ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.

Περιέχον τὴν λύσιν διαφόρων μερικῶν περιστάσεων τῆς Τριγωνομετρίας.

υϛʹ. Η λύσις τῶν τριγώνων, ὁποίαν τὴν ἐξεθέσαμεν, δὲν ἀφίνει νὰ εὐχηθῇ ἄξιον καθ' ὅσον ἀποβλέπει τὴν γενικότητα. Δίδονται ὅμως τινὲς περιστάσεις εἰς τὰς ὁποίας ἡ χρῆσις μερικῶν λύσεων ἀντὶ τῶν γενικῶν, εἶναι ἐπωφελὴς, εἴτε ἐπειδὴ δι' αὐτῶν συντέμνονται οἱ ὑπολογισμοὶ, εἴτε ἐπειδὴ τὰ ἐξαγόμενα ἀποκαθίστανται ἀκριβέστερα καὶ μᾶλλον ἀνεξάρτητα τοῦ σφάλματος τῶν πινάκων. Εἰς τὸ παράρτημα τοῦτο θέλομεν λύσει τινὰς τῶν μερικῶν τούτων περιστάσεων, ἐκλέγοντες τὰς μᾶλλον ἐν χρήσει, ἢ ἐκείνας αἱ ὁποῖαι φέρουν εἰς πλέον ἀξιοσημειώτους τύπους.

Καὶ ἐνταῦθα σημειόνομεν τὰς γωνίας τοῦ προτεθέντος τριγώνου, εὐθυγράμμου ἢ σφαιρικοῦ, δια τῶν χαρακτήρων Α, Β, Γ, τὰς δὲ ἀμοιβαίως εἰς ταύτας ἀπέναντι πλευρὰς διὰ τῶν α, β, γ. Περιπλέον τὴν ἀκτῖνα ὑποθέτομεν $=1$, ἡ ὁποία ὑπόθεσις δὲν φέρει τὴν παραμικρὰν βλάβην εἰς τὴν γενικότητα τῶν ἐξαγομένων. Αἱ γωνίαι Α, Β, Γ ἐκφράζονται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν, εἴτε διὰ τῶν μοιρῶν, εἴτε διὰ τῶν ἀπολύτων μηκῶν τῶν μετρούντων αὐτὰς τόξων, τὰ ὁποῖα λαμβάνονται εἰς τὸν κύκλον τῆς ἀκτῖνος 1. Ἐὰν τόξον χ ἢ γωνία, ἦναι μικρότατον, ἠμποροῦμεν ἀντὶ τοῦ ἡμ χ καὶ συν χ, νὰ θέσωμεν τὰς διὰ σειρῶν ἐκφραζομένας τιμάς των: τοῦτ' ἔστι: $\text{ἡμ}\,\chi = \chi - \frac{\chi^3}{1\cdot 2\cdot 3}$ $+\text{κ.τ.λ.}$, $\text{συν}\,\chi = 1 - \frac{\chi^2}{1.2} + \text{κτλ.}$ ἀλλὰ τότε χ πρέπει νὰ ἦναι ἐκπεφρασμένον διὰ μοιρῶν τῆς ἀκτῖνος. Ἀνίσως ἀφ' οὗ εὕρομεν τὴν ἔκφρασιν ἑνὸς τόξου διὰ μερῶν τῆς ἀκτῖνος, θελήσωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διὰ λεπτῶν ἔκφρασιν τοῦ ἰδίου τόξου, πρέπει νὰ τὸ πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν εἰς τὴν ἀκτῖνα περιεχομένων λεπτῶν· ἐπειδὴ ἐὰν καλέσωμεν θ τὸ μῆκος ἑνὸς τόξου, π τὸ τῆς ἡμιπεριφερείας, ἔχομεν φανερὰ τὴν ἀναλογίαν $\pi : \theta :: 20000 : \chi'$ ἐκ τῆς ὁποίας $\chi = \theta . \frac{20000}{\pi}$. τώρα $\frac{20000}{\pi}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν εἰς τὴν ἀκτῖνα περιεχομένων λεπτῶν, καὶ ὅστις ἰσοῦται μὲ 6366.1977237' ὁ λογάριθμος δὲ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου εἶναι 3.80388012297.

§ Α'. Περὶ τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων τῶν ὁποίων δύο γωνίαι εἶναι πολλὰ μικραί.

γζ'. Ας ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ γωνίαι Α καὶ Β εἶναι πολλὰ μικραὶ, καὶ ἀκολούθως ἡ γωνία Γ πολλὰ ἀμβλεῖα· ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν ἡμ $A = A - \frac{1}{6}A^3$, ἡμ $B = B - \frac{1}{6}B^3$, καὶ ἡμ $\Gamma =$ ἡμ $(A+B) = A+B - \frac{1}{6}(A+B)^3$. Γνωρίζοντες λοιπὸν τὴν πλευρὰν γ μὲ τὰς προσκειμένας γωνίας Α καὶ Β, εὑρίσκομεν τὰς ἄλλας δύο πλευρὰς διὰ τῶν τύπων $\alpha = \frac{\gamma \text{ ἡμ } A}{\text{ἡμ }(A+B)}$, $\beta = \frac{\gamma \text{ ἡμ } B}{\text{ἡμ }(A+B)}$; οἱ ὁποῖοι, μετὰ τὴν ἀντεισαγωγὴν τῶν ἀνωτέρω τιμῶν καὶ τὴν ἀναγωγὴν, ἀποβαίνουν

$$\alpha = \frac{\gamma A}{A+B}\left(1 + \frac{2AB+B^2}{6}\right)$$

$$\beta = \frac{\gamma B}{A+B}\left(1 + \frac{A^2+2AB}{6}\right)$$

καὶ ἐντεῦθεν προκύπτει $\alpha+\beta-\gamma = \frac{1}{2}\gamma AB$. Αἱ τιμαὶ αὗται εἶναι ἀκριβεῖς, ἐὰν δὲν θεωρηθῶσιν οἱ ὅροι οἵτινες περιέχουν τέσσαρας διαςάσεις εἰς Α καὶ Β.

γη'. Ας θεωρήσωμεν τὴν περίςασιν καθ' ἣν δίδονται αἱ δύο πλευραὶ α καὶ β, μετὰ τῆς περιεχομένης γωνίας $\Gamma = \pi - \theta$, ὅπου θ παριςάνει γωνίαν μικροτάτην. Εν πρώτοις ἔχομεν $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$ συν $\theta = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) = (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta\theta^2$· λοιπὸν

$$\gamma = \alpha + \beta - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\alpha\beta\theta^2}{\alpha+\beta}\cdot$$

ἀκολούθως ἡ γωνία Α εὑρίσκεται διὰ τῆς ἐξισώσεως ἡμ $A = \frac{\alpha}{\gamma}$ ἡμ $\Gamma = \frac{\alpha}{\gamma}$ ἡμ θ· καὶ ἐντεῦθεν, διὰ τῆς ἀντεισαγωγῆς τῆς τιμῆς τῆς γ καὶ τοῦ ἡμ θ, συνάγομεν, ἡμ $A = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\theta + \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}\theta^3 - \frac{1}{6}\theta^3\right) = \frac{\alpha\theta}{\alpha+\beta}\left(1 + \frac{\alpha\beta-\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta)^2}\cdot\frac{\theta^2}{6}\right)$.

Λοιπὸν $A =$ ἡμ$A + \frac{1}{6}$ ἡμ$^3 A = \frac{\alpha\theta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha\beta(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)^2}\cdot\frac{\theta^3}{6}$. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἠθέλαμεν συνάξει τὴν τιμὴν τῆς Β μεταθέτοντες μεταξύ των τὰ γράμματα α καὶ β· πλὴν ἀφ' οὗ γνωρίσωμεν τὴν γωνίαν Α, ἀμέσως προσδιορίζομεν τὴν Β· διότι Β=θ−Α. Ἐὰν ἡ γωνία θ δοθῇ διὰ λεπτῶν, καὶ θελήσωμεν νὰ ἐκφράσωμεν ἐπίσης καὶ τὴν Α διὰ λεπτῶν, πρέπει εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους, νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ Α καὶ θ τοὺς λόγους $\frac{A}{\rho}$, $\frac{\theta}{\rho}$ εἰς τοὺς ὁποίους ρ παριστάνει τὸν περιεχόμενον ἀριθμὸν λεπτῶν εἰς τὴν ἀκτῖνα ἐπειδὴ οἱ λόγοι οὗτοι ἄλλο τι δὲν ἐκφράζουν παρὰ τὰ μήκη τῶν γωνιῶν Α καὶ θ τὰς ὁποίας ὑποθέτομεν ἐκφραζομένας διὰ λεπτῶν. Οὕτω λοιπὸν ἔχομεν

$$\gamma = \alpha + \beta - \frac{\frac{1}{2}\alpha\beta}{\alpha+\beta}\cdot\left(\frac{\theta}{\rho}\right)^2$$

$$A = \frac{\alpha\theta}{\alpha+\beta}\left(1 + \frac{\beta(\alpha-\beta)}{6(\alpha+\beta)^2}\cdot\left(\frac{\theta}{\rho}\right)^2\right)$$

ϞΘʹ. Διὰ νὰ ἐφαρμόσωμεν τοὺς τύπους τούτους εἰς μερικὸν παράδειγμα, ἔστω $\alpha = 1000''$, $\beta = 2400''$. $\Gamma = 199°\ 32'$ ἢ $\theta = 68'$ θέλομεν ἔχει $\alpha + \beta - \gamma = \frac{1200000}{3400}\cdot\left(\frac{68}{\rho}\right)^2 = 0.037806$, ὅθεν $\gamma = 3399'', 962194$. Ὅθεν διὰ τὴν τιμὴν τῆς Α, ἐὰν εὐχαριστηθῶμεν εἰς μίαν μετρίαν προσέγγισιν, ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν $A = \frac{\alpha\theta}{\alpha+\beta} = 20'$ καὶ $B = \theta - A = 48'$ ὁ ὅλος ὅμως τύπος δίδει $A = 20'\left(1 - \frac{2400\times1400}{6(3400)^2}\left(\frac{68}{\rho}\right)^2\right) = 19'.99988946$, καὶ ἀκολούθως $B = 48'.00011054$, τιμαὶ αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ἦναι ἀκριβεῖς ἕως εἰς τὸ τελευταῖον δεκαδικόν.

§ Βʹ· λύσις τῆς τρίτης περιστάσεως τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων διὰ τῶν σειρῶν.

ρʹ. Ὅταν δοθοῦν αἱ δύο πλευραὶ α καὶ β καὶ ἡ περιεχομένη γωνία Γ, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν γωνίαν Β, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν β : α :: ἡμ Β : ἡμ (Β+Γ), ἡ ὁποία δίδει α ἡμ Β=β (ἡμ Β συν Γ+ συν Β ἡμ Γ), καὶ ἑπομένως $\frac{\text{ἡμ } B}{\text{συν } B} = \frac{\beta \text{ ἡμ } \Gamma}{\alpha - \beta \text{συν}\Gamma}$. Ἐὰν εἰς ταύτην τὴν ἐξίσωσιν ἀντὶ τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων θέσωμεν τὰς διὰ τῶν κατ' ἐπίνοιαν ἐκθετικῶν ἐκφραζομένας τιμάς των (λϛʹ), θέλομεν ἔχει

$$\frac{e^{B\sqrt{-1}} - e^{-B\sqrt{-1}}}{e^{B\sqrt{-1}} + e^{-B\sqrt{-1}}} = \frac{\beta\,(e^{\Gamma\sqrt{-1}} - e^{-\Gamma\sqrt{-1}})}{2\alpha - \beta\,(e^{\Gamma\sqrt{-1}} + e^{-\Gamma\sqrt{-1}})}$$

ἐξαλείφοντες τοὺς παρανομαστὰς καὶ μετὰ ταῦτα ἀνάγοντες, εὑρίσκομεν

$$e^{2B\sqrt{-1}} = \frac{\alpha - \beta\, e^{-\Gamma\sqrt{-1}}}{\alpha - \beta\, e^{\Gamma\sqrt{-1}}}$$

Λαμβάνοντες τὸν λογάριθμον ἑκάστου μέλους καὶ ἀναπτύσσοντες τὸ δεύτερον εἰς σειρὰν κατὰ τὸν γνωστὸν τύπον $\Lambda(\alpha - \chi) = \Lambda\alpha - \frac{\chi}{\alpha} - \frac{\chi^2}{2\alpha^2} - \frac{\chi^3}{2\alpha^3} -$ κτλ, εὑρίσκομεν

$$2B\sqrt{-1} = \frac{\beta}{\alpha} e^{\Gamma\sqrt{-1}} + \frac{\beta^2}{2\alpha^2} e^{2\Gamma\sqrt{-1}} + \frac{\beta^3}{3\alpha^3} e^{3\Gamma\sqrt{-1}} + \text{κτλ}$$

$$- \frac{\beta}{\alpha} e^{-\Gamma\sqrt{-1}} - \frac{\beta^2}{2\alpha^2} e^{-2\Gamma\sqrt{-1}} - \frac{\beta^3}{3\alpha^3} e^{-3\Gamma\sqrt{-1}} - \text{κτλ}$$

Διαιροῦντες λοιπὸν διὰ $2\sqrt{-1}$, καὶ παρατηροῦντες ὅτι $e^{\mu\Gamma\sqrt{-1}} - e^{-\mu\Gamma\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}$ ἡμ.μΓ, συνάγομεν

$$B = \frac{\beta}{\alpha}\,\text{ἡμ}\Gamma + \frac{\beta^2}{2\alpha^2}\,\text{ἡμ}2\Gamma + \frac{\beta^3}{3\alpha^3}\,\text{ἡμ}3\Gamma + \frac{\beta^4}{4\alpha^4}\,\text{ἡμ}4\Gamma + \text{κτλ}$$

Ἡ σειρὰ αὕτη τῆς ὁποίας ὁ νόμος εἶναι ἁπλούστατος, ἐκφράζει τὴν τιμὴν τῆς γωνίας B διὰ μερῶν τῆς ἀκτῖνος, καὶ εἶναι τόσον μᾶλλον συγκύπτουσα ὅσον περισσότερον ἡ πλευρὰ β εἶναι μικροτέρα ὡς πρὸς τὴν α.

Ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ πρέπει νὰ πληρῇ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\text{εφ}(B + \frac{1}{2}\Gamma) = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\,\text{εφ}\,\frac{1}{2}\Gamma$, ἥτις εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν $\text{εφ}\,\frac{1}{2}(A - B) = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\,\text{εφ}\,\frac{1}{2}\Gamma$, καὶ δὲν διαφέρει ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\text{ἡμ}\,B}{\text{συν}B} = \frac{\beta\,\text{ἡμ}\,\Gamma}{\alpha - \beta\,\text{συν}\,\Gamma}$ εἰ μὴ κατὰ τὴν μορφήν. (*)

(*). 1.ον Διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\text{εφ}(B + \frac{1}{2}\Gamma) = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$

ρα'. Γνωρίζοντες τὴν γωνίαν Β, ἔχομεν τὴν τρίτην γωνίαν Α $= 200° - Β - Γ$· Ὅσον διὰ τὴν τρίτην πλευρὰν γ, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $γ^2 = α^2 - 2αβ \text{ συν } Γ + β^2$, ἥτις διὰ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς ῥίζης δίδει,

$$γ = α - β \text{ συν } Γ + \frac{β^2}{2α} \text{ ἡμ}^2 Γ + \frac{β^3}{2α^2} \text{ ἡμ}^2 Γ \text{ συν } Γ - \text{ κτλ.}$$

Η σειρὰ ὅμως αὕτη μὴ ὁδεύουσα κανονικῶς, δὲν ἠμπορεῖ νὰ συνεχισθῇ κατ' ἀρέσκειαν. Ἐξ ἐναντίας, ἠμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν μίαν ἁπλουστάτην σειρὰν διὰ τὴν τιμὴν τοῦ ὑπερβολικοῦ λογαρίθμου τῆς πλευρᾶς γ. Τῷ ὄντι, εὐκόλως βλέπομεν ὅτι ἡ ποσότης $α^2 - 2αβ$ συν$Γ + β^2 = \left(α - β e^{Γ\sqrt{-1}}\right)\left(α - β e^{-Γ\sqrt{-1}}\right)$· διότι ἐὰν ἀναπτύξωμεν τὸ γινόμενον τῶν δύο τούτων παραγόντων εὑρίσκομεν $α^2 - αβ\left(e^{Γ\sqrt{-1}} + e^{-Γ\sqrt{-1}}\right) + β^2$ ἢ $α^2 - 2αβ \text{ συν } Γ + β^2$

ἐφ $\frac{1}{2}$ Γ εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἐφ $\frac{1}{2}(Α - Β) = \frac{α - β}{α + β}$ σφ $\frac{1}{2}$ Γ, ἂς παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ τελευταία αὕτη ἄγεται εἰς $(α+β)$ ἐφ $\frac{1}{2}$ Α — ἐφ $\frac{1}{2}$ Β $(α+β) = (α-β)$ σφ $\frac{1}{2}$ Γ $+ (α-β)$ σφ $\frac{1}{2}$ Γ ἐφ $\frac{1}{2}$ Α ἐφ $\frac{1}{2}$ Β· ἡ ὁποία, ἐξ ἀφορμῆς ὅτι ἐφ $\frac{1}{2}$ Α $=$ σφ $\frac{1}{2}(Β+Γ) = \frac{1}{\text{ἐφ } \frac{1}{2}(Β+Γ)}$, καὶ σφ $\frac{1}{2}$ Γ $= \frac{1}{\text{ἐφ } \frac{1}{2} Γ}$, τρέπεται εἰς $(α+β)$ ἐφ $\frac{1}{2}$ Γ — ἐφ $\frac{1}{2}$ Β ἐφ $\frac{1}{2}(Β+Γ)$ ἐφ $\frac{1}{2}$ Γ$(α+β) =$ $(α-β)$ ἐφ $\frac{1}{2}(Β+Γ) + (α-β)$ ἐφ $\frac{1}{2}$ Β: τοῦτ' ἔστι $(α+β)$ ἐφ $\frac{1}{2}$ Γ (1 — ἐφ $\frac{1}{2}$ Β ἐφ $\frac{1}{2}(Β+Γ)$) $= (α-β)$ (ἐφ $\frac{1}{2}(Β+Γ)$ + ἐφ $\frac{1}{2}$ Β). Λοιπὸν

$$\frac{α+β}{α-β} \text{ ἐφ } \tfrac{1}{2} Γ = \frac{\text{ἐφ } \frac{1}{2}(Β+Γ) + \text{ἐφ } \frac{1}{2} Β}{1 - \text{ἐφ } \frac{1}{2} Β \text{ ἐφ } \frac{1}{2}(Β+Γ)} = \text{ἐφ}(Β + \tfrac{1}{2}Γ).$$

2ον. Ὅτι δὲ ἡ ἐξίσωσις ἐφ$(Β + \frac{1}{2}Γ) = \frac{α+β}{α-β}$ ἐφ $\frac{1}{2}$ Γ διαφέρει μόνον κατὰ τὴν μορφὴν ἀπὸ τὴν $\frac{\text{ἡμ } Β}{\text{συν } Β} = \frac{β \text{ ἡμ } Γ}{α - β\text{συν}Γ}$ τὸ δεικνύομεν οὕτως: Η πρώτη ἄγεται εἰς $(α-β)$ ἐφ Β $+ (α-β)$ ἐφ $\frac{1}{2}$ Γ $= (α+β)$ ἐφ $\frac{1}{2}$ Γ — $(α+β)$ ἐφ^2 $\frac{1}{2}$ Γ ἐφ Β· τοῦτ' ἔστι $(α-β + (α+β)$ ἐφ^2 $\frac{1}{2}$ Γ$)$ἐφΒ, $= 2β$ ἐφ $\frac{1}{2}$ Γ· ἢ ἐφ Β(α (1+ἐφ^2 $\frac{1}{2}$ Γ) — β (1 — ἐφ^2 $\frac{1}{2}$ Γ)) $= 2β$ἐφ$\frac{1}{2}$Γ: δηλονότι

$$\text{ἐφ}Β\left(\frac{α}{\text{συν}^2 \frac{1}{2} Γ} - \frac{β \text{ συν } Γ}{\text{συν}^2 \frac{1}{2} Γ}\right) = \frac{β \text{ ἡμ } Γ}{\text{συν}^2 \frac{1}{2} Γ}. \quad \text{ἢ ἐφ } Β = \frac{\text{ἡμ } Β}{\text{συν } Β} = \frac{β \text{ ἡμ } Γ}{α - β \text{ συν } Γ} \quad \text{Ο. Μ.}$$

Εχομεν λοιπὸν $\gamma^2 = \left(\alpha - \beta\epsilon^{\Gamma\sqrt{-1}}\right)\left(\alpha - \beta\epsilon^{-\Gamma\sqrt{-1}}\right)$.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἑκάστου μέλους, συνάγομεν

$$2\Lambda\gamma = \Lambda\alpha - \frac{\beta}{\alpha}\epsilon^{\Gamma\sqrt{-1}} - \frac{\beta^2}{2\alpha^2}\epsilon^{2\Gamma\sqrt{-1}} - \frac{\beta^3}{3\alpha^3}\epsilon^{3\Gamma\sqrt{-1}} - \text{κτλ}$$

$$+\Lambda\alpha - \frac{\beta}{\alpha}\epsilon^{-\Gamma\sqrt{-1}} - \frac{\beta^2}{2\alpha^2}\epsilon^{-2\Gamma\sqrt{-1}} - \frac{\beta^3}{3\alpha^3}\epsilon^{-3\Gamma\sqrt{-1}} - \text{κτλ}$$

Ανάγοντες λοιπὸν καὶ τὴν ἐξίσωσιν ταύτην διὰ τοῦ τύπου $\epsilon^{\mu\Gamma\sqrt{-1}} + \epsilon^{-\mu\Gamma\sqrt{-1}} = 2\,\text{συν}\,\mu\Gamma$, ἔχομεν

$$\Lambda\gamma = \Lambda\alpha - \frac{\beta}{\alpha}\,\text{συν}\,\Gamma - \frac{\beta^2}{2\alpha^2}\,\text{συν}\,2\Gamma - \frac{\beta^3}{3\alpha^3}\,\text{συν}\,3\Gamma - \text{κτλ.}$$

σειρὰ ὄχι ὀλιγώτερον χαριεστέρα ἀπὸ ἐκείνην ἥτις δίδει τὴν τιμὴν τῆς Β. Εὰν θέλωμεν οἱ λογάριθμοι νὰ ἀναφέρωνται εἰς τὴν βάσιν 10 πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀλγεβρικοὺς ὅρους μὲ τὸ μέτρον (module) (1) ο 43429448

§. Γ'. Λύσις τῆς τρίτης περιστάσεως τῶν σφαιρικῶν τριγώνων διὰ τῶν σειρῶν.

ρβ', Εἴδομεν εἰς τὸν προηγούμενον παράγραφον ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ χ συναγομένη ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $\text{ἐφ.}\chi = \frac{\mu+\nu}{\mu-\nu}\,\text{ἐφ}\,\frac{1}{2}\Gamma$, ἠμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ διὰ ταύτης τῆς σειρᾶς;

$$\chi = \frac{1}{2}\Gamma + \frac{\nu}{\mu}\,\text{ἡμ}\Gamma + \frac{\nu^2}{2\mu^2}\,\text{ἡμ}2\Gamma + \frac{\nu^3}{3\mu^3}\,\text{ἡμ}\,3\Gamma + \text{κτλ}$$

Τώρα ὅταν εἰς σφαιρικὸν τρίγωνον γνωρίζωμεν τὰς δύο πλευρὰς α καὶ β καὶ τὴν περιεχομένην γωνίαν Γ, διὰ τὴν προσδιόρισιν τῶν ἄλλων δύο γωνιῶν ἔχομεν τοὺς ἀκολούθους τύπους οἱ ὁποῖοι συνάγονται ἀπὸ τὰς ἀναλογίας τοῦ Νεπήρου ἀρ. πη'.

$$\text{σφ}\,\frac{A-B}{2} = \frac{\text{ἡμ}\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)}{\text{ἡμ}\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta\right)}\,\text{ἐφ}\tfrac{1}{2}\Gamma = \frac{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\,\alpha\,\text{συν}\,\frac{1}{2}\beta + \text{συν}\frac{1}{2}\alpha\,\text{ἡμ}\frac{1}{2}\beta}{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\,\alpha\,\text{συν}\frac{1}{2}\beta - \text{συν}\frac{1}{2}\alpha\,\text{ἡμ}\frac{1}{2}\beta}\,\text{ἐφ}\tfrac{1}{2}\Gamma$$

$$\text{σφ}\,\frac{A+B}{2} = \frac{\text{συν}\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)}{\text{συν}\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta\right)}\,\text{ἐφ}\tfrac{1}{2}\Gamma = \frac{\text{συν}\,\frac{1}{2}\,\alpha\,\text{συν}\,\frac{1}{2}\beta - \text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\alpha\,\text{ἡμ}\frac{1}{2}\beta}{\text{συν}\frac{1}{2}\,\alpha\,\text{συν}\,\frac{1}{2}\,\beta + \text{ἡμ}\frac{1}{2}\alpha\,\text{ἡμ}\frac{1}{2}\beta}\,\text{ἐφ}\tfrac{1}{2}\Gamma$$

---

(1). Εδῶ μὲ τὴν λέξιν μέτρον (module) ἐννοεῖται ὁ σταθερὸς ἐκεῖνος ἀριθμὸς μὲ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς λογαρίθμους ἑνὸς τινὸς συστήματος διὰ νὰ τοὺς τρέψωμεν εἰς τοὺς λογαρίθμους ἑνὸς ἄλλου.

Ἐὰν λοιπὸν κάμωμεν $\mu = \text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\alpha\,\text{συν}\,\frac{1}{2}\beta$, $\nu = \text{συν}\,\frac{1}{2}\alpha\,\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\beta$, ἐκ τῶν ὁποίων συνάγομεν $\frac{\nu}{\mu} = \frac{\text{συν}\,\frac{1}{2}\alpha\,\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\beta}{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\alpha\,\text{συν}\,\frac{1}{2}\beta} = \frac{\text{ἐφ}\,\frac{1}{2}\beta}{\text{ἐφ}\,\frac{1}{2}\alpha}$, καὶ ἀντεισάξωμεν εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον ἀντὶ $\frac{\nu}{\mu}$ ταύτην τὴν τιμήν, ἀντὶ δὲ χ, $100 - \frac{A-B}{2}$, θέλομεν εὕρη

$$\frac{A-B}{2} = 100^\circ - \tfrac{1}{2}\Gamma - \frac{\text{ἐφ}\,\frac{1}{2}\beta}{\text{ἐφ}\,\frac{1}{2}\alpha}\,\text{ἡμ}\,\Gamma - \frac{\text{ἐφ}^2\,\frac{1}{2}\beta}{2\,\text{ἐφ}^2\,\frac{1}{2}\alpha}\,\text{ἡμ}\,2\Gamma - \frac{\text{ἐφ}^3\,\frac{1}{2}\beta}{3\,\text{ἐφ}^3\,\frac{1}{2}\alpha}\,\text{ἡμ}\,3\Gamma - \text{κτλ}$$

Ἀντεισάγοντες παρομοίως εἰς τὸν αὐτὸν τύπον ἀντὶ $\frac{\nu}{\mu}$, $-\frac{\text{ἐφ}\,\frac{1}{2}\beta}{\text{σφ}\,\frac{1}{2}\alpha}$ καὶ ἀντὶ χ, $100^\circ - \frac{A+B}{2}$, εὑρίσκομεν

$$\frac{A+B}{2} = 100^\circ - \tfrac{1}{2}\Gamma + \frac{\text{ἐφ}\,\frac{1}{2}\beta}{\text{σφ}\,\frac{1}{2}\alpha}\,\text{ἡμ}\,\Gamma - \frac{\text{ἐφ}^2\,\frac{1}{2}\beta}{2\,\text{σφ}^2\,\frac{1}{2}\alpha}\,\text{ἡμ}\,2\Gamma + \frac{\text{ἐφ}^3\,\frac{1}{2}\beta}{3\,\text{σφ}^3\,\frac{1}{2}\alpha}\,\text{ἡμ}\,3\Gamma - \text{κτλ}$$

Αἱ δύο αὗται σειραὶ ὁδεύουν κατὰ νόμον ἁπλούστατον, καὶ εἶναι τόσον περισσότερον συγκύπτουσαι ὅσον ἡ πλευρὰ β εἶναι μικροτέρα. Η πρώτη τούτων εἶναι πάντοτε συγκύπτουσα, ἐπειδὴ ὑποτίθεται $\beta < \alpha$· καὶ ἡ δευτέρα θέλει εἶναι τοιαύτη ὅταν ὅμως $\text{ἐφ}\,\frac{1}{2}\beta < \text{σφ}\,\frac{1}{2}\alpha$, ἢ $\alpha + \beta < 200^\circ$. Ἐὰν δὲ $\alpha + \beta > 200^\circ$, ἡ δευτέρα σειρὰ ἤθελεν εἶναι ἐκκύπτουσα καὶ ψευδὴς, πλὴν τὴν περίστασιν ταύτην πάντοτε ἠμπορεῦμεν νὰ ἀποφύγωμεν· διότι ἡ λύσις τοῦ τριγώνου ΒΓΑ (σχ. 11) εἰς τὸ ὁποῖον ἤθελεν εἶναι $\Gamma A + \Gamma B > 200^\circ$, πάντοτε ἀνάγεται εἰς τὴν τοῦ τριγώνου Α΄ΓΒ΄ εἰς τὸ ὁποῖον $\Gamma A' + \Gamma B' < 200^\circ$. Τοῦ λοιποῦ, ὅταν καὶ αἱ δύο πλευραὶ α καὶ β εἶναι μικρόταται, ἡ δευτέρα σειρὰ εἶναι κατὰ πολλὰ συγκύπτουσα· τότε ἡ τρίτη πλευρὰ γ εἶναι ὡσαύτως μικροτάτη, ἐπειδὴ γ πρέπει νὰ ἦναι $< \alpha + \beta$, καὶ τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον πολλὰ ὀλίγον διαφέρει ἑνὸς ἐπιπέδου· εἰς ταύτην τὴν περίστασιν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν ἐπάνω εἰς δύο ὀρθὰς, ἐκφράζεται οὕτως:

$$A + B + \Gamma - 200^\circ = \frac{2}{1}\,\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}\alpha\,\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}\beta\,\text{ἡμ}\,\Gamma - \frac{2}{2}\,\text{ἐφ}^2\,\tfrac{1}{2}\alpha\,\text{ἐφ}^2\,\tfrac{1}{2}\beta\,\text{ἡμ}\,2\Gamma + \frac{2}{3}\,\text{ἐφ}^3\,\tfrac{1}{2}\alpha\,\text{ἐφ}^3\,\tfrac{1}{2}\beta\,\text{ἡμ}\,3\Gamma - \text{κτλ}.$$

ργ΄. Εἰς εὕρεσιν τῆς τρίτης πλευρᾶς γ τοῦ προτεθέντος τριγώνου, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\text{συν}\,\gamma = \text{συν}\,\alpha\,\text{συν}\,\beta + \text{ἡμ}\,\alpha\,\text{ἡμ}\,\beta\,\text{συν}\,\Gamma$, ἀπὸ τὴν ὁποίαν εὔκολον εἶναι νὰ συνάξωμεν τὰς δύο ἀκολούθους:

$ἡμ^2 \frac{1}{2}γ = ἡμ^2 \frac{1}{2} α\, συν^2 \frac{1}{2} β - 2 ἡμ \frac{1}{2} α\, συν \frac{1}{2} β\, συν \frac{1}{2} α\, ἡμ \frac{1}{2} β\, συν Γ +$
$συν^2 \frac{1}{2} α\, ἡμ^2 \frac{1}{2} β$
$συν^2 \frac{1}{2} γ = συν^2 \frac{1}{2} α\, συν^2 \frac{1}{2} β + 2 συν \frac{1}{2} α\, συν \frac{1}{2} β\, ἡμ \frac{1}{2} α\, ἡμ \frac{1}{2} β\, συν Γ$
$+ ἡμ^2 \frac{1}{2} α\, ἡμ^2 \frac{1}{2} β.$

Ἐκ τῆς μορφῆς τῶν τιμῶν τούτων βλέπομεν ὅτι ἡμ $\frac{1}{2}$ γ ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ τρίτη πλευρὰ εὐθυγράμμου τριγώνου εἰς τὸ ὁποῖον ἤθελον εἶναι γνωσαὶ αἱ δύο πλευραὶ ἡμ $\frac{1}{2}$ α συν $\frac{1}{2}$ β, συν $\frac{1}{2}$ α ἡμ $\frac{1}{2}$ β καὶ ἡ περιεχομένη γωνία Γ· παρομοίως ὅτι συν $\frac{1}{2}$ γ εἶναι ἡ τρίτη πλευρὰ εὐθυγράμμου τριγώνου, τοῦ ὁποίου δύο πλευραὶ ἤθελον εἶναι συν $\frac{1}{2}$ α συν $\frac{1}{2}$ β, ἡμ $\frac{1}{2}$ α ἡμ $\frac{1}{2}$ β καὶ ἡ περιεχομένη γωνία $200° - Γ$. Ἀπὸ τὸν εὑρεθέντα λοιπὸν τύπον (ἀρ. ρα΄) διὰ τὰ εὐθύγραμμα τρίγωνα, ἔχομεν

$$λογ.ἡμ \tfrac{1}{2} γ = λογ(ἡμ \tfrac{1}{2} α\, συν \tfrac{1}{2} β) - \frac{εφ \frac{1}{2} β}{εφ \frac{1}{2} α} συν Γ - \frac{εφ^2 \frac{1}{2} β}{2 εφ^2 \frac{1}{2} α}$$
$$συν 2Γ - κτλ$$

$$λογ.συν \tfrac{1}{2} γ = λογ(συν \tfrac{1}{2} α\, συν \tfrac{1}{2} β) + \frac{εφ \frac{1}{2} β}{σφ \frac{1}{2} α} συν Γ - \frac{εφ^2 \frac{1}{2} β}{2 σφ^2 \frac{1}{2} α}$$
$$συν 2Γ + κτλ.$$

Πρέπει νὰ σημειώσωμεν ὅτι ἐπειδὴ καθὲν τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων περὶ τῶν ὁποίων ἀνωτέρω ὡμιλήσαμεν, ἠμπορεῖ νὰ λυθῇ διὰ μέσου εὐθυγράμμου ὀρθογωνίου τριγώνου, ἡ λύσις τοῦ προτεθέντος σφαιρικοῦ τριγώνου δύναται ἀμέσως νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν λύσιν εὐθυγράμμου ὀρθογωνίου τριγώνου.

Εὑρίσκομεν οὕτως ὅτι ἡμ $\frac{1}{2}$ γ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ἡμ $\frac{1}{2}(α+β)$ ἡμ $\frac{1}{2}$ Γ καὶ ἡμ $\frac{1}{2}(α-β)$ συν $\frac{1}{2}$ Γ. Ὡσαύτως συν $\frac{1}{2}$ γ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ἤθελον εἶναι συν $\frac{1}{2}(α-β)$ συν $\frac{1}{2}$ Γ καὶ συν $\frac{1}{2}(α+β)$ ἡμ $\frac{1}{2}$ Γ.

Ἐὰν περιπλέον καλέσωμεν Μ τὴν γωνίαν ἥτις εἰς τὸ πρῶτον τρίγωνον εἶναι ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς ἡμ $\frac{1}{2}(α-β)$ συν $\frac{1}{2}$ Γ, καὶ εἰς τὸ δεύτερον, Ν τὴν γωνίαν τὴν ἀπέναντι τῆς πλευρᾶν συν $\frac{1}{2}(α-β)$ συν $\frac{1}{2}$ Γ, ἀπὸ τὰς ἀναλογίας τοῦ Νεπήρου ἕπεται ὅτι θέλομεν ἔχει $\frac{Α-Β}{2} = Μ$, καὶ $\frac{Α+Β}{2} = Ν$ ἢ $= 200° - Ν$· δηλαδή: $\frac{Α+Β}{2}$ $= Ν$ ἐὰν $α+β < 200°$, καὶ $\frac{Α+Β}{2} = 200° - Ν$ ἐὰν $α+β > 200°$.

Εἰς κάθε λοιπὸν σφαιρικὸν τρίγωνον εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι γνωσὰ δύο πλευραὶ α καὶ β καὶ ἡ περιεχομένη γωνία Γ, ἑκάση τῶν ποσοτήτων $\frac{1}{2}$ γ, $\frac{Α+Β}{2}$, $\frac{Α-Β}{2}$ ἠμπορεῖ κατ' εὐθεῖαν νὰ εὑρεθῇ διὰ τῆς λύσεως εὐθυγράμμου ὀρθογωνίου τριγώνου εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι γνωσαὶ αἱ δύο πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας.

Κγ. ὅθεν ἀκόμη ἕπεται ὅτι μετὰ τὴν εὕρεσιν τῆς γωνίας Μ ἢ $\frac{A-B}{2}$ διὰ τοῦ τύπου $\text{εφ}\, M = \frac{\text{ημ}\, \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\text{ημ}\, \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\, \text{σφ}\, \frac{1}{2}\Gamma$, δυνατὸν νὰ λογαριασθῇ ἡ τρίτη πλευρὰ διὰ τοῦ τύπου $\text{ημ}\, \frac{1}{2}\gamma =$

$$\frac{\text{ημ}\, \frac{1}{2}(\alpha-\beta)\, \text{συν}\, \frac{1}{2}\Gamma}{\text{ημ}\, M} = \frac{\text{ημ}\, \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\, \text{ημ}\, \frac{1}{2}\Gamma}{\text{συν}\, M}.$$

Σ. Κ. Οἱ εἰς τὸν παράγραφον τοῦτον εὑρεθέντες τύποι εὐκόλως ἠμποροῦν νὰ ἐφαρμοσθοῦν εἰς τὴν λύσιν τῆς πέμπτης περιστάσεως τῶν σφαιρικῶν τριγώνων, διότι αὐτὴ ἠμπορεῖ νὰ ἀναφερθῇ εἰς τὴν τρίτην διὰ τῆς ἰδιότητος τοῦ πολικοῦ τριγώνου.

§ Δ΄. Λύσις σφαιρικοῦ τριγώνου τοῦ ὁποίου δύο πλευραὶ ὀλίγον τὶ διαφέρουν ἀπὸ 100°.

ρδ΄. Ἔστωσαν α καὶ β αἱ δύο δεδομέναι πλευραὶ ὀλίγον τὶ διαφέρουσαι τῶν 100°· πρόκειται νὰ προσδιορισθῇ ἡ γωνία Γ διὰ μέσου τῶν τριῶν πλευρῶν α, β, γ.

Ἐὰν αἱ πλευραὶ α καὶ β ἦσαν ἀκριβῶς ἴσαι μὲ 100°, ἤθελεν εἶναι $\Gamma = \gamma$· ἐπειδὴ λοιπὸν α καὶ β ὀλίγον τὶ διαφέρουν ἀπὸ 100°, ἡ γωνία Γ μετρεῖται ἀπὸ τόξον ὀλίγον τι διαφέρον τῆς πλευρᾶς Γ. Ἔστω $\alpha = 100° + \alpha'$, $\beta = 100 + \beta'$, $\Gamma = \gamma + \chi$· ἐὰν ἀντεισάξωμεν ταύτας τὰς τιμὰς εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\text{συν}\,\Gamma = \frac{\text{συν}\,\gamma - \text{συν}\,\alpha\, \text{συν}\,\beta}{\text{ημ}\,\alpha\, \text{ημ}\,\beta}$, θέλομεν ἔχει $\text{συν}(\gamma+\chi) = \frac{\text{συν}\,\gamma - \text{ημ}\,\alpha'\, \text{ημ}\,\beta'}{\text{συν}\,\alpha'\, \text{συν}\,\beta'}$. Πλὴν ἐπειδὴ α΄ καὶ β΄ ὑποτίθενται μικρόταται ποσότητες, δυνάμεθα παραβλέποντες μόνον τοὺς ὅρους εἰς τοὺς ὁποίους α΄ καὶ β΄ ὑψώνονται εἰς τὸν τέταρτον βαθμόν, νὰ κάμωμεν $\text{ημ}\,\alpha'\, \text{ημ}\,\beta' = \alpha'\beta'$, $\text{συν}\,\alpha'\, \text{συν}\,\beta' = 1 - \frac{\alpha'^2}{2} - \frac{\beta'^2}{2}$, καὶ τοῦτο δίδει $\text{συν}(\gamma+\chi) = \frac{\text{συν}\,\gamma - \alpha'\beta'}{1 - \frac{1}{2}\alpha'^2 - \frac{1}{2}\beta'^2} = (1 + \frac{1}{2}\alpha'^2 + \frac{1}{2}\beta'^2)\, \text{συν}\,\gamma - \alpha'\beta'$. Ἀλλὰ παραβλέποντες τὸ τετράγωνον τοῦ χ, ἔχομεν $\text{συν}(\gamma+\chi) = \text{συν}\,\gamma - \chi\, \text{ημ}\,\gamma$· λοιπὸν

$$\chi = \frac{\alpha'\beta' - \frac{1}{2}(\alpha'^2+\beta'^2)\, \text{συν}\,\gamma}{\text{ημ}\,\gamma}.$$

Καὶ ἐπειδὴ χ εἶναι τῆς δευτέρας τάξεως ὡς πρὸς α΄ καὶ β΄, βλέπομεν ὅτι ἄλλας ποσότητας εἰς ταύτην τὴν τιμὴν δὲν πρέπει νὰ παραβλέψωμεν παρὰ ἐκείνας αἱ ὁποῖαι εἶναι τῆς τετάρτης τάξεως. Ἔστω $\frac{1}{2}(\alpha'+\beta') = \pi$, $\frac{1}{2}(\alpha'-\beta') = \kappa$ ἢ $\alpha' = \pi + \kappa$, $\beta' = \pi - \kappa$· θέλομεν ἔχει ὑπὸ ἁπλουστέραν μορφὴν $\chi = \pi^2\left(\frac{1-\text{συν}\,\gamma}{\text{ημ}\,\gamma}\right) - \kappa^2\left(\frac{1+\text{συν}\,\gamma}{\text{ημ}\,\gamma}\right) = \pi^2\, \text{εφ}\, \frac{1}{2}\gamma - \kappa^2\, \text{σφ}\, \frac{1}{2}\gamma$.

Η τιμὴ αὕτη ἐκφράζεται διὰ μερῶν τῆς ἀκτῖνος· πλὴν ἐπειδὴ εἰς τὴν πρᾶξιν π καὶ κ δίδονται ἐκπεφρασμένα διὰ δευτέρων, ἐὰν θέλωμεν καὶ χ ἐπίσης νὰ ἐκφράζεται διὰ δευτέρων, πρέπει νὰ κάμωμεν

$$\chi = \frac{\pi^2}{P} \text{ἐφ} \tfrac{1}{2}\gamma - \frac{\kappa^2}{P} \text{σφ} \tfrac{1}{2}\gamma,$$

Ὅπου P εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν εἰς τὴν ἀκτῖνα περιεχομένων δευτέρων, καὶ τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος εἶναι $= 5.8038801$. Γνωρίζοντες χ, ἔχομεν γνωστὴν τὴν ζητουμένην γωνίαν $\Gamma = \gamma + \chi$.

Ο εὑρεθεὶς τύπος εἶναι ὠφέλιμος εἰς τὰς γεωδαισικὰς ἐργασίας διὰ τὴν εἰς τὸν ὁρίζοντα ἀναγωγὴν τῶν γωνιῶν αἱ ὁποῖαι ἤθελον παρατηρηθῆ εἰς κλίνοντα ἐπίπεδα· εἶναι ἐπιτηδειότερος καὶ ζητεῖ ὀλιγώτερον ἐκτεταμένους πίνακας ἀπὸ τὸν τύπον τῆς πρώτης περιστάσεως τῶν σφαιρικῶν τριγώνων, τῆς ὁποίας ἐδώκαμεν παράδειγμα (ἄρ. 93). Ἀλλ' ἐὰν αἱ ὑψώσεις ἢ καταβάσεις α' καὶ β' ὑπερβαίνουν τὰς 2 ἢ τρεῖς μοίρας, ἀσφαλέστερον εἶναι τότε νὰ γένῃ χρῆσις τῆς γενικῆς μεθόδου.

§. Ε'. Λύσις τῶν σφαιρικῶν τριγώνων τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι μικρόταται ὡς πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

ρε'. Ὅταν αἱ πλευραὶ α, β, γ εἶναι μικρόταται ὡς πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, τὸ προτεθὲν τρίγωνον ὀλίγον διαφέρει ἀπὸ ἓν εὐθύγραμμον· καὶ ὡς τοιοῦτον θεωροῦντές το ἠμποροῦμεν νὰ ἔχωμεν μίαν πρώτην ὡς ἔγγιστα λύσιν, ἀλλὰ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον παραβλέπομεν τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν ἐπάνω εἰς 200°. Ὅθεν διὰ νὰ ἔχωμεν μίαν πλέον ὡς ἔγγιστα λύσιν, πρέπει νὰ ἀποβλέπωμεν εἰς ταύτην τὴν ὑπεροχὴν, καὶ τοῦτο ἠμποροῦμεν εὐκολώτατα νὰ κάμνωμεν, διά τινος γενικῆς ἀρχῆς τὴν ὁποίαν ἐρχόμεθα νὰ ἀποδείξωμεν.

Ἔστω ρ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ προτεθὲν τρίγωνον· ἐὰν φαντασθῶμεν τρίγωνον ὅμοιον χαραγμένον ἐπὶ τῆς σφαίρας τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι 1, αἱ πλευραὶ τούτου τοῦ τριγώνου θέλουν εἶναι $\frac{\alpha}{\rho}$, $\frac{\beta}{\rho}$, $\frac{\gamma}{\rho}$, καὶ θέλομεν ἔχει συν Α $=$

$$\frac{\text{συν}\frac{\alpha}{\rho} - \text{συν}\frac{\beta}{\rho}\,\text{συν}\frac{\gamma}{\rho}}{\text{ἡμ}\frac{\beta}{\rho}\,\text{ἡμ}\frac{\gamma}{\rho}}.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ ρ εἶναι πολλὰ μεγάλον ὡς

πρὸς α, β, γ, ἔχομεν πολλὰ ὡς ἔγγιστα (λε΄) $\text{συν}\,\frac{\alpha}{\rho} = 1 - \frac{\alpha^2}{2\rho^2} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4\rho^2}\ldots\ldots$, $\text{συν}\,\frac{\beta}{\rho} = 1 - \frac{\beta^2}{2\rho^2} + \frac{\beta^4}{2.3.4\rho^4}$, $\text{συν}\,\frac{\gamma}{\rho} = 1 - \frac{\gamma^2}{2\rho^2} + \frac{\gamma^4}{2.3.4\rho^4}$, $\text{ἡμ}\,\frac{\beta}{\rho} = \frac{\beta}{\rho} - \frac{\beta^3}{2.3\rho^3}$, $\text{ἡμ}\,\frac{\gamma}{\rho} = \frac{\gamma}{\rho} - \frac{\gamma^3}{2.3\rho^3}$· ἀντεισάγοντες ταύτας τὰς τιμὰς εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν καὶ παραβλέποντες τοὺς ὅρους τοὺς περισσοτέρων ἀπὸ τέσσαρας διαστάσεων εἰς α, β, γ, θέλομεν ἔχει

$$\text{συν}\,A = \frac{\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\rho^2} + \frac{\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}{24\rho^4} - \frac{\beta^2\gamma^2}{4\rho^4}}{\frac{\beta\gamma}{\rho^2}\left(1 - \frac{\beta^2}{6\rho^2} - \frac{\gamma^2}{6\rho^2}\right)}$$

Πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους τούτου τοῦ κλάσματος ἐπὶ $1+\frac{\beta^2+\gamma^2}{6\rho^2}$ καὶ ἀνάγοντες εὑρίσκομεν

$$\text{συν}\,A = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} + \frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\gamma^2-2\beta^2\gamma^2}{24\beta\gamma\rho^2}$$

Ἔςω τώρα Α΄ ἡ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς α γωνία εἰς τὸ τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ἤθελον εἶναι ἰσομήκεις μὲ τὰ τόξα α, β, γ· θέλομεν ἔχει $\text{συν}\,A' = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$ καὶ $4\beta^2\gamma^2\,\text{ἡμ}^2A' = 2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4$. Λοιπὸν

$$\text{συν}\,A = \text{συν}\,A' - \frac{\beta\gamma}{6\rho^2}\,\text{ἡμ}^2A'.$$

Ἔςω $A = A' + \chi$, ἀποῤῥίπτοντες τὸ τετράγωνον τῆς χ θέλομεν ἔχει $\text{συν}\,A = \text{συν}\,A' - \chi\,\text{ἡμ}\,A'$· ὅθεν βλέπομεν ὅτι $\chi = \frac{\beta\gamma}{6\rho^2}\,\text{ἡμ}A'$. καὶ ἐπειδὴ χ εἶναι τῆς δευτέρας τάξεως ὡς πρὸς τὰς ποσότητας $\frac{\beta}{\rho}$ καὶ $\frac{\gamma}{\rho}$, ἕπεται ὅτι τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εἶναι ἀκριβὲς μέχρι τῶν ποσοτήτων τῆς τετάρτης τάξεως. Οὕτω λοιπὸν ἔχομεν

$$A = A' + \frac{\beta\gamma}{6\rho^2}\,\text{ἡμ}\,A'.$$

Ἀλλὰ $\frac{1}{2}$ βγ ἡμ Α′ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ εὐθυγράμμου τριγώνου τοῦ ὁποίου α, β, γ εἶναι αἱ τρεῖς πλευραί, τὸ ὁποῖον ἐμβαδὸν δὲν διαφέρει ἐπαισθητῶς ἀπὸ τὸ τοῦ σφαιρικοῦ προτεθέντος τριγώνου. Ἐὰν λοιπὸν ἢ τὸ ἓν ἢ τὸ ἄλλο καλέσωμεν α′, θέλομεν ἔχει $A = A' + \frac{\alpha'}{3\rho^2}$ ἢ $A' = A - \frac{\alpha'}{3\rho^2}$· παρομοίως ἠθέλαμεν ἔχει $B' = B - \frac{\alpha'}{3\rho^2}$, $\Gamma' = \Gamma - \frac{\alpha'}{3\rho^2}$, καὶ ἐντεῦθεν προκύπτει $A' + B' + \Gamma'$ ἢ $200^{\circ} = A + B + \Gamma - \frac{\alpha'}{\rho^2}$· Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ θεωρήσωμεν τὴν ποσότητα $\frac{\alpha}{\rho^2}$ ὡς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ προτεθέντος σφαιρικοῦ τριγώνου ἐπάνω εἰς δύο ὀρθάς. Ἐντεῦθεν πηγάζει τὸ ἀξιοσημείωτον τοῦτο θεώρημα διὰ τοῦ ὁποίου ἀνάγεται ἡ λύσις τῶν πολλὰ μικρῶν σφαιρικῶν τριγώνων εἰς τὴν τῶν εὐθυγράμμων.

Ἐὰν ἀφ' ἑκάστης τῶν γωνιῶν προτεθέντος τινὸς σφαιρικοῦ τριγώνου τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι μικρόταται ὡς πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, ἀφαιρεθῇ τὸ τριτημόριον τῆς ὑπεροχῆς τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν ἐπάνω εἰς δύο ὀρθάς, αἱ οὕτως ἠλαττωμέναι γωνίαι ἠμποροῦν νὰ ληφθοῦν ὡς γωνίαι εὐθυγράμμου τριγώνου τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ἰσομήκεις μὲ τὰς τοῦ προτεθέντος σφαιρικοῦ τριγώνου, ἢ μὲ ἄλλας λέξεις.

Τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον τοῦ ὁποίου ἡ καμπυλότης εἶναι πολλὰ μικρὰ καὶ τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶναι Α, Β, Γ, αἱ δὲ ἀπέναντι πλευραὶ α, β, γ, ἀντιστοιχεῖ πάντοτε εἰς εὐθύγραμμον τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ μὲν πλευραὶ εἶναι ἰσομήκεις μὲ τὰς τοῦ σφαιρικοῦ α, β, γ, αἱ δὲ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι $A - \frac{1}{3}\varepsilon$, $B - \frac{1}{3}\varepsilon$, $\Gamma - \frac{1}{3}\varepsilon$, ὅπου ε παριστάνει τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν τοῦ προτεθέντος σφαιρικοῦ τριγώνου ἐπάνω εἰς δύο ὀρθάς.

ρς′. Ἡ ὑπεροχὴ ε ἢ $\frac{\alpha'}{\rho^2}$, ἥτις εἶναι ἀνάλογος μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, δύναται πάντοτε νὰ λογαριασθῇ ἐκ τῶν προτέρων διὰ τῶν δεδομένων τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ὡς εὐθυγράμμου θεωρουμένου. Ἐὰν δοθῶσιν δύο πλευραὶ β καὶ γ μετὰ τῆς περιεχομένης γωνίας Α, τὸ ἐμβαδὸν α′ θέλει ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{2}$ βγ ἡμ. Α· ἐὰν δὲ δοθῇ μία πλευρὰ α μετὰ τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν Β, Γ, τὸ ἐμβαδὸν α′ θέλει ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{2}\alpha^2 \frac{\eta\mu\, B\ \eta\mu\, \Gamma}{\eta\mu\,(B+\Gamma)}$· ἀκολούθως θέλομεν ἔχει $\varepsilon = \frac{\alpha'}{\rho^2} P$, ἔνθα P εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν εἰς τὴν ἀκτῖνα περιεχομένων δευτέρων, καὶ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ε ἐκφράζεται διὰ δευτέρων.

Διὰ νὰ ἐφαρμόσωμεν τούτους τοὺς τύπους εἰς τὰ χαραγμένα τρίγωνα ἐπὶ τῆς γηΐνου ἐπιφανείας, ὑποτεθείσης ὡς σφαιρικῆς (1) πρέπει νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ πλευραὶ α, β, γ καθὼς καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς γῆς ρ ἐκφράζεται διὰ μέτρων. Τώρα, ἐπειδὴ τὸ τέταρτον τοῦ μεσημβρινοῦ $\frac{1}{2}\pi\rho$ ἰσοῦται με 10000000 μέτρα, συνάγεται ὅτι λογ ρ = 6. 8038801· ἀπὸ ἄλλο μέρος ἡ ἀκτὶς P ἐκφραζομένη διὰ δευτέρων, ἔχει λογάριθμον 5, 8038801. Ἐὰν λοιπὸν εἰς τὸν λογάριθμον τοῦ ἐμβαδοῦ α' διὰ τετραγωνικῶν μέτρων ἐκφραζομένου, προσεθῇ ὁ σταθερὸς λογάριθμος 2. 196119, καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα ἀφαιρεθῶσι δέκα μονάδες, θέλει προκύψει ὁ λογάριθμος τῆς ὑπεροχῆς ε διὰ δευτέρων ἐκφραζομένης.

Γνωστῆς τῆς ὑπεροχῆς ε ἀφαιρεῖται ἢ ὑποτίθεται ἀφαιρούμενον τὸ τριτημόριον αὐτῆς ἢ $\frac{1}{3}$ ε ἀφ' ἑκάστης γωνίας τοῦ προτεθέντος σφαιρικοῦ τριγώνου, καὶ τότε τὸ εὐθύγραμμον τρίγωνον τὸ σχηματιζόμενον ἀπὸ τὰς πλευρὰς α, β, γ καὶ ἀπὸ τὰς γωνίας $A' = A - \frac{1}{3}\varepsilon$, $B' = B - \frac{1}{3}\varepsilon$, $\Gamma' = \Gamma - \frac{1}{3}\varepsilon$, θέλει περιέχει τὰ ἀναγκαῖα διδόμενα διὰ τὴν προσδιόρισιν ὅλων τῶν μερῶν του· καὶ οὕτως εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν γίνονται γνωστὰ τὰ μέρη τοῦ προτεθέντος σφαιρικοῦ τριγώνου.

ρζ'. Παράδειγμα. Ἂς ὑποτεθῇ γνωστὴ ἡ γωνία Γ καὶ αἱ δύο πλευραὶ α καὶ β, δηλαδή.

$$\Gamma = 123^\circ\ 19'\ 99''.\ 23$$
$$\lambda o \gamma\, \alpha = 4.\ 5891503$$
$$\lambda o \gamma\, \beta = 4.\ 5219271$$

ἡ ποσότης $\frac{1}{2}$ αβ ἡμ Γ ἥτις παριστάνει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἔχει λογάριθμον 8. 78055, εἰς τὸν ὁποῖον προσθέτοντος 2. 19612, ἔχομεν λογε = 0. 97667· ὅθεν ε = 9''.48 καὶ $\frac{1}{3}$ ε = 3'. 16. Τούτου τεθέντος, πρέπει νὰ λύσωμεν τὸ εὐθύγραμμον τρίγωνον εἰς τὸ ὁποῖον ἔχομεν τὰς δύο πλευρὰς α καὶ β ὡς ἀνωτέρω, καὶ τὴν περιεχομένην γωνίαν Γ' = 123°. 19' 96''. 07. Πρὸς τοῦτο ἀκολουθοῦμεν τὴν μέθοδον τοῦ ἀρ 56,

---

(1) Εἰς τὰς γεωδαισικὰς ἐργασίας ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον τὰ τρίγωνα σχηματίζονται μεταξὺ τριῶν στάσεων (stations) αἱ ὁποῖαι ἀνισάκις ἀπέχουν ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς γῆς· πλὴν, δι' ἁρμοδίων ἀναγωγῶν, ἀντὶ τῶν παρατηρηθέντων τριγώνων ἀντικαθιστῶνται τὰ τρίγωνα τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἀπὸ τὰς προβολὰς τῶν στάσεων ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας καθέτου εἰς τὴν διεύθυνσιν τῆς βαρύτητος. Ο. Σ.

λογ α	4· 5891503	ἐφ (φ — 50°)	8· 8878392
λογ β	4· 5219271	σφ ½ Γ′	9· 8381110
ἐφ. φ	0· 0672232	ἐφ $\frac{A'-B'}{2}$	8· 7259502

$$\varphi = 54^\circ\ 90'\ 74''.72 \qquad \frac{A'-B'}{2} = 3^\circ\ 38'\ 39''.27$$

$$\tfrac{1}{2}\Gamma' = 38\ \ 40\ \ 1\ \ 97$$

$$100^\circ - \tfrac{1}{2}\Gamma' = 61\ 59\ 98.03 \qquad \frac{A'+B'}{2} = 38\ \ 40\ \ 1.77$$

$$A' = 41\ 78\ 41.24$$

$$B' = 35\ \ 1\ \ 62.70$$

Μένει νὰ προσδιορισθῇ ἡ τρίτη πλευρὰ γ, τὸ ὁποῖον γίνεται διὰ τῆς ἐξισώσεως $\gamma = \dfrac{\alpha\ \text{ἡμ}\ \Gamma'}{\text{ἡμ}\ A'}$.

λογ α	4· 5891503		
ἡμ Α′	9· 7854893		
Διαφορὰ	4· 8036610	. . . .	4· 8036610
ἡμ Γ′	9· 9705008	ἡμ Β′ . . .	9· 7182661
λογ. γ = ...	4· 7741618	λογ β =	4· 5219271

Εἰς τὸ προτεθὲν λοιπὸν σφαιρικὸν τρίγωνον, τὰ στοιχεῖα τὰ ὁποῖα ἔπρεπε νὰ εὑρεθοῦν, εἶναι:

$$A = 41^\circ\ 78'\ 44''.40$$

$$B = 35\ \ \ 1\ 65.86$$

λογ. γ = 4.7741618, ἢ γ = 59451$^{\mu}$.256.

Σ. Κ. Η δοθεῖσα μέθοδος εἰς τοῦτον τὸν παράγραφον ἠμπορεῖ νὰ χρησιμεύσῃ ἀκόμη διὰ τὴν λύσιν τῶν τριγώνων εἰς τὰ ὁποῖα δύο πλευραὶ πολλὰ ὀλίγον ἤθελον διαφέρει ἀπὸ 200° καὶ ἡ τρίτη ἤθελεν εἶναι μικροτάτη· διότι ἐὰν προεκβάλλωμεν τὰς μεγαλητέρας πλευρὰς Α′Γ, Α′Β, θέλομεν ἔχει σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ ΒΓΑ, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι μικρόταται. σχ. 16.

§. Ζ′. Περὶ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων τῶν ὁποίων δύο γωνίαι εἶναι πολλὰ ὀξεῖαι.

ρη′. Εστω ΑΒΓ τὸ προτεθὲν σφαιρικὸν τρίγωνον εἰς τὸ ὁποῖον Α καὶ Β εἶναι δύο γωνίαι ὀξύταται, ἔστω ΑΜΝ τὸ πολικόν του, εἰς τρόπον ὥστε ΜΝ = 200° — Α καὶ ΑΝ = 200° — Β. Εὰν προεκβληθῶσι τὰ τόξα ΝΜ, ΝΑ, ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Κ′, φανερὸν ὅτι θέλει εἶναι Κ′Μ = Α, καὶ Κ′Α = Β, τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΚ′Μ ἔχει τὰς πλευράς του μικροτάτας, καὶ ἠμπορεῖ νὰ λυθῇ διὰ τῆς μεθόδου τοῦ προηγουμένου παραγράφου. Εστωσαν Α′, Β′, Γ′, αἱ τρεῖς γωνίαι καὶ α, β, γ αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΚ'Μ, θέλομεν ἔχει

$$A' = MAK' = \alpha \qquad \alpha' = K'M = A$$
$$B' = AMK' = \beta \qquad \beta' = AK' = B$$
$$\Gamma' = AK'M = 200^\circ - \gamma \quad \gamma' = AM = 200^\circ - \Gamma.$$

Τὰ τρία λοιπὸν γνωστὰ στοιχεῖα εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κάμνουν γνωστὰ τρία εἰς τὸ τρίγωνον ΑΚ'Μ, καὶ ἐπομένως τρία εἰς τὸ εὐθύγραμμον τρίγωνον εἰς τὸ ὁποῖον τὸ τρίγωνον ΑΚ'Μ ἠμπορεῖ νὰ ἀναχθῇ. Τώρα φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ λύσις τοῦ εὐθυγράμμου τριγώνου δίδει τὴν λύσιν τοῦ ΑΚ'Μ, ἐκ τῆς ὁποίας τέλος συνάγεται ἡ τοῦ προτεθέντος σφαιρικοῦ·

ρθ'. Ἔστω, π.χ., $A = 3^\circ$ $B = 2^\circ$, καὶ ἡ προσκειμένη πλευρὰ $\gamma = 150^\circ$. Τὰ γνωστὰ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΚ'Μ, ἢ μᾶλλον εἰς τὸ Α'Β'Γ' εἶναι $\alpha' = 3^\circ$, $\beta' = 2^\circ$, καὶ ἡ περιεχομένη γωνία $\Gamma' = 50^\circ$. Διὰ τῶν δοθέντων τούτων εὑρίσκεται ἡ σφαιρικὴ ὑπεροχὴ $\varepsilon = \dfrac{\frac{1}{2}\alpha\beta'\,\text{ἡμ.}\,\Gamma'}{P}$ $= 333''.21$, καὶ τὸ τρίτον τῆς ε ἀφαιρεθὲν ἀπὸ Γ', ἀφίνει ὑπόλοιπον $49^\circ\,98'\,88''.93$. Πρέπει λοιπὸν νὰ λύσωμεν εὐθύγραμμον τρίγωνον εἰς τὸ ὁποῖον ἔχομεν τὰς δύο πλευρὰς $\alpha' = 30000''$, $\beta' = 20000''$, καὶ τὴν περιεχομένην γωνίαν $\Gamma'' = 49^\circ\,98'\,88''.93$, Λύοντες δὲ τὸ τρίγωνον τοῦτο εὑρίσκομεν τὰς ἄλλας δύο γωνίας $A'' = 103^\circ\,64'\,86''.33$, $B'' = 46^\circ\,36'\,24''.75$, καὶ τὴν τρίτην πλευρὰν $\gamma' = 21244''.36$. Τώρα ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Α' καὶ Β' τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ὑπερέχουσι τὰς γωνίας Α'' καὶ Β'' τοῦ εὐθυγράμμου κατὰ τὸ $\frac{1}{3}\varepsilon$, πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς ταύτας $\frac{1}{3}\varepsilon$ διὰ νὰ προσδιορίσωμεν ἐκείνας, καὶ οὕτως ἔχομεν διὰ τὴν ζητουμένην λύσιν

$$A' = \alpha = 103^\circ\;65'\;97''.40$$
$$B' = \beta = 46\;\;37\;\;35.82$$
$$\Gamma' = 200 - \gamma' = 197\;\;87\;\;35.64$$

§. Ζ'. Περὶ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου δεκαεπτὰ πλευρῶν.

ρι'. Θέλομεν τελειώσει τὰς ἐφαρμογὰς ταύτας τοῦ τριγωνομετρικοῦ ὑπολογισμοῦ, ἀφ' οὗ, ἀκολουθοῦντες τὸ ἔξοχον σύγραμμα τοῦ Γαουσσίου (Gauss) ἀναφερθὲν εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας βιβλίον Δ', δείξωμεν πῶς διὰ τῆς ἁπλῆς λύσεως δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων ἐγγράφεται τὸ κανονικὸν πολύγωνον δεκαεπτὰ πλευρῶν.

Ἔστω τὸ τόξον $\dfrac{200^\circ}{17} = \varphi$· λέγω ἐν πρώτοις ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν ἐξίσωσιν συν φ + συν 3φ + συν 5φ + συν 7φ + συν 9φ + συν 11φ + συν 13φ + συν 15φ $= \frac{1}{2}$: διότι ἐὰν καλέσωμεν τὸ πρῶτον μέλος Π καὶ πολλαπλασιάσωμεν ὅλους τοὺς ὅρους του ἐπὶ 2συν φ· ἀκολούθως τρέψωμεν κάθε γινόμενον δύο συνημιτόνων εἰς συνημίτονα ἁπλῶν τόξων, πράττοντες τοῦτο κατὰ τὸν τύπον:

$$2\,\text{συν}\,A\;\text{συν}\,B = \text{συν}\,(A+B) + \text{συν}\,(A-B)$$

θέλομεν ἔχει

$$2\Pi\;\text{συν}\,\varphi = 1 + 2\,\text{συν}\,2\varphi + 2\,\text{συν}\,4\varphi + 2\,\text{συν}\,6\varphi\;\ldots + 2\,\text{συν}\,14\varphi + \text{συν}\,15\varphi.$$

Τώρα ἐπειδὴ $17\varphi = 200^\circ$, ἀκολουθεῖ ὅτι $\text{συν}\,2\varphi = \text{συν}\,(200^\circ - 15\varphi) = -\,\text{συν}\,15\varphi$, $\text{συν}\,4\varphi = \text{συν}\,(200^\circ - 13\varphi) = -\,\text{συν}\,13\varphi$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι $\text{συν}\,16\varphi = -\,\text{συν}\,\varphi$. Λοιπὸν

$2\Pi\,\text{συν}\,\varphi = 1 - 2\,\text{συν}\,15\varphi - 2\,\text{συν}\,13\varphi - 2\,\text{συν}\,11\varphi\;\ldots - 2\,\text{συν}\,3\varphi - \text{συν}\varphi$ ἢ $2\Pi\,\text{συν}\varphi = 1 + \text{συν}\varphi - 2\Pi$, ἢ $2\Pi\,(1 + \text{συν}\,\varphi) = 1 + \text{συν}\,\varphi$. Λοιπὸν $\Pi = \frac{1}{2}$.

Τούτου τεθέντος, μοιράζω τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων οἱ ὁποῖοι συγκροτοῦν Π εἰς δύο μέρη, δηλαδὴ:

$$\chi = \text{συν}\,3\varphi + \text{συν}\,5\varphi + \text{συν}\,7\varphi + \text{συν}\,11\varphi$$
$$\psi = \text{συν}\,\varphi + \text{συν}\,9\varphi + \text{συν}\,13\varphi + \text{συν}\,15\varphi$$

Ἔχω λοιπὸν $\chi + \psi = \frac{1}{2}$· πολλαπλασιάζω τώρα τοὺς τέσσαρας ὅρους τοῦ χ ἐπὶ τῶν τεσσάρων ὅρων τοῦ ψ, καὶ τρέπων τὰ γινόμενα τῶν συνημιτόνων εἰς συνημίτονα ἁπλῶν τόξων, εὑρίσκω μετὰ τὰς ἀναγωγάς,

$$\chi\psi = 2\,(\text{συν}\,2\varphi + \text{συν}\,4\varphi + \text{συν}\,6\varphi\;\ldots + \text{συν}\,16\varphi)$$
ἢ $$\chi\psi = -\,2\,(\text{συν}\,15\varphi + \text{συν}\,13\varphi + \text{συν}\,11\varphi\;\ldots + \text{συν}\varphi)$$
ἢ τέλος $\chi\psi = -\,1$

Διὰ τῶν ἐξισώσεων τούτων εὑρίσκω

$$\chi = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{17}, \qquad \psi = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\sqrt{17}.$$

Ἐὰν τώρα ἕκαστον τῶν ἀθροισμάτων χ καὶ ψ μοιρασθῇ πάλιν εἰς δύο μέρη, δηλαδὴ:

$$\chi = \sigma + \tau \qquad \psi = \omega + \upsilon$$

$$\sigma = \text{συν}\,3\varphi + \text{συν}\,5\varphi \quad \omega = \text{συν}\,\varphi + \text{συν}\,13\varphi$$
$$\tau = \text{συν}\,7\varphi + \text{συν}\,11\varphi \quad \upsilon = \text{συν}\,9\varphi + \text{συν}\,15\varphi$$

θέλει εὑρεθῇ παρομοίως

$$\sigma\tau = -\,\tfrac{1}{4}, \qquad \omega\upsilon = -\,\tfrac{1}{4}$$

Ὥστε εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθῶσιν οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ $\sigma, \tau, \omega, \upsilon$ διὰ δύο νέων δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων.

Τέλος γνωρίζοντες $\text{συν}\,\varphi + \text{συν}\,13\varphi = \omega$ καὶ $\text{συν}\,\varphi\;\text{συν}\,13\varphi = \frac{1}{2}(\text{συν}\,12\varphi + \text{συν}\,14\varphi) = -\,\frac{1}{2}(\text{συν}\,3\varphi + \text{συν}\,5\varphi) = -\frac{1}{2}\,\sigma$, εὑ-

εὑρίσκομεν διὰ μιᾶς τετάρτης δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως τὴν τιμὴν τοῦ συνφ, καὶ ἐντεῦθεν τὴν τιμὴν τῆς πλευρᾶς τοῦ προτεθέντος πολυγώνου, ἥτις εἶναι 2ἡμφ ἢ $2\sqrt{(1-\text{συν}^2\varphi.)}$

Ὅσον διὰ τὴν μέθοδον τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν εἰς τὸν μοιρασμὸν τῶν διαφόρων τούτων ἐξισώσεων, συνέχεται μὲ μίαν λεπτοτάτην θεωρίαν, θεμελιουμένην ἐπὶ τῆς ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως, καὶ τῆς ὁποίας ἠμπορεῖ τις νὰ ἴδῃ τὴν ἀνάπτυξιν εἰς τὸ αὐτὸ σύγγραμμα τοῦ Γαυσσίου, ἢ εἰς τὸ δοκίμιον περὶ τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν, ἔκδοσις δευτέρα· ἐκεῖ εὑρίσκεται ἡ πλήρης ἀπόδειξις τοῦ ὡραιοτάτου τούτου καὶ ἐνταυτῷ γενικωτάτου θεωρήματος:

« Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ν ἦναι πρῶτος, καὶ ν—1 προκύπτῃ ἀπὸ « τὸ γινόμενον τῶν πρώτων παραγόντων $2^{\alpha}\,3^{\beta}\,5^{\gamma}$ κτλ. ἡ διαίρεσις « τοῦ κύκλου εἰς ν ἴσα μέρη ἠμπορεῖ πάντοτε νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν « λύσιν α ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου, β τοῦ τρίτου, γ τοῦ πέμπτου « βαθμοῦ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς »

ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ.