαμεν ὅτι ὅλη ἡ δυσκολία ἐκατατοῦσεν εἰς τὴν κατασκευὴν τριγώνου τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ τοὐλάχιστον δὶς τὸ δεδομένον· ἀλλ' ἡ λύσις τὴν ὁποίαν ἐδώκαμεν τούτου τοῦ προβλήματος, κατὰ τὸ φαινόμενον ἁπλουστάτη, ὑποθέτει ὅτι πάντοτε εἶναι δυνατὸν διὰ μιᾶς στιγμῆς δεδομένης ἐντὸς γωνίας μικροτέρας τῶν δύο τριτημορίων τῆς ὀρθῆς, νὰ διέλθῃ εὐθεῖα γραμμὴ συναπαντῶσα ἐν ταὐτῷ τὰς δύο πλευρὰς τῆς γωνίας.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον πολὺ ἐπλησιάσαμεν εἰς τὸν σκοπόν μας, ἀλλ' ὄχι καὶ ὁλοκλήρως εἰς αὐτὸν ἐφθάσαμεν, διότι ἡ ἀπόδειξίς μας ἐξαρτᾶτο ἀπὸ αἴτημα τὸ ὁποῖον καλώτατα ἠμπόρει τις νὰ ἀρνηθῇ. (1) Ὁ στοχασμὸς οὗτος μᾶς ἔκαμεν νὰ ἐπιστρέψωμεν εἰς τὴν 9ην ἔκδοσιν, εἰς τὴν ἁπλῆν ὁδὸν τοῦ Εὐκλείδου παραπέμποντες διὰ τὴν ἀκριβῆ ἀπόδειξιν εἰς τὰς σημειώσεις.

Ἐξετάζοντες τὸ πρᾶγμα προσεκτικώτερον ἐπληροφορήθημεν ὅτι πρὸς πλήρη ἀπόδειξιν τοῦ αἰτήματός μας ἐχρειάζετο νὰ συνάξωμεν ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς εὐθείας γραμμῆς χαρακτηριστικὴν ἰδιό-

---

(1) Εἰς ἓν ἄρθρον τῆς φιλοσοφικῆς ἀποθήκης τοῦ Μαρτίου τῶν 1822 φαίνεται ὅτι σοφός τις Γεωμέτρης ἐπροσπάθησε νὰ τελειοποιήσῃ τὴν ἀπόδειξιν ταύτην καὶ καταστήσῃ αὐτὴν ἀνεξάρτητον κάθε αἰτήματος: ἀλλ' ἡ κατασκευὴ τὴν ὁποίαν ἐμεταχειρίσθη διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ δευτέρου μέρους συνίσταται εἰς τὸ νὰ ἀχθῶσιν ἀπὸ δεδομένην στιγμὴν διάφοροι εὐθεῖαι εἰς ὅλας τὰς κορυφὰς μιᾶς γραμμῆς ἥτις πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὡς πολυγωνική, ὥστε, ὑποτεθέντος ὅτι ἡ πρότασις ἀποφάσκεται, νὰ ἠμπορῇ τινὰς νὰ συλλογισθῇ κατὰ τοῦ ἀποφάσκοντος· τώρα ἡ κυρτότης ταύτης τῆς γραμμῆς, ἐὰν ἐδίδετο, δὲν ἤθελε συγχωρήσει νὰ συνεχισθῇ ἀπροσδιορίστως ἡ κατασκευὴ τοῦ συγγραφέως, καθὼς τοῦτο ἀπαιτεῖτο διὰ τὴν ἀκρίβειαν τῆς ἀποδείξεώς του.

τητα ἥτις νὰ ἀποκλείῃ κάθε ἐλλειπότητα ταύτης τῆς γραμμῆς μὲ τὴν μορφὴν μιᾶς ὑπερβολῆς περιεχομένης μεταξὺ τῶν δύο ἀσυμπτώτων της. Ἰδοὺ τὸ ἐξαγόμενον τῶν ζητήσεών μας.

Εςω γωνία δεδομένη ἡ ΒΑΓ, καὶ Μ ςιγμή τις ἐντὸς ταύτης τῆς γωνίας ἐπίσης δεδομένη· ἂς τμηθῇ δίχα ἡ γωνία ΒΑΓ διὰ τῆς εὐθείας ΑΔ, καὶ ἀπὸ τὴν ςιγμὴν Μ ἂς ἀχθῇ ἡ ΠΜ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ: λέγω ὅτι ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΠΜ προεκβληθῇ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη, ἀναγκαίως θέλει συναπαντήσει τὰς δύο πλευρὰς τῆς γωνίας ΒΑΓ. σχ. 274.

Ἡ συναπαντᾷ ἡ εὐθεῖα αὐτη μίαν τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ΠΑΓ ἢ δὲν συναπαντᾷ· εἰς τὴν πρώτην περίςασιν ἀναγκαίως συναπαντᾶ καὶ τὴν ἄλλην· ἐπειδὴ τότε ἓν μέρος τῆς προεκβολῆς τῆς εὐθείας ΠΜ περιέχεται μεταξὺ Π καὶ τῆς ςιγμῆς τῆς συναπαντήσεώς της Ε μὲ ἐκείνην τὴν πλευρὰν, καὶ ἐὰν ἡ γωνία ΒΑΠ ςραφῇ ὁλόγυρα τῆς ΑΠ ἕως οὗ νὰ ἐφαρμόσῃ μὲ τὴν ἴσην της ΠΑΓ, ἡ ςιγμὴ Ε θέλει εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ, καὶ τὸ μέρος ΠΕ θέλει περιέχεται μεταξὺ Π καὶ τῆς νέας θέσεως τῆς ςιγμῆς Ε ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ: πλὴν ἐπειδὴ τὸ μέρος ΠΕ εἰς ταύτην τὴν περιςροφὴν διευθύνεται κατὰ τὴν προεκβολὴν τῆς ΠΜ ἀκολουθεῖ ὅτι ἡ ςιγμὴ Ε εἰς τὴν νέαν θέσιν της εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΠΜ: δηλαδὴ ἡ προεκβολὴ τῆς ΠΜ πρέπει νὰ διέλθῃ ἀπὸ μίαν ςιγμὴν τῆς πλευρᾶς ΑΓ. Εἰς τὴν δευτέραν περίςασιν οὐδὲ τὴν ἄλλην ἠμπορεῖ νὰ συναπαντήσῃ· διότι εἴδομεν ὅτι ἡ συναπάντησις μὲ τὴν μίαν φέρει ἀναγκαίως τὴν συναπάντησιν μὲ τὴν ἄλλην· ὥςε εἰς τὴν δευτέραν ταύτην περίςασιν πρέπει ἡ εὐθεῖα ὅλη νὰ περικλείεται εἰς τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ΒΑΓ περιεχόμενον χωρίον· ἀλλὰ τὸ νὰ ἠμπορῇ μία εὐθεῖα γραμμὴ ἀπροσδιορίςως προεκβληθεῖσα νὰ περιέχεται ἐντὸς μιᾶς γωνίας, μάχεται εἰς τὴν φύσιν της.

Τῷ ὄντι, ἐὰν ἐπὶ ἐπιπέδου χαραχθῇ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΔΒ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη ἀπροσδιορίςως προεκβληθῇ, ἡ εὐθεῖα αὐτη διαιρεῖ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἰς δύο μέρη τὰ ὁποῖα διὰ τῆς ἐπιθέσεως ἐφαρμόζουν καθ᾽ ὅλην των τὴν ἔκτασιν καὶ ἐντελῶς ἰσοῦνται. Τὸ μέρος ΑΜΒ τοῦ ὅλου ἐπιπέδου τὸ ἐντεῦθεν τῆς ΑΒ κείμενον, ἰσοῦται κατὰ πάντα μὲ τὸ μέρος ΑΜ′Β τὸ ἐκεῖθεν τῆς ΑΒ εὑρισκόμενον· διότι ἐὰν ληφθῇ μία ςαθερὰ ςιγμὴ Γ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, ἡ θέσις κάθε ἄλλης ςιγμῆς τοῦ μέρους ΑΜΒ προσδιορίζεται διὰ τοῦ διαςήματος ΓΜ καὶ τῆς γωνίας ΑΓΜ· ἐὰν λοιπὸν ἐκεῖθεν τῆς πλευρᾶς ΑΒ γένῃ ἡ γωνία ΑΓΜ′ ἴση μὲ τὴν ΑΓΜ καὶ ληφθῇ τὸ διάςημα ΓΜ′=ΓΜ, φανερὸν ὅτι αἱ δύο ςιγμαὶ Μ καὶ Μ′ θέλουν ἔχει τὴν αὐτὴν θέσιν εἰς τὰ δύο μέρη τοῦ ἐπιπέδου, καὶ τῶν δύο τούτων μερῶν ἐπιτεθέντων αἱ ςιγμαὶ Μ καὶ Μ′ θέλουν ταυτισθῇ. Κάθε λοιπὸν εὐθεῖα γραμμὴ χαραγμένη ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ προεκβλημένη ἀπροσδιορίστως διαιρεῖ τοῦτο τὸ ἐπίπεδον εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ας ὑποθέσωμεν τώρα, εἰ δυνατὸν, ὅτι μία ἀπροσδιόριστος εὐθεῖα ΧΨ περιέχεται ὅλη ἐντὸς ὁποιουδήποτε γωνιώδους χωρίου, φερ' εἰπεῖν, ἐντὸς τῆς γωνίας ΒΓΜ· ἡ εὐθεῖα αὕτη δὲν ἠμπορεῖ εἰ μὴ νὰ διαιρῇ εἰς δύο ἴσα ἢ ἄνισα μέρη τὸ περιεχόμενον μέρος τοῦ ἐπιπέδου ἐντὸς τῆς γωνίας ΒΓΜ· εἰς τὸ μέρος τοῦτο ἀντιστοιχεῖ τὸ μέρος ΒΓΜ′ κείμενον ἐκεῖθεν τῆς ΒΓ· πλὴν ἐπειδὴ ἐκτὸς τῶν δύο τούτων ἴσων μερῶν τοῦ ἐπιπέδου, ὑπάρχουν δύο ἄλλα περιλαμβανόμενα ἐντὸς τῶν ἴσων γωνιῶν ΑΓΜ, ΑΓΜ′ βλέπομεν ὅτι τὸ γωνιῶδες χωρίον ΒΓΜ δὲν εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὅλου ἐπιπέδου· ἡ εὐθεῖα λοιπὸν γραμμὴ ΧΨ ἡ ἐξ ὑποθέσεως μοιράζουσα εἰς δύο μέρη τὸ χωρίον ΒΓΜ, μοιράζει εἰς δύο ἄνισα μέρη τὸ ὅλον ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἐναντιοῦται εἰς τὴν φύσιν τῆς εὐθείας γραμμῆς.

Οχι μόνον διὰ τῆς ἁπλουστάτης ταύτης ἀρχῆς τὸ αἴτημα διὰ τὸ ὁποῖον ἡ ἀπόδειξίς μας δὲν ἦτον ἀκριβὴς, ἀποδεικνύεται, ἀλλ' ἀκόμη ἀμέσως ἠμπορεῖ νὰ ἀποδειχθῇ καὶ τὸ αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου. Τὸ αἴτημα τοῦτο, ὡς εἶναι γνωστὸν, εὐκόλως ἀνάγεται εἰς τὴν περίστασιν καθ' ἣν ἐν ᾧ ἡ μία τῶν εὐθειῶν ΑΓ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΑΒ, ἡ ἄλλη εὐθεῖα ΒΔ κάμνει μὲ τὴν ΑΒ γωνίαν μικροτέραν ὀρθῆς. Πρόκειται λοιπὸν νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς τὴν περίστασιν ταύτην ἡ ΒΔ προεκβληθεῖσα πρέπει νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΑΓ. σχ. 276.

Διότι, ἐὰν τὸ πρᾶγμα δὲν εἶχεν οὕτω, προεκβληθείσης τῆς ΑΓ πρὸς τὴν στιγμὴν Γ′ καὶ γενομένης τῆς γωνίας ΑΒΔ′=ΑΒΔ, ἡ εὐθεία ΓΓ′ ἤθελε περιέχεται ὅλη ἐντὸς τῆς γωνίας ΔΒΔ′ μικροτέρας δύο ὀρθῶν, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον.

Η ἀπόδειξις αὕτη δὲν ἠμποροῦσεν ἴσως περισσότερον παρὰ κάθε ἄλλην νὰ καταχωρισθῇ εἰς τὰ στοιχεῖα, ὥστε νὰ ἀκολουθῆται πάλιν εἰς αὐτὰ ἡ ὁδὸς τοῦ Εὐκλείδου ἥτις ἀφ' οὗ σηκωθῇ τὸ αἴτημα τοῦ δὲν ὑπόκειται εἰς κἀμμίαν ἀντίῤῥησιν; ἂς κρίνωσι περὶ τούτου οἱ Γεωμέτραι.

Ο σκοπός μας εἶναι τώρα νὰ δείξωμεν ὅτι διὰ τῆς ἀναλύσεως ἠμπορεῖ ἀκριβέστατα νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ΙΘ′ πρότασις καὶ αἱ ἄλλαι θεμελιώδεις προτάσεις τῆς Γεωμετρίας. Καὶ τοῦτο ἐρχόμεθα νὰ ἀναπτύξωμεν μὲ ὅλην τὴν ἀναγκαίαν λεπτομέρειαν, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ θεώρημα περὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

Αμέσως διὰ τῆς ἐπιθέσεως, καὶ χωρὶς κἀμμίαν προηγουμένην πρότασιν δεικνύεται ὅτι δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα ὅταν ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην προσκειμένην εἰς δύο γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν. Ας καλέσωμεν π τὴν περὶ ἧς ὁ λόγος πλευράν, Α καὶ Β τὰς δύο προσκειμένας γωνίας, Γ τὴν τρίτην γωνίαν. Πρέπει λοιπὸν ἡ γωνία Γ νὰ προσδιορίζεται κατὰ πάντα, ὅταν ἦναι γνωσταὶ αἱ γωνίαι Α καὶ Β μετὰ τῆς πλευρᾶς π· διότι ἐὰν εἰς τὰ τρία διδόμενα Α, Β, π ἦτον δυνατὸν νὰ ἀντιστοιχοῦν πολλαὶ γωνίαι Γ, ἤθελον ὑπάρχει τόσα διαφορετικὰ τρίγωνα ἔχοντα μίαν πλευρὰν ἴσην προσκειμένην εἰς δύο γωνίας ἴσας, ὅπερ ἀδύνατον· ἡ γωνία λοιπὸν Γ πρέπει νὰ ἦναι προσδιωρισμένη τις λειτουργία τῶν τριῶν ποσοτήτων Α, Β, π· τοῦτο δὲ ἐκφράζω οὕτω, $\Gamma = \varphi : (A, B, \pi)$.

Ας ληφθῇ ἡ ὀρθὴ γωνία ὡς μονάς· τότε αἱ γωνίαι Α, Β, Γ θέλουν εἶναι ἀριθμοὶ περιεχόμεναι μεταξὺ ο καὶ 2· καὶ ἐπειδὴ $\Gamma = \varphi : (A, B, \pi)$, λέγω ὅτι ἡ γραμμὴ π δὲν πρέπει νὰ εἰσέρχεται εἰς τὴν λειτουργίαν φ. Εἴδομεν, τῷ ὄντι, ὅτι ἡ γωνία Γ πρέπει νὰ προσδιορίζεται ἀπὸ μόνον τὰς ποσότητας Α,Β,π χωρὶς ἄλλην ὁποιανδήποτε γωνίαν ἢ γραμμήν· ἀλλ' ἡ γραμμὴ π εἶναι ἑτεροειδὴς μὲ τοὺς ἀριθμοὺς Α,Β,Γ· καὶ ἐὰν εἴχαμεν ὁποιανδήποτε ἐξίσωσιν μεταξὺ Α,Β,Γ,π, ἠμπορούσαμεν ἀπὸ αὐτὴν νὰ ἐξάξωμεν τὴν τιμὴν τῆς π διὰ λειτουργίας τῶν Α, Β, Γ· ἐκ τοῦ ὁποίου ἤθελε προκύψει ὅτι π ἰσοῦται μὲ ἀριθμὸν ἑτεροειδῆ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον· λοιπὸν π δὲν ἠμπορεῖ νὰ εἰσέρχεται εἰς τὴν λειτουργίαν φ, καὶ ἔχομεν ἁπλῶς $\Gamma = \varphi : (A, B)$ . . . . (1).

Ο τύπος οὗτος δεικνύει ὅτι, ἐὰν δύο γωνίαι ἑνὸς τριγώνου ἰσοῦνται μὲ τὰς δύο γωνίας ἑνὸς ἄλλου, ἡ τρίτη πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν τρίτην· καί, τούτου τεθέντος, εὔκολον εἶναι νὰ φθάσωμεν εἰς τὸ προκείμενον θεώρημα.

---

(1) Κατὰ τῆς ἀποδείξεως ταύτης ἐπροτέθη ὅτι, ἐὰν ἐφαρμόζετο, λέξιν κατὰ λέξιν, εἰς τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα, ἤθελεν ἀκολουθήσει ὅτι δύο γνωσταὶ γωνίαι ἀρκοῦν διὰ τὴν προσδιόρισιν τῆς τρίτης, τὸ ὁποῖον δὲν ὑπάρχει εἰς τὰ τοιαῦτα τρίγωνα. Πρὸς τοῦτο ἀποκρινόμεθα ὅτι τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα περιέχουν ἓν στοιχεῖον περισσότερον ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα, καὶ τὸ στοιχεῖον τοῦτο εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας τὴν ὁποίαν δὲν πρέπει νὰ παραβλέψωμεν. Εστω λοιπὸν ρ ἡ ἀκτίς, τότε ἀντὶ νὰ ἔχωμεν $\Gamma = \varphi (A, B, \pi)$, θέλομεν ἔχει $\Gamma = \varphi (A, B, \pi, \rho)$, ἢ μόνον $\Gamma = \varphi\left(A, B, \frac{\pi}{\rho}\right)$, δυνάμει τοῦ νόμου τοῦ ὁμοειδοῦς. Τώρα ἐπειδὴ ὁ λόγος $\frac{\pi}{\rho}$ εἶναι ἀριθμὸς καθὼς καὶ Α, Β, Γ, δὲν εἶναι κανένας λόγος ἡ τοιαύτη ποσότης νὰ μὴ εὑρίσκεται εἰς τὴν λειτουργίαν φ, καὶ διὰ τοῦτο δὲν ἠμποροῦμεν νὰ συμπεράνωμεν ὅτι $B = \varphi (A, B)$. Ο. Σ.

Εν πρώτοις ἔςω ΑΒΓ τρίγωνον ὀρθογώνιον εἰς Α (σχ. 109)· ἀπὸ τὴν ςιγμὴν Α ἂς κατεβασθῇ ἡ ΑΔ κάθετος ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης. Αἱ γωνίαι Β καὶ Δ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ ἰσοῦνται μὲ τὰς γωνίας Β καὶ Α τοῦ τριγώνου ΒΑΓ· κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα λοιπὸν ἡ τρίτη ΒΑΔ ἰσοῦται μὲ τὴν τρίτην Γ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ γωνία ΔΑΓ$=$Β, λοιπὸν ΒΑΔ$+$ΔΑΓ ἢ ΒΑΓ$=$Β$+$Γ: ἀλλ' ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή· αἱ δύο, λοιπὸν, ὀξεῖαι γωνίαι ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ὁμοῦ λαμβανόμεναι κάμνουν μίαν ὀρθήν.

Ακολούθως ἔςω τρίγωνον ὁποιονδήποτε τὸ ΒΑΓ (σχ. 112) καὶ ΒΓ μία πλευρὰ ἥτις νὰ μὴ ἦναι μικροτέρα ἑκάςης τῶν ἄλλων δύο: ἐὰν ἀπὸ τὴν ἀπέναντι γωνίαν Α κατεβασθῇ ἡ κάθετος ΑΔ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, ἡ κάθετος αὕτη θέλει πέσει εντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, καὶ μοιράσει αὐτὸ εἰς δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΑΔ, ΔΑΓ: τώρα εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΑΔ, αἱ δύο γωνίαι ΒΑΔ, ΑΒΔ κάμνουν ὁμοῦ μίαν ὀρθήν· καὶ πάλιν εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔΑΓ, αἱ δύο γωνίαι ΔΑΓ, ΑΓΔ κάμνουν ἐπίσης μίαν ὀρθήν. Αἱ τέσσαρες λοιπὸν ὁμοῦ, ἢ μόνον αἱ τρεῖς ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΒ, κάμνουν δύο ὀρθάς· εἰς κάθε λοιπὸν τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς.

Εντεῦθεν βλέπομεν ὅτι τὸ θεώρημα τοῦτο, θεωρούμενον ἐκ τῶν προτέρων δὲν ἐξαρτᾶται διόλου ἀπὸ μίαν ἄλυσιν προτάσεων, καὶ ὅτι ἀμέσως συνάγεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τοῦ ὁμοειδοῦς· ἀρχὴν ἥτις πρέπει νὰ ἔχῃ χώραν εἰς κάθε σχέσιν μεταξὺ ὁποιωνδήποτε ποσοτήτων. Αλλ' ἂς ἐξακολουθήσωμεν, καὶ ἂς δείξωμεν ὅτι ἀπὸ τὴν αὐτὴν πηγὴν δυνατὸν νὰ ἐξαχθῶσι τὰ ἄλλα θεμελιώδη θεωρήματα τῆς Γεωμετρίας.

Ας φυλάξωμεν ὡς ἀνωτέρω τὰς αὐτὰς ὀνομασίας, καὶ περιπλέον ἂς καλέσωμεν μ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς τὴν γωνίαν Α, καὶ ν τὴν ἀπέναντι εἰς τὴν γωνίαν Β. Η ποσότης μ πρέπει νὰ προσδιορίζεται ἀπὸ μόνον τὰς ποσότητας Α,Β,π· λοιπὸν μ εἶναι λειτουργία τῶν Α,Β,π, καὶ ὁ λόγος $\frac{\mu}{\pi}$ εἶναι παρομοίως μία τις λειτουργία τῶν αὐτῶν ποσοτήτων, ὥςε ἠμποροῦμεν νὰ κάμωμεν $\frac{\mu}{\pi}=\psi:(A,B,\pi)$· ἀλλ' ὁ λόγος δύο γραμμῶν δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι παρὰ ἕνας ἀριθμός· λοιπὸν $\frac{\mu}{\pi}$ εἶναι ἀριθμὸς καθὼς ἀκόμη Α καὶ Β· ἡ λειτουργία λοιπὸν ψ παντάπασι δὲν πρέπει νὰ περιέχῃ τὴν γραμμὴν π, καὶ ἔχομεν ἁπλῶς $\frac{\mu}{\pi}=\psi:(A, B)$, ἢ $\mu=\pi\psi:(A, B)$· παρομοίως λοιπὸν ἔχομεν $\nu=\pi\psi:(A, B)$.

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ἓν ἄλλο τρίγωνον τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ τὰς αὐτὰς γωνίας Α, Β, Γ, καὶ ὅτι εἰς τὰς γωνίας ταύτας εἶναι ἀμοιβαίως ἀπέναντι αἱ πλευραὶ μ', ν', π'· ἐπειδὴ Α καὶ Β μένουν σταθερά, θέλομεν ἔχει εἰς τοῦτο τὸ νέον τρίγωνον $\mu' = \pi'\psi : (A, B)$, καὶ $\nu' = \pi'\psi : (A, B)$. Λοιπὸν $\mu : \mu' :: \nu : \nu' :: \pi : \pi'$. Εἰς τὰ ἰσογώνια λοιπὸν τρίγωνα, αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι.

Ἀπὸ τὴν γενικὴν ταύτην πρότασιν συνάγεται ὡς μερικὴ περίστασις ἐκείνη τὴν ὁποίαν ὑπεθέταμεν εἰς τὸ κείμενον διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς Κ′ προτάσεως. Τῷ ὄντι τὰ τρίγωνα ΑΖΗ, ΑΜΛ ἔχουν δύο γωνίας ἴσας τὴν καθε μίαν μὲ τὴν καθε μίαν, δηλαδὴ, τὴν γωνίαν Α κοινὴν, καὶ μίαν ὀρθὴν γωνίαν. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ταῦτα εἶναι ἰσογώνια, καὶ διδουν τὴν ἀναλογίαν ΑΖ : ΑΛ :: ΑΗ : ΑΜ, διὰ τῆς ὁποίας ἡ Κ′ πρότασις εἶναι πληρέστατα ἀποδειγμένη.

Η πρότασις τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης εἶναι, καθὼς ἠξεύρομεν, συνέπεια τῆς προτάσεως τῶν ἰσογωνίων τριγώνων. Ἰδοὺ λοιπὸν τρεῖς θεμελιώδεις προτάσεις τῆς Γεωμετρίας, ἡ τῶν τριῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου, ἡ τῶν ἰσογωνίων τριγώνων, καὶ ἡ τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης, συναγόμεναι ἁπλούστατα καὶ ἀμέσως ἀπὸ τὴν θεωρίαν τῶν λειτουργιῶν. Μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνατὸν νὰ ἀποδειχθῶσιν ἐπιτομώτατα αἱ ἀποβλέπουσαι τὰ ὅμοια σχήματα καὶ τὰ ὅμοια στερεὰ προτάσεις.

Ἔστω ΑΒΓΔ ὁποιονδήποτε πολύγωνον· ληφθείσης μιᾶς πλευρᾶς ΑΒ ὡς βάσεως, ἂς σχηματισθῶσιν ἐπὶ ταύτης τῆς βάσεως τόσα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ, κτλ, ὅσαι εἶναι αἱ ἐκτὸς τῆς ἰδίας βάσεως γωνίαι Γ, Δ, Ε, κτλ. Ἔστω ἡ βάσις $AB = \pi$, καὶ Α, Β αἱ δύο γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ αἱ προσκείμεναι εἰς τὴν πλευρὰν ΑΒ· ἔστωσαν A' καὶ B' αἱ δύο γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΔ αἱ προσκείμεναι εἰς τὴν αὐτὴν πλευρὰν ΑΒ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Τὸ σχῆμα ΑΒΓΔΕ κατὰ πάντα προσδιορίζεται, ὅταν ἦναι γνωστὴ ἡ πλευρὰ π μετὰ τῶν γωνιῶν A, B, A', B', A'', B'', κτλ, καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀπαιτουμένων διὰ τὴν τοιαύτην προσδιόρισιν εἶναι $2\nu - 3$, ἔνθα ν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου. Τούτου τεθέντος, ὁποιαδήποτε γραμμὴ ἢ πλευρὰ χ ἠγμένη ὁπωσδήποτε εἰς τὸ πολύγωνον, πρέπει νὰ ἦναι λειτουργία τῶν ποσοτήτων ἐκείνων αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν προσδιόρισιν τοῦ πολυγώνου· ἐπειδὴ δὲ $\frac{\chi}{\pi}$ εἶναι ἀριθμὸς, ἠμποροῦμεν νὰ ὑποθέσωμεν $\frac{\chi}{\pi} = \psi : (A, B, A', B'$ κτλ.$)$, ἢ $\chi = \pi\psi : (A, B, A', B'$, κτλ.$)$, καὶ ἡ λειτουργία ψ δὲν περιέχει παντάπασι τὴν πλευρὰν π. Ἐὰν μὲ τὰς αὐτὰς γωνίας A, B, A', B'

κτλ, καὶ μὲ μίαν ἄλλην πλευρὰν π', σχηματίσωμεν ἄλλο δεύτερον πολύγωνον, θέλομεν ἔχει διὰ τὴν γραμμὴν χ' τὴν ἀντιςοιχοῦσαν ἢ ὁμόλογον εἰς τὴν χ, τὴν τιμὴν $\chi'=\pi'\psi:(A, B, A', B', \text{κτλ.})$· λοιπὸν $\chi:\chi'::\pi:\pi'$. Τὰ οὕτω κατασκευαζόμενα σχήματα δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν, ὅμοια σχήματα· εἰς τὰ ὅμοια λοιπὸν σχήματα αἱ ὁμόλογοι γραμμαὶ εἶναι ἀνάλογοι. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, ὄχι μόνον αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ, αἱ ὁμόλογοι διαγώνιοι, ἀλλ' ἀκόμη αἱ περατούμεναι κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον γραμμαὶ εἰς τὰ δύο σχήματα, εἶναι μεταξύ των ὡς δύο ἄλλαι ὁποιαιδήποτε ὁμόλογοι γραμμαί.

Ἄς καλέσωμεν Ε τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πρώτου πολυγώνου· ἡ ἐπιφάνεια αὕτη εἶναι ὁμοειδὴς μὲ τὸ τετράγωνον π^2· πρέπει λοιπὸν $\frac{E}{\pi^2}$ νὰ ἦναι ἀριθμὸς περιέχων μόνον τὰς γωνίας A, B, A', B', κτλ, εἰς τρόπον ὥςε $E=\pi^2\varphi:(A, B, A', B', \text{κτλ.})$. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἐὰν E' παριςάνῃ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δευτέρου πολυγώνου, θέλομεν ἔχει $E'=\pi'^2\varphi:(A, B, A', B', \text{κτλ})$. Λοιπὸν $E:E'::\pi^2:\pi'^2$· ὅθεν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ὁμοίων σχημάτων εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἄς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὰ πολύεδρα. Δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι μία ἕδρα προσδιορίζεται διὰ μέσου μιᾶς γνωςῆς πλευρᾶς π καὶ πολλῶν γωνιῶν A, B, Γ, κτλ. Ἀκολούθως ἑκάςη τῶν κορυφῶν τῶν ἐκτὸς ταύτης τῆς βάσεως ςερεῶν γωνιῶν, προσδιορίζεται διὰ μέσου τριῶν δεδομένων, τὰ ὁποῖα δυνατὸν νὰ θεωρηθῶσιν ὡς τόσαι γωνίαι· ὥςε ἡ ὁλόκληρος προσδιόρισις τοῦ πολυέδρου κρέμαται ἀπὸ μίαν πλευρὰν π, καὶ ἀπὸ πολλὰς γωνίας A, B, Γ, κτλ τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς μεταβάλλεται κατὰ τὴν φύσιν τοῦ πολυέδρου. Τούτου τεθέντος, μία γραμμὴ ἡ ὁποία ἑνόνει δύο κορυφὰς, ἢ γενικώτερον, ἡ ὁποία ἄγεται κατὰ προσδιορισμένον τινα τρόπον εἰς τὸ πολύεδρον, θέλει εἶναι λειτουργία τῶν ποσοτήτων π, A, B, Γ κτλ· ἐπειδὴ δὲ $\frac{\chi}{\pi}$ πρέπει νὰ ἦναι ἀριθμὸς, ἡ ἴση λειτουργία μὲ $\frac{\chi}{\pi}$, ἀνάγκη νὰ περιέχῃ μόνον τὰς γωνίας A, B, Γ, κτλ, καὶ δυνατὸν νὰ ὑποτεθῇ $\chi=\pi\varphi:(A, B, \Gamma. \text{κτλ})$. Η ἐπιφάνεια τοῦ ςερεοῦ εἶναι ὁμοειδὴς μὲ π^2· διὰ τοῦτο, ἡ ἐπιφάνεια αὕτη ἠμπορεῖ νὰ παραςαθῇ διὰ $\pi^2\psi:(A, B, \Gamma, \text{κτλ})$· ἡ ςερεότης του εἶναι ὁμοειδὴς μὲ π^3, καὶ ἠμπορεῖ νὰ παραςαθῇ διὰ $\pi^3\Pi:(A, B, \Gamma, \text{κτλ})$· αἱ σημειούμεναι δὲ λειτουργίαι διὰ ψ καὶ Π εἶναι ἀνεξάρτητοι τῆς πλευρᾶς π.

Ἂς ὑποθέσωμεν ἄλλο δεύτερον ςερεὸν κατασκευασμένον μὲ τὰς αὐτὰς γωνίας Α, Β, Γ, κτλ., καὶ μὲ μίαν πλευρὰν π' διαφερετικὴν τῆς π: τὰ οὕτω κατασκευασμένα ςερεὰ ὀνομάζομεν ὅμοια ςερεὰ καὶ, τούτου τεθέντος, ἡ γραμμὴ ἥτις εἰς τὸ πρῶτον ςερεὸν ἦτον πφ: (Α, Β, Γ, κτλ,) ἢ ἁπλῶς πφ, εἰς τὸ δεύτερον θέλει εἶναι π'φ' ἡ ἐπιφάνεια ἥτις εἰς τὸ ἓν ἦτον $\pi^2\psi$, εἰς τὸ ἄλλο θέλει εἶναι $\pi'^2\psi$, καὶ τέλος πάντων ἡ ςερεότης ἥτις εἰς τὸ πρῶτον ἦτον $\pi^3\Pi$ εἰς τὸ δεύτερον θέλει εἶναι $\pi'^3\Pi$. Λοιπὸν 1ον εἰς τὰ ὅμοια ςερεὰ αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἢ γραμμαὶ εἶναι ἀνάλογοι. 2ον αἱ ἐπιφάνειαί των εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. 3ον αἱ ςερεότητές των ὡς οἱ κύβοι τῶν αὐτῶν πλευρῶν.

Αἱ αὐταὶ ἀρχαὶ εὐκόλως ἐφαρμόζονται εἰς τὸν κύκλον. Ἔςω γ ἡ περιφέρεια καὶ σ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ρ· ἐπειδὴ δύο κύκλοι τὴν αὐτὴν ἔχοντες ἀκτῖνα δὲν ἠμποροῦν να ἦναι ἄνισοι, διὰ τοῦτο αἱ ποσότητες $\frac{\gamma}{\rho}$ καὶ $\frac{\sigma}{\rho^2}$ πρέπει νὰ ἦναι προσδιορισμέναι λειτουργίαι τῆς ρ· πλὴν ἐπειδὴ αἱ ποσότητες αὗται εἶναι ἀριθμοὶ, ἡ ἔκφρασίς των δὲν πρέπει διόλου νὰ περιέχῃ τὴν γραμμὴν ρ· οὕτω θέλομεν ἔχει $\frac{\gamma}{\rho} = \alpha$, καὶ $\frac{\sigma}{\rho^2} = \beta$, ἔνθα α καὶ β εἶναι ςαθεροὶ ἀριθμοί. Ἔςω γ' ἡ περιφέρεια καὶ σ' ἡ ἐπιφάνεια κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ρ': θέλομεν ἔχει λοιπὸν ὡσαύτως $\frac{\gamma'}{\rho'} = \alpha$, $\frac{\sigma^2}{\sigma'^2} = \beta$. Λοιπὸν $\gamma : \gamma' :: \rho : \rho'$ καὶ $\sigma : \sigma' :: \rho^2 : \rho'^2$· ὅθεν αἱ μὲν περιφέρειαι τῶν κύκλων εἶναι ὡς αἱ ἀκτῖνες, αἱ δὲ ἐπιφάνειαί των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων.

Ἂς θεωρήσωμεν τομέα τοῦ ὁποίου ρ εἶναι ἡ ἀκτὶς καὶ Α ἡ εἰς τὸ κέντρον γωνία· ἔςω χ τὸ τόξον τὸ ὁποῖον περατόνει τὸν τομέα, καὶ ψ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αὐτοῦ τομέως. Ἐπειδὴ ὁ τομεὺς ὁλοκλήρως προσδιορίζεται ὅταν ἦναι γνωςαὶ αἱ ποσότητες ρ καὶ Α, πρέπει χ καὶ ψ, νὰ ἦναι προσδιορισμέναι λειτουργίαι τῶν ρ καὶ Α· λοιπὸν $\frac{\chi}{\rho}$ καὶ $\frac{\psi}{\rho^2}$ εἶναι ὡσαύτως παρόμοιαι λειτουργίαι. Ἀλλὰ $\frac{\chi}{\rho}$ καὶ $\frac{\psi}{\rho^2}$ εἶναι ἀριθμοί· αἱ ποσότητες λοιπὸν αὗται δὲν πρέπει νὰ περιέχουσι ρ, καὶ εἶναι ἁπλῶς λειτουργίαι τῆς Α, εἰς τρόπον ὥςε $\frac{\chi}{\rho} = \varphi : A$, καὶ $\frac{\psi}{\rho^2} = \omega : A$. Ἔςωσαν χ' καὶ ψ' τὸ τόξον καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἄλλου τομέως τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι Α καὶ ἡ ἀκτὶς ρ' τοὺς δύο τούτους τομεῖς ὀνομάζομεν τομεῖς ὁμοίους· ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία Α εἶναι ἴση καὶ εἰς τὰ δύο μέρη, διὰ τοῦτο $\frac{\chi'}{\rho'}=\varphi:A$, καὶ $\frac{\psi'}{\rho'^2}=\omega:A$. Λοιπὸν $\chi:\chi'::\rho:\rho'$, καὶ $\psi:\psi'::\rho^2:\rho'^2$. Δηλονότι τὰ ὅμοια τόξα ἢ τὰ τόξα τῶν ὁμοίων τομέων εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀκτίνων, αὐτοὶ δὲ οἱ τομεῖς εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἤθελεν ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ σφαῖραι εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ κύβοι τῶν ἀκτίνων των.

Εἰς τὰ ἀνωτέρω ὑποτίθεται ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι μετροῦνται ἀπὸ τὸ γινόμενον δύο γραμμῶν, καὶ αἱ στερεότητες ἀπὸ τὸ γινόμενον τριῶν· ἀλλὰ καὶ τοῦτο εὐκόλως ἀποδεικνύεται διὰ τῆς ἀναλύσεως. Ἂς θεωρήσωμεν ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι π καὶ $\varkappa$, καὶ ἂς παραστήσωμεν τὴν ἐπιφάνειάν του ἥτις εἶναι λειτουργία τῶν π καὶ $\varkappa$, διὰ $\varphi:(\pi,\varkappa)$· ἐὰν ἡ διάστασις π λάβῃ μίαν αὔξησιν π' καὶ γένῃ $\pi+\pi'$, φανερὸν ὅτι καὶ τὸ ὀρθογώνιον λαμβάνει αὔξησιν ἴσην μὲ τὸ ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι π' καὶ $\varkappa$· ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι $\pi+\pi'$ καὶ $\varkappa$, σύγκειται ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι π καὶ $\varkappa$, καὶ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι π' καὶ $\varkappa$· λοιπὸν

$$\varphi:(\pi+\pi',\varkappa)=\varphi:(\pi,\varkappa)+\varphi:(\pi',\varkappa).$$

Ἔστω $\pi'=\pi$, ἔχομεν $\varphi(2\pi,\varkappa)=2\varphi(\pi,\varkappa)$. Ἔστω $\pi'=2\pi$, ἔχομεν $\varphi(3\pi,\varkappa)=\varphi(\pi,\varkappa)+\varphi(2\pi,\varkappa)=3\varphi(\pi,\varkappa)$. Ἔστω $\pi'=3\pi$, ἔχομεν $\varphi(4\pi,\varkappa)=\varphi(\pi,\varkappa)+\varphi(3\pi,\varkappa)=4\varphi(\pi,\varkappa)$. Ἐν γένει λοιπὸν, ἐὰν Κ παριστάνῃ ὁποιονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμὸν, θέλομεν ἔχει $\varphi(K\pi,\varkappa)=K\varphi(\pi,\varkappa)$ ἢ $\frac{\varphi(\pi,\varkappa)}{\pi}=\frac{\varphi(K\pi,\varkappa)}{\pi K}$· ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι $\frac{\varphi(\pi,\varkappa)}{\pi}$ εἶναι τοιαύτη λειτουργία τῆς π, ὥστε δὲν πάσχει τὴν παραμικρὰν μεταβολὴν ὅταν εἰς αὐτὴν ἀντὶ π τεθῇ ὁποιονδήποτε πολλαπλάσιον τῆς π τὸ $K\pi$. Η λειτουργία λοιπὸν αὕτη εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς π, καὶ δὲν πρέπει νὰ ἦναι εἰ μὴ περιεκτικὴ τῆς $\varkappa$. Ἀλλὰ διὰ λόγον παρόμοιον $\frac{\varphi(\pi,\varkappa)}{\varkappa}$ πρέπει νὰ ἦναι ἀνεξάρτητος τῆς $\varkappa$· λοιπὸν $\frac{\varphi(\pi,\varkappa)}{\pi\varkappa}$ δὲν περιέχει οὔτε π οὔτε $\varkappa$, καὶ οὕτως ἡ ποσότης αὕτη πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ σταθερὰν τινὰ α. Θέλομεν ἔχει λοιπὸν $\varphi(\pi,\varkappa)=\alpha\pi\varkappa$· καὶ ἐπειδὴ κίποτε δὲν ἐμποδίζει νὰ λάβωμεν $\alpha=1$, διὰ τοῦτο $\varphi(\pi, \kappa)=\pi\kappa$ ὅθεν ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς ὀρθογωνίου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο του διαστάσεων.

Μὲ τρόπον κατὰ πάντα ὅμοιον ἤθελεν ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ στερεότης ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι π, κ, ρ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον $\pi\kappa\rho$ τῶν τριῶν του διαστάσεων.

Τοῦ λοιποῦ παρατηροῦμεν ὅτι τῆς θεωρίας τῶν λειτουργιῶν, διὰ τῆς ὁποίας, ὡς βλέπομεν, ἀποδεικνύονται ἁπλούστατα αἱ θεμελιώδεις προτάσεις τῆς Γεωμετρίας, ἔγινεν ἤδη χρῆσις μὲ πολλὴν ἐπιτυχίαν πρὸς ἀπόδειξιν τῶν θεμελιωδῶν ἀρχῶν τῆς Μηχανικῆς. Βλέπε τὰ ὑπομνήματα τοῦ Τωρίνου, τόμ. Β΄.

Ἐν τέλει πρέπει νὰ ὁμολογήσωμεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω θεωρία, ἂν καὶ ἐπιστηριγμένη ἐπάνω εἰς τὰ πλέον στερεὰ θεμέλια, ἐπολεμήθη ἀπὸ τὸν Κ. Λέσλιον, περίφημον προφέσσορα τοῦ Ἐδιμβούργου, εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας του εἰς τὴν δευτέραν καὶ τρίτην ἔκδοσίν των· ἀλλὰ χωρὶς νὰ ἔμβωμεν εἰς κἀμμίαν ἔρευναν περὶ τῆς ὑποθέσεως ταύτης, ἀρκούμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι αἱ ἐνστάσεις τοῦ Κ. Λεσλίου ἐξ ὁλοκλήρου ἀνεσκευάσθησαν ἐν πρώτοις μὲν ἀπὸ τὸν συμπατριώτην του Κ. Πλεϋφαῖρον, εἰς τὴν ἐν Ἐδιμβούργῳ ἀναθεώρησιν Τόμ. Κ΄· ἔπειτα δὲ καὶ ἀπὸ τὸν Κ. Μαυρίκιον τὸν ἐκ τῆς ἐν Παρισίοις Ἀκαδημίας τῶν ἐπιστημῶν, εἰς τὴν καθολικὴν βιβλιοθήκην τῆς Γενεύης, μηνὶ ὀκτωβρίῳ κατὰ τὸ ἔτος 1819. Ἠμπορεῖ δὲ ἀκόμη νὰ ἴδῃ τινὰς τὴν ἔρευναν τῶν αὐτῶν τούτων ἐνστάσεων, εἰς τὴν ἀγγλικὴν ἔκδοσιν τῶν στοιχείων μας τὴν ὁποίαν κατὰ τὸ ἔτος 1822 ἐν Ἐδιμβούργῳ ἔδωκεν ὁ Κ. Δαβὶδ Βριουστέρος.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ΄,

Περὶ τῆς προσεγγίσεως τῆς ΙϚ΄ προτάσεως τοῦ Δ΄ βιβλίου.

Ἀφ᾽ οὗ εὕρομεν δύο ἀκτῖνας τὴν μὲν ὑπερέχουσαν τὴν δὲ ἐλλείπουσαν τῆς ἀληθινῆς τῶν ὁποίων τὰ πρῶτα ψηφία εἶναι τὰ αὐτά, δυνάμεθα τάχιστα νὰ τελειώσωμεν τὸν ὑπολογισμὸν διά τινος ἀλγεβρικοῦ τύπου.

Ἔστω α ἡ ἐλλείπουσα ἀκτὶς καὶ β ἡ ὑπερέχουσα, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ εἶναι μικρά· ἔστωσαν α' καὶ β' αἱ ἀκόλουθοι ἀκτῖνες αἱ ὁποῖαι συνάγονται ἀπὸ τοὺς τύπους $\beta'=\sqrt{\alpha\beta}$, $\alpha'=\sqrt{\left(\alpha.\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$.

Τὸ ζητούμενον εἶναι ὁ τελευταῖος ὅρος τῆς σειρᾶς $\alpha, \alpha', \alpha''$, κτλ, ὅστις εἶναι ἐταυτῷ ὁ τῆς σειρᾶς β, β', β'' κτλ. Ἂς καλέσωμεν τὸν τελευταῖον τοῦτον ὅρον χ, καὶ ἔστω $\beta=\alpha(1+\omega)$· δυνατὸν νὰ ὑποτεθῇ $\chi=\alpha(1+\Pi\omega+K\omega^2+$ κτλ$)$, ἔνθα Π καὶ K εἶναι ἀπροσδιόριστοι συντελεσταί. Τώρα αἱ τιμαὶ τῆς β' καὶ α' δίδουν

$$\beta' = \alpha\left(1 + \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{1}{8}\omega^2 + \text{κτλ.}\right)$$

$$\alpha' = \alpha\left(1 + \tfrac{1}{4}\omega - \frac{1}{32}\omega^2 + \text{κτλ.}\right).$$

Καὶ ἐὰν κάμωμεν παρομοίως $\beta' = \alpha'(1+\omega')$. θέλομεν ἔχει

$$\omega' = \tfrac{1}{4}\omega - \frac{5}{32}\omega^2 + \text{κτλ.}$$

Ἀλλ' ἡ τιμὴ τῆς χ πρέπει νὰ ἦναι ἡ αὐτὴ, εἴτε ἡ σειρὰ α, α', α'', κτλ. ἀρχίζει ἀπὸ α εἴτε ἀπὸ α'· λοιπὸν θέλομεν ἔχει

$$\alpha\left(1 + \Pi\omega + K\omega^2 + \text{κτλ.}\right) = \alpha'\left(1 + \Pi\omega' + K\omega'^2 + \text{κτλ}\right)$$

Ἀντεισάγοντες εἰς ταύτην τὴν ἐξίσωσιν τὰς τιμὰς τῶν α' καὶ ω' διὰ α καὶ ω ἐκφραζομένας, καὶ συγκρίνοντες τοὺς ὁμοίους ὅρους εὑρίσκομεν $\Pi = \tfrac{1}{3}$, καὶ $K = -\frac{1}{15}$· λοιπὸν

$$\chi = \alpha\left(1 + \tfrac{1}{3}\omega - \frac{1}{15}\omega^2\right).$$

Ἐὰν ἡ πρώτη ἡμίσεια τῶν ψηφίων τῶν ἀκτίνων α καὶ β ἦναι ἡ αὐτὴ καὶ εἰς τὰς δύο, δυνάμεθα νὰ ἀποῤῥίψωμεν τὸν ὅρον ω^2, καὶ ἡ ἀνωτέρω τιμὴ ἀνάγεται εἰς $\chi = \alpha(1 + \tfrac{1}{3}\omega) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{3}$· Οὕτω κάμνοντες $\alpha = 1{,}1282657$, καὶ $\beta = 1{,}1286063$, συνάγομεν ἀμέσως $\chi = 1{,}1283792$.

Ἐὰν δὲ αἱ ἀκτῖνες συμφωνοῦν μόνον εἰς τὸ τρίτον μέρος τῶν ψηφίων των, πρέπει νὰ λάβωμεν τοὺς τρεῖς ὅρους τῆς ἀνωτέρω σειρᾶς: οὕτω κάμνοντες $\alpha = 1{,}1265639$ καὶ $\beta = 1{,}1320149$, εὑρίσκομεν $\chi = 1{,}1283791$.

Ἠμπορούσαμεν νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι α καὶ β συμφωνοῦν εἰς ἔτι ὀλιγώτερα ψηφία· ἀλλὰ τότε ἔπρεπε νὰ λογαριάσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ χ μὲ περισσοτέρους ὅρους.

Η προσέγγισις τῆς ΙΔ' προτάσεως, ἥτις εἶναι τοῦ Ἰακώβου Γρηγορίου, ἐπιδέχεται παρομοίους ἐπιτομάς· περὶ τούτων παραπέμπομεν εἰς τὸ σύγγραμμα τούτου τοῦ συγγραφέως ἐπιγραφόμενον: *Vera circuli et hyperbolae quadratura* σύγγραμμα μεγάλης ἀξίας διὰ τὸν χρόνον καθ' ὃν ἐφάνη.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Δ'.

Ἔνθα ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον καὶ τὸ τετράγωνόν του, εἶναι ἄλογοι ἀριθμοί.

Ἂς θεωρήσωμεν τὴν ἄπειρον σειρὰν

$$1 + \frac{\alpha}{\omega} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^2}{\omega.\omega+1} + \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{\alpha^3}{\omega\cdot\omega+1\cdot\omega+2} + \text{κτλ.}$$