$$\alpha < 100^\circ,\ B > 100^\circ \begin{cases} A + B < 200^\circ & \text{δύο λύσεις.} \\ A + B > 200^\circ & \text{μία λύσις.} \end{cases}$$

$$\alpha < 100^\circ,\ B < 100^\circ \begin{cases} A < B & \text{δύο λύσεις.} \\ A > B & \text{μία λύσις.} \end{cases}$$

ὑπάρχει μία μόνη λύσις ὅταν ἔχῃ χώραν μία τῶν ἀκολούθων ἀνισοτήτων $\alpha = 100^\circ$, $A = B$, $A + B = 200^\circ$. ὑπάρχουν δὲ δύο ἐὰν $B = 100^\circ$.

γϐ'. Εἰς ὅλας τὰς περιστάσεις, διὰ νὰ ἀποφεύγωμεν τὰς ἀνωφελεῖς ἢ ψευδεῖς λύσεις, πρέπει νὰ εὐθυμώμεθα, 1ον ὅτι κάθε γωνία ἢ πλευρὰ πρέπει νὰ ἦναι μικροτέρα τῶν 200°.

2.ον Ὅτι αἱ μεγαλήτεραι γωνίαι εἶναι ἀπέναντι τῶν μεγαλητέρων πλευρῶν, ὥστε ἐὰν $A > B$ πρέπει καὶ $\alpha > \beta$, καὶ τ' ἀνάπαλιν.

Παραδείγματα τῆς λύσεως τῶν σφαιρικῶν τριγώνων.

γγ'. Παράδειγμα Α'. Ἔστωσαν Ο, Μ, Ν (σχ. 15) τρεῖς στιγμαὶ κείμεναι εἰς ἐπίπεδον κλίνον πρὸς τὸν ὁρίζοντα· ἐὰν ἀπὸ τὰς τρεῖς ταύτας στιγμὰς κατεβασθῶσιν αἱ κάθετοι ΟΔ, Μμ, Νν ἐπὶ τοῦ ὁριζοντείου ἐπιπέδου ΔΕΖ, τὰ εὑρισκόμενα ἀντικείμενα εἰς Ο, Μ, Ν θέλουν παρασταθῇ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντείου ἐπιπέδου διὰ τῶν προβολῶν των (1) Δ, μ, ν, καὶ ἡ γωνία ΜΟΝ διὰ τῆς μΔν. Τούτου τεθέντος, δοθείσης τῆς γωνίας ΜΟΝ καὶ τῶν κλίσεων

(1) Προβολὴ (projection) μιᾶς στιγμῆς ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου καλεῖται ὁ ποῦς τῆς φερομένης καθέτου ἀπὸ τὴν στιγμὴν εἰς τὸ ἐπίπεδον· προβολὴ δὲ μιᾶς εὐθείας ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι ἡ εὐθεῖα ἥτις ἑνόνει τὰς προβολὰς δύο στιγμῶν τῆς εὐθείας ἐπὶ τοῦ ἰδίου ἐπιπέδου· ἐὰν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου προβολήσωμεν δύο εὐθείας τεμνομένας εἰς τὸ διάστημα, ἡ σχηματιζομένη γωνία ἀπὸ τὰς προβολὰς ταύτας ὀνομάζεται γωνία προβολικὴ (angle de projection). Ο. Μ.

τῶν δύο πλευρῶν της ΟΜ, ΟΝ ἐπὶ τῆς κορυφαίας (verticale) ΟΔ, νὰ εὑρεθῇ ἡ προβολικὴ γωνία μΔν.

Ἐκ τῆς ςιγμῆς Ο ὡς ἐκ κέντρου μὲ ἀκτῖνα = 1, ἂς γραφθῇ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια· ἀπὸ τὴν συναπάντησιν τῆς σφαιρικῆς ταύτης ἐπιφανείας μὲ τὰς πλευρὰς ΟΜ, ΟΝ καὶ τὴν κορυφαίαν ΟΔ εἰς Α, Β, Γ, καὶ τὴν ἕνωσιν τῶν ςιγμῶν τούτων διὰ τόξων μεγίςων κύκλων, σχηματίζεται σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι γνωςαί· δύναται λοιπὸν νὰ προσδιορισθῇ ἡ γωνία Γ ἴση τῇ μΔν διὰ τοῦ τύπου τῆς πρώτης περιςάσεως.

Ἔςω παραδείγματος χάριν, ἡ γωνία ΜΟΝ = ΑΒ = 64° 44′ 60″· ἡ γωνία ΔΟΜ = ΑΓ = 98° 12′, καὶ ἡ γωνία ΔΟΝ = ΒΓ = 105° 42′. Ὁ ἀναφερθεὶς τύπος δίδει

$$\text{ἡμ.}^2 \tfrac{1}{2}\Gamma = P^2 \cdot \frac{\text{ἡμ.}28^\circ\ 57'30''\ \text{ἡμ.}35^\circ\ 87'30''}{\text{ἡμ}\ 98^\circ\ 12'\ \text{ἡμ}\ 105^\circ\ 42}.$$

Τιμὴ ἥτις λογαριάζεται οὕτω:

Λ. ἡμ 28° 57·30″	9· 6373956	Λ. ἡμ 98° 12′ . . .	9· 9998106
Λ. ἡμ 35° 87′30″. . . .	9· 7276562	Λ. ἡμ 105° 42′ . . .	9· 9984242
ἄθροισμα + 2Λ. Ρ.	39· 3650518		19·9982348
	19. 9982348		
2Λ. ἡμ ½ Γ	19 3668170		
Λ. ἡμ ½ Γ	9· 6834085	½ Γ = 32° 4′ 70″.5	
		Γ = 64 9 41	

Η γωνία λοιπὸν 64° 44′ 60″ μετρουμένη εἰς ἐπίπεδον κλίνον πρὸς τὸν ὁρίζοντα, ἀνάγεται εἰς 64° 9′ 41″ προβολουμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁρίζοντος.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι ὠφέλιμον εἰς τὴν σχεδιαςικὴν τέχνην (art de lever les plans), ὅταν αἱ ςιγμαὶ τῶν ὁποίων ζητεῖται ἡ προσδιόρισις εὑρίσκονται εἰς ὕψη ἐπαισθητῶς διάφορα ἄνω τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντείου ἐπιπέδου.

γδ′. Παράδειγμα Β′. Γνωρίζοντες τὰ πλάτη δύο ςιγμῶν τῆς σφαίρας, καὶ τὴν διαφορὰν τῶν μηκῶν των, νὰ εὕρωμεν τὸ πλέον σιμοτινόν των διάςημα.

Φανταζόμεθα σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ ΑΓΒ σχηματιζόμενον ἀπὸ τὸν βόρειον πόλον Γ, καὶ τοὺς δύο τόπους Α καὶ Β περὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος· εἰς τὸ τρίγωνον τοῦτο γνωρίζομεν τὴν εἰς τὸν πόλον γωνίαν ΑΓΒ, ἥτις εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν τῶν δύο τόπων Α καὶ Β, καὶ τὰς δύο πλευρὰς ΑΓ, ΓΒ αἱ ὁποῖαι εἶναι τὰ συμπληρώματα τοῦ πλάτους τῶν ςιγμῶν Α καὶ Β. Προσδιορίζομεν λοιπὸν τὴν τρίτην πλευρὰν ΑΒ διὰ τῶν τύπων τῆς τρίτης περιςάσεως.

Εςωσαν, φερ' εἰπεῖν, Α καὶ Β τὰ παρατηρητήρια (observatoires) τῶν Παρισίων καὶ τοῦ Πεκίν· τὸ βόρειον πλάτος τῶν Παρισίων εἶναι 54° 26′ 36″, τὸ τοῦ Πεκὶν 44° 33′ 73″, καὶ ἡ διαφορὰ τῶν μηκῶν των 126° 80′ 56″. Οὕτως ἔχομεν

$$\alpha = 45^\circ\ 73'\ 64''$$
$$\beta = 55\ 66\ 27$$
$$\Gamma = 126\ 80\ 56 \cdot$$

Εχοντες ταῦτα τὰ δοθέντα προσδιορίζομεν τὴν πλευρὰν γ διὰ τῶν τύπων $\text{ἐφ.}\varphi = \frac{\text{συν}\Gamma\,\text{ἐφ}\beta}{\text{p}}$, $\text{συν}\gamma = \frac{\text{συν}\beta\,\text{συν}(\alpha-\varphi)}{\text{συν}\ \varphi}$, τῶν ὁποίων ἰδοὺ ὁ ὑπολογισμός.

Λ. συν Γ 9. 6114352
Λ. ἐφ β 10. 0776707
Λ. ἐφ φ 9. 6891059

Η γωνία φ τὴν ὁποίαν δίδουν οἱ πίνακες διὰ τοῦ λογαρίθμου τούτου τῆς ἐφαπτομένης εἶναι 28° 94′ 23″. Ἀλλὰ πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι συν Γ εἶναι ἀρνητικὸν, καὶ οὕτως ἐπειδὴ ἐφ.φ εἶναι ἀρνητικὴ, πρέπει νὰ λάβωμεν $\varphi = -\ 28^\circ\ 94'\ 23''$, καὶ τοῦτο δίδει $\alpha - \varphi = 74^\circ 67' 87''$. Τούτου τεθέντος, παρατηροῦντες ὅτι συν $(-\varphi) =$ συνφ, τελειόνομεν ὡς ἀκολούθως τὸν ὑπολογισμόν.

Λ. συν(α—φ) 9. 5880938
Λ. συν β 9. 8071953

19. 3952891
Λ. συν φ 9. 9534823

Λ. συν γ 9. 4418068

Λοιπὸν τὸ ζητούμενον διάστημα $\gamma = 82^\circ\ 16'\ 04''$. Τὸ αὐτὸ τοῦτο διάστημα ἠμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ διὰ μυριαμέτρων διὰ 821.605· διότι ἓν μυριάμετρον εἶναι τὸ μῆκος ἑνὸς τόξου δέκα λεπτῶν, καὶ ἓν μέτρον εἶναι τὸ μῆκος ἑνὸς τόξου ἴσου μὲ ἓν δέκατον δευτέρου λεπτοῦ.

γε΄. Διὰ νὰ δώσωμεν ἓν παράδειγμα τῆς πέμπτης περιστάσεως, ἂς προτείνωμεν τὴν λύσιν τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου εἰς τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν τὰς δύο γωνίας $A = 78^\circ\ 50'$, $B = 54^\circ\ 0'$, καὶ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς τὴν μίαν τούτων $\alpha = 99^\circ\ 20'\ 17''$. Μὲ τὰ δοθέντα ταῦτα, εὑρίσκομεν διὰ τοῦ πίνακος τοῦ ἄρθρου γα΄, ὅτι δὲν πρέπει νὰ ὑπάρχῃ παρὰ μία μόνη λύσις, διότι ἐνταῦτῷ ἔχομεν $\alpha < 100^\circ$, $B < 100^\circ$, καὶ $A > B$. Ἰδοὺ ὁ ὑπολογισμὸς ταύτης τῆς λύσεως.

1ον Ἡ πλευρὰ β εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου $\text{ἡμ}\beta = \text{ἡμ}\alpha \dfrac{\text{ἡμ}B}{\text{ἡμ}A}$

Λ. ἡμ α 9. 9999659
Λ. ἡμ B 9. 8751256
10—Λ. ἡμ A 0. 0252525

Λ. ἡμ β 9. 9003440

Τοῦτο δίδει $\beta = 58^\circ\ 50'\ 14''$ ἢ τὸ παραπλήρωμα τούτου τοῦ τόξου $141^\circ\ 49'\ 86''$· ἀλλ᾿ ἐπειδὴ ἡ γωνία $B < A$ πρέπει καὶ ἡ πλευρὰ β νὰ ἦναι $< \alpha$, ὅθεν ἡ πρώτη τιμὴ εἶναι μόνον ἀποδεκτή.

2ον Εἰς εὕρεσιν τῆς πλευρᾶς γ πρέπει νὰ γένῃ ἐφ. φ $= \frac{\text{συν } B \text{ ἐφ } \alpha}{P}$, ἡμ. $(\gamma - \varphi) = \frac{\text{ἐφ } B \text{ ἡμ } \varphi}{\text{ἐφ } A} = \frac{\text{ἐφ } B \text{ σφ } A \text{ ἡμ } \varphi}{P^2}$.

		Λ.ἡμφ	9.9999220
Λ.συνB	9.8204063	Λ.ἐφ.B—ΛΡ	0.0547193
Λ.ἐφα—ΛΡ ...	1.9016731	Λ.σφA	9.5455236
Λ.ἐφ.φ ...	11.7220794	Λ.ἡμ(γ—φ) .	9.6001649
$\varphi = 98^\circ 79' 28''.8$		$\gamma - \varphi = 26^\circ 7' 70''.5$	

Ἐπειδὴ ἐνταῦθα γ—φ προσδιορίζεται δι' ἡμιτόνου, διὰ τοῦτο τόσον ἠμπορεῖ γ—φ νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν τιμὴν $26^\circ 7' 70''.5$ ὅσον καὶ μὲ τὸ παραπλήρωμά της $173^\circ 92' 29''.5$· πλὴν ἐπειδὴ ἐὰν ληφθῇ ἡ δευτέρα αὕτη τιμὴ, ἤθελε προκύψει $\gamma > 200^\circ$, διὰ τοῦτο δὲν εἶναι ἀποδεκτὴ καὶ πρέπει νὰ ληφθῇ ἡ πρώτη τιμή· οὕτως γ ἰσοῦται μὲ $124^\circ 71' 99''.3$.

3ον Τέλος διὰ νὰ λογαριάσωμεν κατ' εὐθεῖαν τὴν γωνίαν Γ λαμβάνομεν τοὺς τύπους σφ.$\psi = \frac{\text{συν } \alpha \text{ ἐφ } B}{P}$, ἡμ $(\Gamma - \psi) = \frac{\text{συν } A \text{ ἡμ } \psi}{\text{συν } B}$.

		Λ.ἡμψ	9.9999563
Λ.συνα	8.0982928	Λ.συνA	9.5202711
Λ.ἐφB—ΛΡ	0.0547193	Λ.Ρ—ΛσυνB .	0.1795937
Λ.σφ.ψ ...	8,1530121	Λ.ἡμ(Γ—ψ)	9.6998211
$\psi = 99^\circ 9' 45''.5$		$\Gamma - \psi = 33^\circ 40' 54''.5$	
		ψ.	99 9 45. 5
		Γ =	132 50 0. 0

Δὲν ἐλάβομεν διὰ Γ—ψ τὸ παραπλήρωμα τοῦ $33^\circ 40' 54''.5$ διότι τοῦτο ἤθελε δώσει διὰ Γ τιμὴν μεγαλητέραν ἀπὸ 2000· ὅθεν τῷ ὄντι βλέπομεν ὅτι τὸ προτεθὲν πρόβλημα δὲν εἶναι ἐπιδεκτικὸν πάρεξ μιᾶς μόνης λύσεως.

Σημείωσις. Ἐὰν κάμωμεν χρῆσιν τῆς παλαιᾶς διαιρέσεως τοῦ κύκλου διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τούτων τῶν παραδειγμάτων, αἱ διδόμεναι ἢ προσδιοριζόμεναι γωνίαι θέλουν ἐκφρασθῇ ὡς ἀκολούθως:

Παράδειγμα Α'. Γωνίαι διδόμεναι. ΜΟΝ $=58\;0'5''$, ΔΟΜ$=88^\circ\;18'\;28''$, 8, ΔΟΝ$=94^\circ\;52'\;42''$, 8. Γωνία προσδιοριζομένη Γ$=57^\circ 41'\;4''$, 9.

Παρ. Β'. Γωνίαι καὶ πλευραὶ διδόμεναι. α$=41^\circ\;9'\;46''$, β$=50^\circ\;5'\;47''$, Γ$=114^\circ 7'\;30''$· πλευρὰ συναγομένη· γ$=73^\circ 46'\;40''$.

Παρ. Γ'. Γωνίαι καὶ πλευραὶ διδόμεναι. Α$=70^\circ 39'$, Β$=48^\circ$, $36'$, α$=89^\circ\;16'\;53''$, 5. Γωνίαι καὶ πλευραὶ προσδιοριζόμεναι β$=52^\circ\;39'\;4''5$. γ$=112^\circ 20'16''6$, Γ$=119^\circ 15'0''$.