τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἀτράκτου; καὶ τ᾽ ἀνάπαλιν. Η λύσις λοιπὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον δύο πλευραὶ κάμνουν ὁμοῦ 200^o, ἀνάγεται εἰς τὴν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΓΔ, ἢ εἰς τὴν τοῦ ὀρθογωνίου ΒΔΕ ἡμίσεως τοῦ ΓΒΔ.

Οταν αἱ δύο πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ ἦναι παραπληρώματα ἡ μία τῆς ἄλλης, πρέπει τὸ αὐτὸ νὰ ὑπάρχῃ καὶ διὰ τὰς ἀπέναντι γωνίας ΑΓΒ, ΒΑΓ· διότι ΒΓΔ εἶναι παραπλήρωμα τῆς ΒΓΑ· ἀλλὰ ΒΓΔ=Δ=Α. Αδύνατον λοιπὸν νὰ ὑπάρχῃ $\alpha+\gamma=200^o$, χωρὶς ἐνταυτῷ $Α+Γ=200^o$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀντίςροφον.

Εντεῦθεν βλέπομεν ὅτι εἰς τὴν λύσιν τῶν σφαιρικῶν ὀρθογωνίων τρίγωνων συμπεριλαμβάνεται, 1ον ἡ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων μίαν πλευρὰν ἴσην μὲ τεταρτημόριον. 2ον ἡ τῶν σφαιρικῶν ἰσοσκελῶν. 3ον ἡ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων εἰς τὰ ὁποῖα τὸ ἄθροισμα δύο πλευρῶν, ὡς καὶ τῶν ἀπέναντι δύο γωνιῶν, ἰσοῦται μὲ 200^o.

Αρχαὶ διὰ τὴν λύσιν τῶν σφαιρικῶν τριγώνων ἐν γένει.

οέ. Εἰς κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν εἶναι ἀνάλογα τῶν ἡμιτόνων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν.

Εςω ΑΒΓ (σχ. 13) ὁποιονδήποτε σφαιρικὸν τρίγωνον· λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει ἡμΒ : ἡμΓ : : ἡμΑΓ : ἡμΑΒ.

Απὸ τὴν κορυφὴν Α ἂς κατεβασθῇ τὸ τόξον ΑΔ κάθετον ἐπὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΒΓ· τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ δίδουν τὰς ἀναλογίας

ἡμ Β : Ρ : : ἡμ ΑΔ : ἡμ ΑΒ.

Ρ : ἡμ Γ : : ἡμ ΑΓ : ἡμ ΑΔ.

Απὸ τὸν κατὰ τάξιν πολλαπλασιασμὸν τῶν δύο τούτων ἀναλογιῶν, καὶ τὴν τῶν κοινῶν παραγόντων ἐξάλειψιν, συνάγεται

. ἡμ Β : ἡμ Γ : : ἡμ ΑΓ : ἡμ ΑΒ.

Ἐὰν ἡ κάθετος ΑΔ ἔπιπτε ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 14), ἤθελον προκύψει αἱ αὐταὶ ἀναλογίαι εἰς τὴν μίαν τῶν ὁποίων ἡμ Γ θὰ ἐσημείονε ἡμ ΑΓΔ· πλὴν ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΓΔ καὶ ἡ ΑΓΒ εἶναι παραπληρώματα ἡ μία τῆς ἄλλης, τὰ ἡμίτονά των εἶναι ἴσα· καὶ διὰ τοῦτο πάντοτε ἤθελεν ἀποδειχθῇ ὅτι ἡμΒ : ἡμΓ : : ἡμ ΑΓ : ἡμ ΑΒ.

Ἐστωσαν α, β, γ αἱ ἀπέναντι εἰς τὰς γωνίας Α, Β, Γ πλευραὶ, ἡ κάθε μία εἰς τὴν κάθε μίαν· κατὰ τὴν παροῦσαν ἀρχὴν θέλομεν ἔχει ἡμ Α : ἡμ α : : ἡμ Β : ἡμ β : : ἡμ Γ : ἡμ γ· ἐκ τῶν ὁποίων ἀναλογιῶν προκύπτει ἡ διπλῆ ἐξίσωσις:

$$\frac{\text{ἡμ } Α}{\text{ἡμ } α} = \frac{\text{ἡμ } Β}{\text{ἡμ } β} = \frac{\text{ἡμ } Γ}{\text{ἡμ } γ}.$$

ος'. Εἰς κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ συνημίτονον μιᾶς γωνίας ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τοῦ συνημιτόνου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς πολλαπλασιασθέντος, καὶ τοῦ γινομένου τῆς ἰδίας ἀκτῖνος ἐπὶ τῶν συνημιτόνων τῶν προσκειμένων πλευρῶν, διὰ τοῦ γινομένου τῶν ἡμιτόνων τῶν ἰδίων τούτων πλευρῶν: δηλαδὴ, διὰ τὴν γωνίαν Γ, παραδείγματος χάριν, ἔχομεν $\text{συν}Γ = \frac{Ρ^2 \text{συν}γ - Ρ\text{συν}α\ \text{συν}β}{\text{ἡμ } α\ \text{ἡμ } β}$

καὶ παρομοίως διὰ τὰς ἄλλας δύο, $\text{συν}Α = \frac{Ρ^2 \text{συν}α - Ρ\text{συν}β\,\text{συν}γ}{\text{ἡμ } β\ \text{ἡμ } γ}$,

$$\text{συν}Β = \frac{Ρ^2 \text{συν}β - Ρ\text{συν } α\ \text{συν } γ}{\text{ἡμ } α\ \text{ἡμ } γ}.$$

Ἐστω ΑΒΓ τὸ προτεθὲν τρίγωνον (σχ. 15) εἰς τὸ ὁποῖον κάμνομεν ΒΓ = α, ΑΓ = β, ΑΒ = γ. Ἀς σύρωμεν ἀπὸ τὸ κέντρον Ο τῆς σφαίρας τὰς ἀπροσδιορίστους εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ· ἀφ' οὗ λάβωμεν τὴν ΟΔ κατ' ἀρέσκειαν, ἐκ τῆς στιγμῆς Δ ἂς ἄξωμεν τὴν ΔΕ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΟΓΑ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΔ, καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΟΓΒ τὴν ΔΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ἰδίαν εὐθεῖαν ΟΔ, αἱ ὁποῖαι δύο κάθετοι συναπαντοῦν εἰς Ε καὶ Ζ τὰς προεκβολὰς τῶν ἀκτίνων ΟΑ, ΟΒ· τέλος πάντων ἂς ἐπιζεύξωμεν τὴν ΕΖ.

Η γωνία Δ τοῦ τριγώνου ΕΔΖ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, μετρεῖ τὴν γωνίαν τῶν ἐπιπέδων ΟΓΑ, ΟΓΒ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ γωνία ΕΔΖ ἰσοῦται μὲ τὴν γωνίαν Γ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΓΒ: τώρα εἰς τὰ τρίγωνα ΔΕΖ, ΟΕΖ, ἔχομεν (με')

$$\frac{\text{συν}\,\mathrm{E\Delta Z}}{\mathrm{P}} = \frac{\overline{\mathrm{\Delta E}}^2 + \overline{\mathrm{\Delta Z}}^2 - \overline{\mathrm{EZ}}^2}{2\mathrm{\Delta E}\cdot\mathrm{\Delta Z}}$$

$$\frac{\text{συν}\,\mathrm{EOZ}}{\mathrm{P}} = \frac{\overline{\mathrm{OE}}^2 + \overline{\mathrm{OZ}}^2 - \overline{\mathrm{EZ}}^2}{2\mathrm{OE}.\mathrm{OZ}}$$

Ἐὰν ἀπὸ τὴν δευτέραν τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων λάβωμεν τὴν τιμὴν τοῦ $\overline{\mathrm{EZ}}^2$ καὶ εἰς τὴν πρώτην τὴν ἀντεισάξωμεν θέλομεν ἔχει

$$\frac{\text{συν}\,\mathrm{E\Delta Z}}{\mathrm{P}} = \frac{\overline{\mathrm{\Delta E}}^2 + \overline{\mathrm{\Delta Z}}^2 - \overline{\mathrm{OE}}^2 - \overline{\mathrm{OZ}}^2 + 2\mathrm{OE}.\mathrm{OZ}\,\frac{\text{συν}\,\mathrm{EOZ}}{\mathrm{P}}}{2\mathrm{\Delta E}\cdot\mathrm{\Delta Z}}$$

Ἀλλὰ $\overline{\mathrm{OE}}^2 - \overline{\mathrm{\Delta E}}^2 = \overline{\mathrm{O\Delta}}^2$ καὶ $\overline{\mathrm{OZ}}^2 - \overline{\mathrm{\Delta Z}}^2 = \overline{\mathrm{O\Delta}}^2$, ἔχομεν λοιπὸν

$$\text{συν}\,\mathrm{E\Delta Z} = \frac{\mathrm{OE}.\mathrm{OZ}\ \text{συν}\mathrm{EOZ} - \overline{\mathrm{O\Delta}}^2.\mathrm{P}}{\mathrm{\Delta E}.\mathrm{\Delta Z}}.$$

Ἀλλό τι δὲν μένει παρὰ νὰ ἀντικαταστήσωμεν εἰς ταύτην τὴν ἐξίσωσιν τὰς ἀναφερομένας τιμὰς εἰς τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον: τώρα ἔχομεν

$$\mathrm{E\Delta Z} = \Gamma,\ \mathrm{EOZ} = \mathrm{AB} = \gamma,\ \frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{\Delta E}} = \frac{\mathrm{P}}{\text{ἡμ}\,\mathrm{AOE}} = \frac{\mathrm{P}}{\text{ἡμ}\,\beta},$$

$$\frac{OZ}{AZ} = \frac{P}{\eta\mu \Delta OZ} = \frac{P}{\eta\mu\, \alpha},\quad \frac{O\Delta}{\Delta E} = \frac{\sigma\upsilon\nu\, \Delta OE}{\eta\mu \Delta OE} = \frac{\sigma\upsilon\nu\, \beta}{\eta\mu\, \beta},$$

$$\frac{O\Delta}{\Delta Z} = \frac{\sigma\upsilon\nu\, \Delta OZ}{\eta\mu \Delta OZ} = \frac{\sigma\upsilon\nu\, \alpha}{\eta\mu\, \alpha}\cdot$$ Λοιπὸν

$$\sigma\upsilon\nu\, \Gamma = \frac{P^2 \sigma\upsilon\nu\, \gamma - P \sigma\upsilon\nu\, \alpha\, \sigma\upsilon\nu\, \beta}{\eta\mu\, \alpha\, \eta\mu\, \beta}.$$

Η ἀρχὴ αὕτη, τῆς ὁποίας ἡ διαδοχικὴ ἐφάρμοσις εἰς τὰς τρεῖς γωνίας, χορηγεῖ τρεῖς ἐξισώσεις, ἀρκεῖ διὰ τὴν λύσιν ὅλων τῶν προβλημάτων τῆς σφαιρικῆς τριγωνομετρίας· ἔχει, ὡς πρὸς τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα, τὴν αὐτὴν γενικότητα τὴν ὁποίαν ἡ τοῦ ἀρ. μέ ἔχει ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα. Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ πάντοτε δίδονται τρία ςοιχεῖα διὰ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ προσδιορισθῶσι τὰ ἄλλα τρία, φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ ἀρχὴ αὕτη δίδει τὰς ἀναγκαίας διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ἐξισώσεις: ἐξισώσεις τῶν ὁποίων ἡ ἀνάπτυξις ἀνήκει εἰς τὴν ἀνάλυσιν ὥςε ἐξ αὐτῶν, κατὰ τὰς διαφόρους περιςάσεις, νὰ συναχθῶσιν οἱ ἁπλούςεροι καὶ ἁρμοδιώτεροι εἰς τὸν λογαριθμικὸν ὑπολογισμὸν τύποι.

οζ'. Επειδὴ ἡ περὶ τῆς ὁποίας ὁ λόγος ἀρχὴ εἶναι γενικωτάτη, πρέπει νὰ περιέχῃ εἰς ἑαυτὴν ὅλας τὰς ἄλλας ἀρχὰς τὰς εἰς τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα ἀναφερομένας, καὶ μάλιςα τὴν τοῦ ἀρ. οε'. τοῦτο εἶναι εὔκολον νὰ βεβαιώσωμεν.

Τῷ ὄντι ἡ ἐξίσωσις $\sigma\upsilon\nu\, \Gamma = \dfrac{P^2 \sigma\upsilon\nu\gamma - P\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\, \alpha\, \eta\mu\, \beta}$ δίδει $P^2 - \sigma\upsilon\nu^2\Gamma$ ἢ $\eta\mu^2\Gamma =$

$$\frac{P^2 \eta\mu^2\alpha\, \eta\mu^2\beta - P^2 \sigma\upsilon\nu^2\alpha\, \sigma\upsilon\nu^2\beta + 2P^3\, \sigma\upsilon\nu\, \alpha\, \sigma\upsilon\nu\, \beta\, \sigma\upsilon\nu\gamma - P^4\, \sigma\upsilon\nu^2\gamma}{\eta\mu^2\alpha\, \eta\mu^2\beta}$$

Αλλὰ $\eta\mu^2\alpha\, \eta\mu^2\beta = (P^2 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha)(P^2 - \sigma\upsilon\nu^2\beta) = P^4 - P^2 \sigma\upsilon\nu^2\alpha - P^2 \sigma\upsilon\nu^2\beta + \sigma\upsilon\nu^2\alpha\, \sigma\upsilon\nu^2\beta$. Αντεισάγοντες λοιπὸν καὶ ἐξάγοντες τὴν ῥίζαν, θέλομεν ἔχει

$ἡμ.Γ = \frac{P}{ἡμαἡμβ} \sqrt{(P^4 - P^2συν^2α - P^2συν^2β - P^2συν^2γ + 2Pσυνασυνβ συν γ)}$.

Ἔςω διὰ τὸ σύντομον $Ω = \sqrt{(P^4 - P^2συν^2α - P^2συν^2β - P^2συ.γ + 2Pσυν\,α\,συν\,β\,συν\,γ)}$· θέλομεν ἔχει λοιπὸν

$$ἡμ.Γ = \frac{PΩ}{ἡμ.α\ ἡμ.β},\ ἢ\ \frac{ἡμ.Γ}{ἡμ.γ} = \frac{PΩ}{ἡμ.α\ ἡμ.β\ ἡμγ}.$$

Αἱ τιμαὶ τοῦ συν Α καὶ συν Β ἤθελον δώσει παρομοίως

$$\frac{ἡμ.Α}{ἡμ.α} = \frac{PΩ}{ἡμ.αἡμ.βἡμ.γ},\ \frac{ἡμ.Β}{ἡμ.β} = \frac{PΩ}{ἡμ.α\,ἡμ.βἡμ.γ}$$

διότι ἡ ποσότης Ω δὲν ἀλλάσει, ὅταν γένῃ ἡ μετάθεσις μεταξὺ δύο τῶν ποσοτήτων α, β, γ· λοιπὸν $\frac{ἡμ.Α}{ἡμ.α} = \frac{ἡμΒ}{ἡμβ} = \frac{ἡμ.Γ}{ἡμ.γ}$, ἐξισώσεις αἵτινες ἄλλό τι δὲν εἶναι παρὰ ἡ τοῦ οε΄ ἄρ. ἀρχή.

οη΄. Αἱ εὑρεθεῖσαι τιμαὶ διὰ συν Γ καὶ ἡμ Γ, ἠμποροῦν νὰ χρησιμεύσουν διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν γωνιῶν ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου τοῦ ὁποίου εἶναι γνωςαὶ αἱ τρεῖς πλευραί· πλὴν ὑπάρχουν ἄλλοι τύποι ἐπιτηδειότεροι διὰ τὸν λογαριθμικὸν ὑπολογισμόν.

Τῷ ὄντι, ἐὰν εἰς τὸν τύπον $P^2 - PσυνΓ = 2ἡμ.^2\tfrac{1}{2}Γ$, ἀντεισάζωμεν τὴν τιμὴν τοῦ συν Γ, θέλομεν ἔχει $\frac{2ἡμ.^2\frac{1}{2}Γ}{P^2}$ $= 1 - \frac{συν\,Γ}{P} = \frac{συν\,α\,συν\,β + ἡμ.α\,ἡμ.β - P\,συν\,γ}{ἡμ.β\,ἡμ.α}.$

Ο ἀριθμητὴς ταύτης τῆς ἐκφράσεως ἄγεται εἰς Pσυν $(α-β)$ — Pσυν γ· τώρα κατὰ τὸν τύπον Pσυν κ — Pσυνπ $= 2ἡμ\tfrac{1}{2}(π + κ)ἡμ\tfrac{1}{2}(π - κ)$ (κη΄), εὑρίσκομεν Pσυν $(α-β)$ — Pσυν γ $= 2ἡμ.\tfrac{1}{2}(γ - β + α)ἡμ\tfrac{1}{2}(γ - α + β)$· λοιπὸν

$$\frac{ἡμ.^2\frac{1}{2}Γ}{P^2} = \frac{ἡμ\left(\frac{γ + β - α}{2}\right)ἡμ\left(\frac{γ + α - β}{2}\right)}{ἡμ.α\ ἡμ.β},$$

$$\mathring{\eta}\ \acute{\eta}\mu\ \tfrac{1}{2}\,\Gamma = P\sqrt{\left\{\frac{\acute{\eta}\mu\ \frac{\gamma+\beta-\alpha}{2}\ \acute{\eta}\mu\ \frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}}{\acute{\eta}\mu\ \alpha\ \acute{\eta}\mu\ \beta}\right\}}.$$

Φανερὸν εἶναι ὅτι ἠθέλαμεν ἔχει παρομοίους τύπους διὰ τὴν ἔκφρασιν τοῦ ἡμ $\frac{1}{2}$ Α καὶ ἡμ $\frac{1}{2}$ Β, διὰ μέσου τῶν τριῶν πλευρῶν α, β, γ.

οθ΄. Τὸ γενικὸν πρόβλημα τῆς σφαιρικῆς τριγωνομετρίας συνίσαται, ὡς ἤδη εἴπομεν, εἰς τὴν προσδιόρισιν τριῶν τῶν ἕξ ποσοτήτων Α, Β, Γ, α, β, γ διὰ μέσου τῶν ἄλλων τριῶν. Πρὸς τοῦτο ἀνάγκη εἶναι νὰ ἔχωμεν ἐξισώσεις μεταξὺ τεσσάρων τούτων τῶν ποσοτήτων, εἰλημμένων καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους· τώρα ἕξ ποσότητας συνδυάζοντες ἀνὰ τέσσαρας ἢ ἀνὰ δύο, εὑρίσκομεν $\frac{6.\ 5}{1.\ 2}$ ἢ 15 συνδυασμοὺς· διὰ τοῦτο δεκαπέντε ἐξισώσεις πρέπει να σχηματίσωμεν· πλὴν μὴ θεωρουμένων παρὰ τῶν οὐσιωδῶς διαφορετικῶν συνδυασμῶν, αἱ δεκαπέντε αὗται ἐξισώσεις ἀνάγονται εἰς τέσσαρας.

Τῷ ὄντι, ἔχομεν 1ον τὸν συνδυασμὸν αβγΑ, ὅςις συμπεριλαμβάνει, διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν γραμμάτων αβγΑ, αβγΒ, αβγΓ.

2ον Τὸν συνδυασμὸν αβΑΒ, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτουν αβΑΒ, βγΒΓ, αγΑΓ.

3ον Τὸν συνδυασμὸν αβΑΓ, ὅςις συμπεριλαμβάνει τοὺς ἕξ αβΑΓ, αβΒΓ, αγΑΒ, αγΒΓ, βγΑΒ, βγΑΓ.

4ον Τέλος τὸν συνδυασμὸν αΑΒΓ, ὅςις συμπεριλαμβάνει τοὺς τρεῖς αΑΒΓ, βΑΒΓ, γΑΒΓ.

Ολοι λοιπὸν οἱ συνδυασμοὶ εἶναι δεκαπέντε· πλὴν τέσσαρες εἶναι οἱ οὐσιωδῶς διάφοροι.

π΄. Η ἐξίσωσις $\sigma\upsilon\nu A = \frac{P^2 \sigma\upsilon\nu\ \alpha - P\sigma\upsilon\nu\ \beta\ \sigma\upsilon\nu\gamma}{\acute{\eta}\mu\ \beta\ \acute{\eta}\mu\ \gamma}$ παριςάνει τὸν πρῶτον συνδυασμὸν αβγΑ καὶ τοὺς ἀπ' αὐτὸν ἐξαρτωμένους, Διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς ἀντιστοιχούσης ἐξισώσεως εἰς τὸν συνδυασμὸν αϐAB, πρέπει νὰ ἀπαλείψωμεν γ ἀπὸ τοὺς δύο τύπους οἱ ὁποῖοι δίδουν τὰς τιμὰς τοῦ συν A καὶ συνB· πλὴν τὴν ἀπάλειψιν ταύτην ἐκάμαμεν (οζ΄) καὶ τὸ εὑρεθὲν ἐξαγόμενον εἶναι $\frac{\text{ἡμ}\,A}{\text{ἡμ}\,\alpha} = \frac{\text{ἡμ}\,B}{\text{ἡμ}\,\beta}$.

Ο τρίτος συνδυασμὸς σχηματίζεται ἀπὸ τὴν μεταξὺ τῶν α, β, A, Γ, σχέσιν· πρὸς τοῦτο, ἔχοντες τὰς δύο ἐξισώσεις

$$\text{συν}\,A\,\text{ἡμ}\,\beta\,\text{ἡμ}\,\gamma = P^2\,\text{συν}\,\alpha - P\,\text{συν}\,\beta\,\text{συν}\,\gamma,$$
$$\text{συν}\,\Gamma\,\text{ἡμ}\,\beta\,\text{ἡμ}\,\alpha = P^2\,\text{συν}\,\gamma - P\,\text{συν}\,\beta\,\text{συν}\,\alpha,$$

ἀπαλείφομεν ἐν πρώτοις συνγ, καὶ εὑρίσκομεν $P\,\text{συν}\,A\,\text{ἡμ}\,\gamma + \text{συν}\,\Gamma\,\text{ἡμ}\,\alpha\,\text{συν}\,\beta = P\,\text{συν}\,\alpha\,\text{ἡμ}\,\beta$· θέτοντες ἔπειτα εἰς ταύτην τὴν ἐξίσωσιν τὴν τιμὴν $\text{ἡμ}\,\gamma = \frac{\text{ἡμ}\,\alpha\,\text{ἡμ}\,\Gamma}{\text{ἡμ}\,A}$, ἔχομεν διὰ τὸν τρίτον συνδυασμὸν

$$\text{σφ}\,A\,\text{ἡμ}\,\Gamma + \text{συν}\,\Gamma\,\text{συν}\,\beta = \text{σφ}\,\alpha\,\text{ἡμ}\,\beta \quad (1)$$

Τέλος, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν μεταξὺ A, B, Γ, α σχέσιν, παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν ὁ ὅρος $\text{σφ}\,\alpha\,\text{ἡμ}\,\beta = P\,\text{συν}\,\alpha.\frac{\text{ἡμ}\,\beta}{\text{ἡμ}\,\alpha} = P\,\text{συν}\,\alpha\,\frac{\text{ἡμ}\,B}{\text{ἡμ}\,A}$· λοιπὸν πολλαπλασιάζοντες ταύτην τὴν ἐξίσωσιν ἐπὶ ἡμA, θέλομεν ἔχει

$$P\,\text{συν}\,A\,\text{ἡμ}\,\Gamma = P\,\text{συν}\,\alpha\,\text{ἡμ}\,B - \text{ἡμ}\,A\,\text{συν}\,\Gamma\,\text{συν}\,\beta.$$

---

(1) Διὰ τὴν εὔκολον ἐνθύμησιν τούτου τοῦ τύπου καὶ τὴν εὕρεσίν του εἰς τὴν χρείαν, φύλαξον τὸν ἀκόλουθον κανόνα τῆς Μνημονικῆς:

1ον Μὲ τὴν πλευρὰν α καὶ τὴν ἀπέναντι γωνίαν A,
Μὲ τὴν ἄλλην πλευρὰν ϐ καὶ τὴν προσκειμένην γωνίαν Γ, σχημάτισον τὴν πλαστὴν ἐξίσωσιν $\text{σφ}\,\alpha\,\text{σφ}\,A = \text{σφ}\,\beta\,\text{σφ}\,\Gamma$, παρατηρῶν νὰ θέτῃς τὰ μικρὰ γράμματα ἔμπροσθεν τῶν μεγάλων.

2ον Πολλαπλασίασον καὶ τὰ δύο μέρη ἐπὶ ἡμ β ἡμ Γ, ὑποθέτων τὴν ἀκτῖνα $P = 1$· θέλεις ἔχει

$$\text{σφ}\,\alpha\,\text{ἡμ}\,\beta\,\text{σφ}\,A\,\text{ἡμ}\,\Gamma = \text{συν}\,\beta\,\text{συν}\,\Gamma.$$

3ον Χώρισον εἰς τὸ πρῶτον μέλος τὰ μικρὰ γράμματα τῶν μεγάλων, θέτων ἔμπροσθεν τούτων τὸ σημεῖον — · θέλεις ἔχει τὴν ἀληθῆ ἐξίσωσιν

$$\text{σφ}\,\alpha\,\text{ἡμ}\,\beta - \text{σφ}\,A\,\text{ἡμ}\,\Gamma = \text{συν}\,\beta\,\text{συν}\,\Gamma$$

Ητις οὕτω ὁμογενὴς ἔχει χώραν, καὶ χωρὶς νὰ ὑποτεθῇ $P = 1$. Ο. Σ.

Ἐὰν εἰς ταύτην τὴν ἐξίσωσιν μεταθέσωμεν τὰ γράμματα Α καὶ Β, καθὼς ἀκόμη α καὶ β, θέλομεν ἔχει

$$\text{Ρσυν Β ἡμ Γ} = \text{Ρσυν}\,\beta\ \text{ἡμ Α} - \text{ἡμ Β συν Γ συν}\,\alpha.$$

Καὶ ἐκ τῶν δύο τούτων, διὰ τῆς ἀπαλείψεως τοῦ συνβ,

$$\text{Ρ}^2\text{συν Α ἡμ Γ} + \text{Ρσυν Β ἡμ ΓσυνΓ} = \text{συν}\,\alpha\,\text{ἡμΒ ἡμ}^2\text{Γ}.$$

Λοιπὸν τέλος

$$\text{συν}\alpha = \frac{\text{Ρ}^2\text{συν Α} + \text{Ρσυν Β συν Γ}}{\text{ἡμ Β ἡμ Γ}}.$$

Αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη μεταξὺ Α, Β, Γ, α σχέσις, ἥτις εἶναι ἡ τετάρτη τῶν ἀναγκαίων ἐξισώσεων διὰ τὴν λύσιν τῶν σφαιρικῶν τριγώνων.

πα'. Η τελευταία αὕτη ἐξίσωσις μεταξὺ Α, Β, Γ, α παῤῥησιάζει ἐξαίσιον ἀναλογίαν μὲ τὴν πρώτην μεταξὺ α, β, γ, Α· καὶ ἠμποροῦμεν νὰ ἀποδώσωμεν λόγον ταύτης τῆς ἀναλογίας διὰ τῆς ἰδιότητος τῶν πολικῶν ἢ παραπληρωματικῶν τριγώνων. Τῷ ὄντι, εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶναι Α, Β, Γ, καὶ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ α, β, γ ἀντιστοιχεῖ εἰς πολικὸν τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι 200° — Α, 200° — Β, 200° — Γ, καὶ αἱ ἀπέναναντι γωνίαι 200° — α, 200° — β, 200° — γ. Τώρα ἡ ἐφάρμοσις τῆς τοῦ ἀρ. ος' ἀρχῆς εἰς τοῦτο τὸ τελευταῖον τρίγωνον, δίδει

$$\text{συν}(200^\circ - \alpha) = \frac{\text{Ρ}^2\text{συν}(200^\circ - \text{Α}) - \text{Ρσυν}(200^\circ - \text{Β})\text{συν}(200^\circ - \text{Γ})}{\text{ἡμ}\,(200^\circ - \text{Β})\ \text{ἡμ}\,(200^\circ - \text{Γ})}.$$

ἥτις ἀνάγεται εἰς

$$\text{συν}\ \alpha = \frac{\text{Ρ}^2\text{συνΑ} + \text{ΡσυνΒσυνΓ}}{\text{ἡμ Β ἡμ Γ}},$$

ὡς δι' ἄλλης ὁδοῦ εὕρομεν.

Ο τύπος οὗτος λύει ἀμέσως τὴν περίστασιν καθ' ἣν ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν μίαν πλευρὰν διὰ μέσου τῶν τριῶν γωνιῶν· πλὴν διὰ νὰ εὕρωμεν ἐπιτηδειότερον διὰ τὸν λογαριθμικὸν ὑπολογισμὸν τύπον, ἀντικαθιστῶμεν τὴν τιμὴν τοῦ συν α εἰς τὴν ἐξίσωσιν $1 - \frac{\text{συν } \alpha}{P} = \frac{2\text{ἡμ}^2 \frac{1}{2}\alpha}{P^2}$,

καὶ συνάγομεν $\frac{\text{ἡμ}^2 \frac{1}{2}\alpha}{P^2} = \frac{\text{ἡμ } B \text{ ἡμ } \Gamma - \text{συν } B \text{ συν } \Gamma - P \text{ συν } A}{2\text{ἡμ } B \text{ ἡμ } \Gamma}$

$= \frac{-P \text{ συν } (B+\Gamma) - P \text{ συν } A}{2\text{ἡμ } B \text{ ἡμ } \Gamma}$.

Καὶ ἐπειδὴ ἐν γένει (ἀρ. κη′) $P\text{συν } \pi + P\text{συν } \varkappa = 2\text{συν } \frac{1}{2}(\pi + \varkappa)\text{συν } \frac{1}{2}(\pi - \varkappa)$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀνάγεται εἰς $\frac{\text{ἡμ}^2 \frac{1}{2}\alpha}{P^2} = \frac{-\text{συν } \frac{1}{2}(A+B+\Gamma)\text{συν } \frac{1}{2}(B+\Gamma-A)}{\text{ἡμ } B \text{ ἡμ } \Gamma}$,

Ἔνθα παρατηρητέον ὅτι ἂν καὶ τὸ δεύτερον μέλος ὑπὸ μορφὴν ἀρνητικὴν, εἶναι μ᾽ ὅλον τοῦτο πάντοτε θετικόν. Διότι ἐν γένει ἡμ $(\chi - 100^\circ)$

$= \frac{\text{ἡμ}\chi\text{συν}100^\circ - \text{συν}\chi\text{ἡμ}100^\circ}{P} = -\text{ συν } \chi$· λοιπὸν

$$-\text{συν } \tfrac{1}{2}(A + B + \Gamma) = \text{ἡμ } \left(\frac{A+B+\Gamma}{2} - 100^\circ\right)$$

ποσότης ἥτις πάντοτε εἶναι θετική· διότι ἐπειδὴ $A + B + \Gamma$ πάντοτε περιέχεται μεταξὺ 200° καὶ 600°, ἡ γωνία $\frac{1}{2}(A+B+\Gamma) - 100^\circ$ περιέχεται μεταξὺ μηδενὸς καὶ 200°· ἄλλως συν $\frac{1}{2}(B + \Gamma - A)$ εἶναι πάντοτε θετικὸν, διότι $B + \Gamma - A$ δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ 200°· τῷ ὄντι εἰς τὸ πολικὸν τρίγωνον ἡ πλευρὰ $200^\circ - A$ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων $200^\circ - B$, $200^\circ - \Gamma$· λοιπὸν $200^\circ - A < 400^\circ - B - \Gamma$ ἢ $B + \Gamma - A < 200^\circ$.

Βεβαιωθέντες οὕτως ὅτι τὸ ἐξαγόμενον πάντοτε θέλει εἶναι θετικὸν, ἠμποροῦμεν ἀσφαλῶς νὰ ἐξάζωμεν τὴν ῥίζαν, καὶ ἔχομεν τὸν ἀκόλουθον τύπον διὰ τὴν προσδιόρισιν μιᾶς πλευρᾶς διὰ μέσου τῶν γωνιῶν,

$$\text{ἡμ } \tfrac{1}{2}\alpha = P\sqrt{\left\{\frac{-\text{συν } \frac{A+B+\Gamma}{2} \text{ συν } \frac{B+\Gamma-A}{2}}{\text{ἡμ } B \text{ ἡμ } \Gamma}\right\}}$$

πβ'. Πρὶν ὑπάγωμεν περαιτέρω, σημειοῦμεν ὅτι ἀπὸ τοὺς γενικοὺς τούτους τύπους, δυνάμεθα νὰ συνάξωμεν τοὺς ἀναφερομένους εἰς τὰ σφαιρικὰ ὀρθογώνια τρίγωνα. Πρὸς τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ κάμωμεν Α=100°, τόσον εἰς τοὺς τέσσαρας ἀρχικοὺς τύπους ὅσον καὶ εἰς τοὺς ἐξ αὐτῶν συναγομένους διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν γραμμάτων. Καὶ ἐν πρώτοις πράττοντες τὴν τοιαύτην ἀντεισαγωγὴν εἰς τὴν ἐξίσωσιν συν Α ἡμ β ἡμ γ$=$Ρ^{2}συν α$-$Ρσυν β συν γ, εὑρίσκομεν

$$\text{Ρσυν } \alpha = \text{συν } \beta \text{ συν } \gamma. \qquad (1)$$

Αἱ συναγόμεναι τῆς γενικῆς ἐξισώσεως δὲν περιέχουν Α καὶ διὰ τοῦτο δὲν δίδουν κάμμίαν νέαν σχέσιν ὅταν Α=100°.

Η ἐξίσωσις $\frac{\text{ἡμ Α}}{\text{ἡμ } \alpha} = \frac{\text{ἡμ Β}}{\text{ἡμ } \beta}$, δίδει ὅταν Α=100°,

$$\frac{\text{Ρ}}{\text{ἡμ } \alpha} = \frac{\text{ἡμ Β}}{\text{ἡμ } \beta}. \qquad (2)$$

καὶ ἡ συναγομένη $\frac{\text{ἡμ Α}}{\text{ἡμ } \alpha} = \frac{\text{ἡμ Γ}}{\text{ἡμ } \gamma}$, ἤθελε δώσει ἐπίσης $\frac{\text{Ρ}}{\text{ἡμ } \alpha} = \frac{\text{ἡμ Γ}}{\text{ἡμ } \gamma}$. ἀλλ' αὐτὴ εἶναι συναγομένη τῆς ἐξισώσεως (2)

Η ἐξίσωσις σφ Α ἡμ Γ $+$ συν Γσυν β$=$σφ α ἡμ β δίδει ἐν τῇ ὑποθέσει τῆς Α=100°, συν Γ συν β$=$σφ α ἡμ β, ἢ

$$\text{συν Γ ἐφ } \alpha = \text{Ρἐφ } \beta. \qquad (3)$$

Η συναγομένη σφ Γ ἡμ Α $+$ συνΑσυνβ$=$σφγἡμβ δίδει εἰς τὴν αὐτὴν περίστασιν, ΡσφΓ$=$σφγἡμβ, ἢ

$$\text{Ρἐφ}\gamma = \text{ἡμ}\beta\text{ἐφΓ}. \qquad (4)$$

Τέλος ἡ τετάρτη ἀρχικὴ ἐξίσωσις ἡμ Β ἡμ Γσυνα$=$Ρ^2 συν Α $+$ ΡσυνΒσυν Γ καὶ ἡ συναγομένη της ἡμ Α ἡμ Γ συν β$=$Ρ^{2}συν Β $+$ Ρσυν Α συν Γ, δίδουν εἰς τὴν περίστασιν καθ' ἣν Α=100°, ἡμ Β ἡμ Γ συν α$=$Ρσυν Βσυν Γ καὶ ἡμ Γ συν β$=$Ρσυν Β, ἢ

$$\text{σφ}\,B\;\text{σφ}\,\Gamma = \mathrm{P}\,\text{συν}\,\alpha, \qquad (5)$$

$$\text{ἡμ}\,\Gamma\;\text{συν}\,\beta = \mathrm{P}\,\text{συν}\,B. \qquad (6)$$

Αὗται εἶναι αἱ ἕξ ἐξισώσεις ἐπὶ τῶν ὁποίων θεμελιοῦται ἡ λύσις τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων.

πγʹ. Τελειόνομεν ταύτας τὰς ἀρχὰς δίδοντες τὴν ἀπόδειξιν τῶν Ἀναλογιῶν τοῦ Νεπήρου (Neper), διὰ τῶν ὁποίων ἁπλουστεύονται πολλαὶ περιστάσεις τῆς λύσεως τῶν σφαιρικῶν τριγώνων.

Διὰ τῆς συμπλοκῆς τῶν τιμῶν τοῦ συν A καὶ συν Γ ἐκπεφρασμένων διὰ α,β,γ, εὕρομεν τὴν ἐξίσωσιν (ἀρ. πʹ)

$$\mathrm{P}\,\text{συν}\,A\;\text{ἡμ}\,\gamma = \mathrm{P}\,\text{συν}\,\alpha\;\text{ἡμ}\,\beta - \text{συν}\,\Gamma\,\text{ἡμ}\,\alpha\;\text{συν}\,\beta.$$

Αὕτη δι' ἁπλῆς μεταθέσεως δίδει:

$$\mathrm{P}\,\text{συν}\,B\;\text{ἡμ}\,\gamma = \mathrm{P}\,\text{συν}\,\beta\;\text{ἡμ}\,\alpha - \text{συν}\,\Gamma\,\text{ἡμ}\,\beta\;\text{συν}\,\alpha.$$

Λοιπὸν προσθέτοντες τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις καὶ ἀνάγοντες θέλομεν ἔχει

$$\text{ἡμ}\,\gamma\,(\text{συν}A + \text{συν}B) = (\mathrm{P} - \text{συν}\Gamma)\,\text{ἡμ}(\alpha + \beta).$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ $\dfrac{\text{ἡμ}\,\gamma}{\text{ἡμ}\,\Gamma} = \dfrac{\text{ἡμ}\,\alpha}{\text{ἡμ}\,A} = \dfrac{\text{ἡμ}\,\beta}{\text{ἡμ}\,B}$, ἔχομεν

$$\text{ἡμ}\gamma(\text{ἡμ}A + \text{ἡμ}B) = \text{ἡμ}\Gamma(\text{ἡμ}\alpha + \text{ἡμ}\beta)$$

καὶ $\text{ἡμ}\,\gamma\,(\text{ἡμ}A - \text{ἡμ}B) = \text{ἡμ}\Gamma(\text{ἡμ}\alpha - \text{ἡμ}\beta).$

Διαιροῦντες διαδοχικῶς τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις διὰ τῆς προηγουμένης, θέλομεν ἔχει

$$\frac{\text{ἡμ}\,A + \text{ἡμ}\,B}{\text{συν}A + \text{συν}B} = \frac{\text{ἡμ}\,\Gamma}{\mathrm{P} - \text{συν}\Gamma} \cdot \frac{\text{ἡμ}\,\alpha + \text{ἡμ}\,\beta}{\text{ἡμ}(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{\text{ἡμ}\,A - \text{ἡμ}\,B}{\text{συν}A + \text{συν}B} = \frac{\text{ἡμ}\,\Gamma}{\mathrm{P} - \text{συν}\Gamma} \cdot \frac{\text{ἡμ}\,\alpha - \text{ἡμ}\,\beta}{\text{ἡμ}(\alpha + \beta)}.$$

Καὶ ἀνάγοντες ταύτας διὰ τῶν τύπων τῶν ἄρθρων κθʹ καὶ λʹ εὑρίσκομεν

$$\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(A + B) = \text{σφ}\,\tfrac{1}{2}\Gamma \cdot \frac{\text{συν}\,\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\text{συν}\,\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$$

$$\text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(A - B) = \text{σφ}\,\tfrac{1}{2}\Gamma \cdot \frac{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}.$$

Δοθεισῶν λοιπὸν τῶν δύο πλευρῶν α καὶ β μετὰ τῆς περιεχομένης γωνίας Γ, εὑρίσκομεν τὰς δύο ἄλλας γωνίας Α καὶ Β διὰ τῶν ἀναλογιῶν,

$$\text{συν}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) : \text{συν}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) :: \text{σφ}\,\tfrac{1}{2}\Gamma : \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(A+B)$$

$$\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) : \text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) :: \text{σφ}\,\tfrac{1}{2}\Gamma : \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(A-B)$$

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὰς ἰδίας ταύτας ἀναλογίας εἰς τὸ πολικὸν τρίγωνον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, πρέπει ἀντὶ τῶν α, β, Α, Β, Γ νὰ θέσωμεν ἀμοιβαίως $200^\circ - A$, $200^\circ - B$, $200^\circ - \alpha$, $200^\circ - \beta$, $200^\circ - \gamma$ καὶ θέλομεν ἔχει δι' ἐξαγόμενον τὰς ἀκολούθους δύο ἀναλογίας

$$\text{συν}\,\tfrac{1}{2}(A+B) : \text{συν}\,\tfrac{1}{2}(A-B) :: \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}\gamma : \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

$$\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}(A+B) : \text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}(A-B) :: \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}\gamma : \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

Διὰ τῶν ὁποίων, δοθέντων μιᾶς πλευρᾶς γ καὶ τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν Α καὶ Β, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς α καὶ β. Αἱ τέσσαρες αὗται ἀναλογίαι εἶναι γνωσταὶ ὑπὸ τὸ ὄνομα Ἀναλογίαι τοῦ Νεπήρου.

Λύσις τῶν σφαιρικῶν τριγώνων ἐν γένει.

Η λύσις τῶν σφαιρικῶν τριγώνων περιλαμβάνει ἕξ γενικὰς περιστάσεις, τὰς ὁποίας κατὰ διαδοχὴν θέλομεν ἀναπτύξει.

ΠΡΩΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

πδ'. Δοθεισῶν τῶν τριῶν πλευρῶν α, β, γ, εὑρίσκεται ὁποιαδήποτε γωνία, ἡ ἀπέναντι, φερ' εἰπεῖν, εἰς τὴν πλευρὰν α, διὰ τοῦ τύπου

$$\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}A = P\sqrt{\left\{\frac{\text{ἡμ}\,\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\;\text{ἡμ}\,\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}}{\text{ἡμ}\,\beta\;\text{ἡμ}\,\gamma}\right\}}$$

ΔΕΥΤΕΡΑ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

πε'. Δοθεισῶν δύο πλευρῶν α καὶ β μετὰ τῆς γωνίας Α ἀπέναντι μιᾶς τῶν πλευρῶν τούτων, νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη πλευρὰ γ καὶ αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι Β καὶ Γ.

1ον Η γωνία Β εὑρίσκεται διὰ τῆς ἐξισώσεως $\text{ἡμ}\,B = \frac{\text{ἡμ}\,A\ \text{ἡμ}\,\beta}{\text{ἡμ}\,\alpha}$

2ον Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὴν Γ, πρέπει νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\text{σφ}\,A\ \text{ἡμ}\,\Gamma + \text{συν}\,\Gamma\ \text{συν}\,\beta = \text{σφ}\,\alpha\ \text{ἡμ}\,\beta.$$

πρὸς τοῦτο ἂς λάβωμεν συμβοηθητικὴν τινὰ γωνίαν φ εἰς τρόπον ὥςε $\text{ἐφ.}\,\varphi = \frac{\text{συν}\,\beta\ \text{ἐφ}\,A}{P}$ (*) ἢ $\text{σφ}\,A = \frac{\text{συν}\beta\,\text{συν}\varphi}{\text{ἡμ}\,\varphi}$. ἡ τιμὴ αὔτη τῆς σφ Α ἀντεισαχθεῖσα εἰς τὴν λυτέαν ἐξίσωσιν δίδει $\frac{\text{συν}\,\beta}{\text{ἡμ}\,\varphi}(\text{συν}\,\varphi\ \text{ἡμ}\,\Gamma + \text{ἡμ}\,\varphi\ \text{συν}\,\Gamma) = \text{σφ}\,\alpha$ ἡμ β· καὶ ἐντεῦθεν

$$\text{ἡμ}(\Gamma+\varphi) = \frac{\text{ἐφ}\,\beta\ \text{ἡμ}\,\varphi}{\text{ἐφ}\,\alpha}.$$

Διὰ τοῦ τεχνεύματος τούτου, βλέπομεν ὅτι οἱ δύο ἄγνωςοι ὅροι εἰς τὴν προτεθεῖσαν ἐξίσωσιν ἤχθησαν εἰς ἕνα μόνον, καὶ οὕτως εὐκόλως συνάγεται ἡ τιμὴ τῆς Γ.

3ον Η πλευρὰ γ εὑρίσκεται διὰ τῆς ἐξισώσεως

$$\text{ἡμ}\,\gamma = \frac{\text{ἡμ}\,\alpha\ \text{ἡμ}\,\Gamma}{\text{ἡμ}\,A}.$$

Ημποροῦμεν δὲ καὶ κατ᾽ εὐθεῖαν νὰ τὴν προσδιορίσωμεν λύοντες τὴν ἐξίσωσιν:

$$P\text{συν}\,\beta\ \text{συν}\,\gamma + \text{συν}\,A\ \text{ἡμ}\,\beta\ \text{ἡμ}\,\gamma = P^2\text{συν}\,\alpha.$$

(*) Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως δὲν εἶναι ἐπιτήδειον διὰ τὸν λογαριθμικὸν ὑπολογισμόν· διὰ νὰ φθάσῃ λοιπὸν ὁ συγγραφεὺς εἰς μίαν ἐξίσωσιν ἐκ τῆς ὁποίας νὰ συνάγεται ἡ τιμὴ τῆς Γ διὰ τῶν λογαρίθμων, φαντάζεται ὀρθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα νὰ ἔχῃ τόσας μοίρας ὅσας ἡ δεδομένη γωνία Α, καὶ νὰ κάμνῃ γωνίαν μὲ μίαν τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἴσην μὲ β, ἥτις δηλονότι νὰ περιέχῃ τόσας μοίρας ὅσας ἡ δεδομένη πλευρὰ β· καλῶν τὴν πλευρὰν ἐκείνην φ, ἔχει, κατὰ τὴν δευτέραν ἀρχὴν τῶν σφαιρικῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, τὴν ἀναλογίαν P : συν β : : ἐφ A : ἐφ. $\varphi = \frac{\text{συν}\,\beta\ \text{ἐφ}A}{P}$. Ο. Μ.

Πρὸς τοῦτο, ἔςω συνΑἡμ.β $= \frac{\text{Ρσυν } 6 \text{ ἡμ } \varphi}{\text{συν } \varphi}$, ἢ ἐφ. φ $= \frac{\text{συν Α ἐφ β}}{\text{Ρ}}$, θέλομεν ἔχει

$\frac{\text{συν } \beta}{\text{συν } \varphi}$ (συν γ συν φ + ἡμ. γ ἡμ. φ) = Ρσυν α. Αφ᾽ οὗ λοιπὸν ζητήσωμεν τὴν συμβοηθητικὴν φ διὰ τῆς ἐξισώσεως ἐφ. φ $= \frac{\text{συν Α ἐφ } 6}{\text{Ρ}}$, διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν πλευρὰν γ, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\text{συν}(\gamma - \varphi) = \frac{\text{συν } \alpha \text{ συν } \varphi}{\text{συν } 6}.$$

Η δευτέρα αὕτη περίςασις, ὡς καὶ ἡ ἀνάλογος τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων, δυνατὸν νὰ ἔχῃ δύο λύσεις.

ΤΡΙΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

πς΄. Δοθεισῶν δύο πλευρῶν α καὶ 6 μετὰ τῆς περιεχομένης γωνίας Γ, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι Α καὶ Β καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ γ.

1ον Αἱ γωνίαι Α καὶ Β εὑρίσκονται διὰ τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων

$$\text{σφ Α} = \frac{\text{σφ α ἡμ β} - \text{συν Γ συν β}}{\text{ἡμ Γ}}$$

$$\text{σφ Β} = \frac{\text{σφ } 6 \text{ ἡμ α} - \text{συν Γ συν α}}{\text{ἡμ Γ}}$$

εἰς τὰς ὁποίας τὰ δεύτερα μέλη δυνατὸν διά τινος συμβοηθητικῆς νὰ ἀναχθῶσιν εἰς ἕνα μόνον ὅρον· ἀλλ᾽ εἶναι ἁπλούςερον νὰ μεταχειρισθῶμεν, εἰς ταύτην τὴν περίςασιν, τὰς ἀναλογίας τοῦ Νεπήρου, αἵτινες δίδουν

$$\text{εφ } \frac{\text{Α} - \text{Β}}{2} = \text{σφ } \tfrac{1}{2} \text{Γ} \cdot \frac{\text{ἡμ } \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\text{ἡμ } \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}$$

$$\text{εφ } \frac{\text{Α} + \text{Β}}{2} = \text{σφ } \tfrac{1}{2} \text{Γ} \cdot \frac{\text{συν } \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\text{συν } \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}$$

2.ον Γνωρίζοντες τὰς γωνίας Α καὶ Β, ἠμποροῦμεν νὰ λογαριάσωμεν τὴν τρίτην πλευρὰν γ διὰ τῆς ἐξισώσεως

$ἡμ\, γ = ἡμ\, α \cdot \frac{ἡμ\, Γ}{ἡμ\, Α}$· ἀλλὰ διὰ τὴν κατ' εὐθεῖαν προσδιορισίν της, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$P^2 συν\, γ = ἡμ\, α . ἡμ\, β\, συν\, Γ + Pσυν\, α\, συν\, β.$$

Ας ληφθῇ ἡ συμβοηθητικὴ φ, εἰς τρόπον ὥςε ἡμ β συν Γ = συν β ἐφ. φ, ἢ $ἐφ. φ = \frac{συν\, Γ\, ἐφ\, β}{P}$. θέλομεν ἔχει

$$συν γ = \frac{συν\, β}{συν\, φ}\, συν\, (α - φ).$$

ΤΕΤΑΡΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

πζ'. Δοθεισῶν δύο γωνιῶν Α καὶ Β μετὰ τῆς προσκειμένης πλευρᾶς γ, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ α καὶ β, καὶ ἡ τρίτη γωνία γ.

1ον Αἱ δύο πλευραὶ α καὶ β δίδονται διὰ τῶν τύπων.

$$σφ\, α = \frac{σφ\, Α\, ἡμ\, Β + συν\, Β\, συν\, γ}{ἡμ\, γ}$$

$$σφ\, β = \frac{σφ\, Β\, ἡμ\, Α + συν\, Α\, συν\, γ}{ἡμ\, γ},$$

ἀλλ' εὐκολώτερον ἠμποροῦμεν νὰ τὰς λογαριάσωμεν διὰ τῶν ἀναλογιῶν τοῦ Νεπήρου, τοῦτ' ἔςι:

$$ἡμ\, \frac{Α+Β}{2} : ἡμ\, \frac{Α-Β}{2} :: ἐφ\, \tfrac{1}{2}γ : ἐφ\, \frac{α-β}{2}.$$

$$συν\, \frac{Α+Β}{2} : συν\, \frac{Α-Β}{2} :: ἐφ\, \tfrac{1}{2}γ : ἐφ\, \frac{α+β}{2}.$$

2ον Γνωρίζοντες α καὶ β, εὑρίσκομεν Γ διὰ τῆς ἐξισώσεως $ἡμ\, Γ = \frac{ἡμ\, γ\, ἡμ\, Α}{ἡμ\, α}$. πλὴν δυνάμεθα ἀκόμη νὰ προσδιορίσωμεν κατ' εὐθεῖαν τὴν Γ διὰ τῆς ἐξισώσεως

$$P^2 συν\, Γ = συν\, γ\, ἡμ\, Α\, ἡμ\, Β - Pσυν\, Α\, συν\, Β.$$

Ας ληφθῇ ἡ συμβοηθητικὴ φ, εἰς τρόπον ὥςε συν γ ἡμ Β = συν Β σφ. φ, ἢ $σφ. φ = \frac{συν\, γ\, ἐφ\, Β}{P}$, θέλομεν ἔχει

$$συν\, Γ = συν\, Β. \frac{ἡμ\, (Α - φ)}{ἡμ\, φ}.$$

Η παροῦσα καὶ ἡ προλαβοῦσα περίστασις δὲν ἀφίνουν οὐδεμίαν ἀπροσδιορισίαν.

ΠΕΜΠΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

πη'. Δοθεισῶν δύο γωνιῶν Α καὶ Β μετὰ τῆς πλευρᾶς α ἀπέναντι μιᾶς τούτων τῶν γωνιῶν, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ β, γ, καὶ ἡ τρίτη γωνία Γ.

1ον Η πλευρὰ β εὑρίσκεται διὰ τῆς ἐξισώσεως $ἡμ\ β = ἡμ\ α \cdot \frac{ἡμ\ B}{ἡμ\ A}$.

2ον Η πλευρὰ γ κρέμαται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν

$$σφ\ α\ ἡμ\ γ - συν\ B\ συν\ γ = σφ\ A\ ἡμ\ B.$$

Εστω $σφ\ α = συν\ B\ \frac{συν\ φ}{ἡμ\ φ}$ ἢ $ἐφ.\ φ = \frac{συν\ B\ ἐφ\ α}{P}$, θέλομεν ἔχει

$\frac{συν\ B}{ἡμ\ φ}\ (ἡμ\ γ\ συν\ φ - συν\ γ\ ἡμ\ φ) = σφ\ A\ ἡμ\ B$· λοιπὸν

$$ἡμ(γ - φ) = \frac{ἐφ\ B\ ἡμ\ φ}{ἐφ\ A}$$

3ον Τὴν γωνίαν Γ δίδει ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως

$$συν\ α\ ἡμ\ B\ ἡμ\ Γ - P συν\ B\ συν\ Γ = P^2 συν\ A.$$

Εστω $συν\ α\ ἡμ\ B = \frac{P συν\ B\ συν\ φ}{ἡμ\ φ}$, ἢ $σφ.φ = \frac{συν\ α\ ἐφ\ B}{P}$,

θέλομεν ἔχει $\frac{συν\ B}{ἡμ\ φ}\ (ἡμ Γ συν φ - συν Γ ἡμ φ) = P συν A$· λοιπὸν

$$ἡμ(Γ - φ) = \frac{συν\ A\ ἡμ\ φ}{συν\ B}.$$

Η πέμπτη αὕτη περίστασις, καθὼς καὶ ἡ δευτέρα, εἶναι ἐπιδεκτικὴ δύο λύσεων, ὡς τοῦτο ἔχει χώραν εἰς τὴν ἀνάλογον περίστασιν τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων.

ΕΚΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

πθ'. Δοθεισῶν τῶν τριῶν γωνιῶν Α, Β, Γ, εὑρίσκεται ὁποιαδήποτε πλευρὰ, ἡ ἀπέναντι, φερ' εἰπεῖν, εἰς τὴν γωνίαν Α, διὰ τοῦ τύπου

$$ἡμ\ \tfrac{1}{2}\ α = P\sqrt{\left(\frac{-συν\ \frac{1}{2}(A + B + Γ)\ συν\ \frac{1}{2}(B + Γ - A)}{ἡμ\ B\ ἡμ\ Γ}\right)}$$

Ημποροῦμεν νὰ σημειόσωμεν ὅτι ἀπὸ τὰς ἕξ ταύτας γενικὰς περιςάσεις αἱ τρεῖς τελευταῖαι ἠμποροῦσαν νὰ συναχθοῦν ἀπὸ τὰς τρεῖς πρώτας, διὰ τῆς ἰδιότητος τῶν πολικῶν τριγώνων: ὥςε κυρίως δὲν ὑπάρχουν παρὰ τρεῖς διαφορετικαὶ περιςάσεις εἰς τὴν λύσιν τῶν σφαιρικῶν τριγώνων. Η πρώτη περίςασις λύεται διὰ μιᾶς μόνης ἀναλογίας, ὡς καὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα· ἡ τρίτη λύεται μὲ τὸν αὐτὸν σχεδὸν ἁπλοῦν τρόπον διὰ τῶν ἀναλογιῶν τοῦ Νεπήρου. Οσον διὰ τὴν δευτέραν, ἀπαιτεῖ δύο ἀναλογίας, καὶ περιπλέον ἐνίοτε εἶναι ἐπιδεκτικὴ δύο λύσεων, ἐν ᾧ ἡ πρώτη καὶ ἡ τρίτη δὲν εἶναι ἐπιδεκτικαὶ πάρεξ μιᾶς μόνον.

γ. Διὰ νὰ ἠξεύρωμεν πότε εἰς τὴν δευτέραν περίςασιν ὑπάρχουν δύο τρίγωνα τὰ ὁποῖα περιέχουν τὰς δεδομένας μερικὰς τιμὰς τῶν Α, α, β, καὶ ἑπομένως πληροῦν εἰς τὸ ζήτημα, καὶ πότε ὑπάρχει ἓν μόνον· ἂς ὑποθέσωμεν (σχ. 16) ἐν πρώτοις τὴν γωνίαν $A < 100^o$, καὶ ἂς προεκβάλλωμεν τὰς δύο πλευρὰς ΑΓ, ΑΒ ἕως οὗ πάλιν νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Α′. Εὰν λάβωμεν τὸ τόξον $A\Gamma < 100^o$, καὶ κατεβάσωμεν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, αἱ πλευραὶ ΑΔ, ΓΔ, τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΓΔ θέλουν εἶναι καὶ αἱ δύο μικρότεραι τῶν 100^o, ἡ γραμμὴ ΓΔ θέλει εἶναι ἡ σιμοτινοτέρα ἀπόςασις τῆς ςιγμῆς Γ ἀπὸ τὸ τόξον ΑΒ, καὶ ἐὰν λάβωμεν $\Delta B' = \Delta B$, αἱ πλάγιαι ΓΒ′, ΓΒ θέλουν εἶναι ἴσαι, καὶ τόσον μακρύτεραι ὅσον περισσότερον ἀπέχουσι τῆς καθέτου. Εςω $A\Gamma = \beta$, $\Gamma B = \alpha$, βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἓν τρίγωνον εἰς τὸ ὁποῖον $A < 100^o$, $\beta < 100^o$, καὶ $\alpha < \beta$, ἔχει ἀναγκαίως δύο λύσεις ΑΓΒ, ΑΓΒ′· ἀλλ' ἐὰν ὑποθέτοντες πάντοτε Α καὶ β μικρότερα τῶν 100^o, ἔχωμεν $\alpha > \beta$, τότε ἡ ςιγμὴ Β′, ἤθελε περάσει ἐκεῖθεν τῆς Α, καὶ δὲν ἤθελεν ὑπάρχει πάρεξ μία λύσις παριςανομένη ὑπὸ ΑΒΓ.

Εςω ἀκολούθως $A\Gamma' \geq 100^o$, ἐὰν κατεβάσωμεν τὴν κάθετον $\Gamma'\Delta'$ ἐπὶ $AB A'$, θέλομεν ἔχει ὡσαύτως $\Gamma'\Delta' < A'\Gamma'$, καὶ τὸ τόξον $\Gamma'B'''$ ἀχθὲν μεταξὺ Δ' καὶ A', θέλει εἶναι $> \Gamma'\Delta'$ καὶ $> \Gamma'A'$· λοιπὸν ἐὰν κάμωμεν $A\Gamma'=\beta$, $\Gamma'B''=\Gamma'B'''=\alpha$, βλέπομεν ὅτι ἡ ὑπόθεσις $A < 100^o$ καὶ $\beta > 100^o$ δίδει δύο λύσεις ἐὰν $\alpha+\beta < 200^o$, καὶ δὲν δίδει πάρεξ μίαν ἐὰν $\alpha+\beta > 200^o$, διότι τότε ἡ ςιγμὴ B''' περνᾷ ἐκεῖθεν τῆς A'. Ερευνῶντες κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὴν περίςασιν καθ' ἣν $A > 100^o$, ἠμποροῦμεν νὰ βεβαιώσωμεν τὰ συμπτώματα τὰ ὁποῖα προσδιορίζουν ἐὰν εἰς τὴν β' περίςασιν, τὸ ζήτημα ἐπιδέχεται μίαν ἢ δύο λύσεις.

$$A < 100^o,\ \beta < 100^o \begin{cases} \alpha > \beta & \text{μία λύσις.} \\ \alpha < \beta & \text{δύο λύσεις.} \end{cases}$$

$$A < 100^o,\ \beta > 100^o \begin{cases} \alpha+\beta > 200^o & \text{μία λύσις.} \\ \alpha+\beta < 200^o & \text{δύο λύσεις.} \end{cases}$$

$$A > 100^o,\ \beta < 100^o \begin{cases} \alpha+\beta > 200^o & \text{δύο λύσεις.} \\ \alpha+\beta < 200^o & \text{μία λύσις.} \end{cases}$$

$$A > 100^o,\ \beta > 100^o \begin{cases} \alpha > \beta & \text{δύο λύσεις.} \\ \alpha < \beta & \text{μία μόνη λύσις.} \end{cases}$$

Δὲν ὑπάρχει παρὰ μία μόνη λύσις ἐὰν $A=100^o$, εἴτε $\alpha=\beta$, εἴτε $\alpha+\beta=200^o$· ὑπάρχουν δύο, ἐὰν $\beta=100^o$.

ια'. Τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὴν πέμπτην περίςασιν διὰ τοῦ πολικοῦ τριγώνου. Πράττοντες οὕτω συνάγομεν τὰ ἀκόλουθα συμπτώματα, διὰ τῶν ὁποίων γνωρίζομεν ἐὰν εἰς μερικὰς δεδομένας τιμὰς τῶν A, B, α ὑπάρχῃ ἓν ἢ δύο τρίγωνα πληροῦντα εἰς τὸ ζήτημα.

$$\alpha > 100^o,\ B > 100^o \begin{cases} A < B & \text{μία λύσις.} \\ A > B & \text{δύο λύσεις.} \end{cases}$$

$$\alpha > 100^o,\ B < 100^o \begin{cases} A+B < 200^o & \text{μία λύσις.} \\ A+B > 200^o & \text{δύο λύσεις.} \end{cases}$$

$$\alpha < 100^\circ,\ B > 100^\circ \begin{cases} A + B < 200^\circ & \text{δύο λύσεις.} \\ A + B > 200^\circ & \text{μία λύσις.} \end{cases}$$

$$\alpha < 100^\circ,\ B < 100^\circ \begin{cases} A < B & \text{δύο λύσεις.} \\ A > B & \text{μία λύσις.} \end{cases}$$

ὑπάρχει μία μόνη λύσις ὅταν ἔχῃ χώραν μία τῶν ἀκολούθων ἀνισοτήτων $\alpha = 100^\circ$, $A = B$, $A + B = 200^\circ$. ὑπάρχουν δὲ δύο ἐὰν $B = 100^\circ$.

υβ΄. Εἰς ὅλας τὰς περιςάσεις, διὰ νὰ ἀποφεύγωμεν τὰς ἀνωφελεῖς ἢ ψευδεῖς λύσεις, πρέπει νὰ εὐθυμώμεθα, 1ον ὅτι κάθε γωνία ἢ πλευρὰ πρέπει νὰ ἦναι μικροτέρα τῶν 200°.

2.ον Οτι αἱ μεγαλήτεραι γωνίαι εἶναι ἀπέναντι τῶν μεγαλητέρων πλευρῶν, ὥςε ἐὰν $A > B$ πρέπει καὶ $\alpha > \beta$, καὶ τ' ἀνάπαλιν.

Παραδείγματα τῆς λύσεως τῶν σφαιρικῶν τριγώνων.

υγ΄. Παράδειγμα Α΄. Εςωσαν O, M, N (σχ. 15) τρεῖς ςιγμαὶ κείμεναι εἰς ἐπίπεδον κλίνον πρὸς τὸν ὁρίζοντα· ἐὰν ἀπὸ τὰς τρεῖς ταύτας ςιγμὰς κατεβασθῶσιν αἱ κάθετοι ΟΔ, Μμ, Νν ἐπὶ τοῦ ὁριζοντείου ἐπιπέδου ΔΕΖ, τὰ εὑρισκόμενα ἀντικείμενα εἰς O, M, N θέλουν παραςαθῇ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντείου ἐπιπέδου διὰ τῶν προβολῶν των (1) Δ,μ,ν, καὶ ἡ γωνία ΜΟΝ διὰ τῆς μΔν. Τούτου τεθέντος, δοθείσης τῆς γωνίας ΜΟΝ καὶ τῶν κλίσεων

(1) Προβολὴ (projection) μιᾶς ςιγμῆς ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου καλεῖται ὁ ποῦς τῆς φερομένης καθέτου ἀπὸ τὴν ςιγμὴν εἰς τὸ ἐπίπεδον· προβολὴ δὲ μιᾶς εὐθείας ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι ἡ εὐθεῖα ἥτις ἑνόνει τὰς προβολὰς δύο ςιγμῶν τῆς εὐθείας ἐπὶ τοῦ ἰδίου ἐπιπέδου· ἐὰν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου προβολήσωμεν δύο εὐθείας τεμνομένας εἰς τὸ διάςημα, ἡ σχηματιζομένη γωνία ἀπὸ τὰς προβολὰς ταύτας ὀνομάζεται γωνία προβολικὴ (angle de projection). Ο. Μ.