σης τῆς ΑΒ$=$γ, τῆς ΒΓ$=$α, τῆς ΑΓ$=$β καὶ τῆς Ρ$=$1, θέλει εἶναι $E=\frac{\alpha\gamma\, \acute{\eta}\mu B}{2}=\frac{\alpha\beta\, \acute{\eta}\mu \Gamma}{2}=\frac{\gamma\beta\, \acute{\eta}\mu A}{2}$. Λοιπὸν κ.τ.λ.

Εντεῦθεν, ἐπειδὴ 2ΑΒΓ ἰσοῦται μὲ τὸ παραλληλόγραμμον τὸ ὁποῖον ἔχει διὰ πρασεχεῖς πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΒΓ, δηλαδὴ τὰς δύο προσεχεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, συνάγεται ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τοιούτου παραλληγράμμου ἰσοῦται μὲ αγ ἡμ Β, καὶ ἐν γένει τὸ ἐμβαδὸν κάθε παραλληλογράμμου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον δύο προσεχῶν πλευρῶν του καὶ τοῦ ἡμιτόνου τῆς περιεχομένης ὑπ᾽ αὐτῶν γωνίας·

Ἔκρινα ἀναγκαῖον νὰ ὑποσυνάψω ἐνταῦθα τὰ δύο ταῦτα θεωρήματα, ἐπειδὴ συχνάκις ἀπαντῶνται εἰς τὰς ἐφαρμογάς.

Αρχαὶ διὰ τὴν λύσιν τῶν σφαιρικῶν ὀρθογωνίων τριγώνων.

ξβʹ. Εἰς κάθε σφαιρικὸν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἡ ἀκτὶς εἶναι πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑποτεινούσης, ὡς τὸ ἡμίτονον μιᾶς τῶν πλαγίων γωνιῶν πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς.

Ἔςω ΑΒΓ (σχ. 10) τὸ σφαιρικὸν προτεθὲν τρίγωνον, Α ἡ ὀρθὴ γωνία του. Β καὶ Γ αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι τὰς ὁποίας καλοῦμεν γωνίας πλαγίας, καὶ αἱ ὁποῖαι μ᾽ ὅλον τοῦτο ἠμποροῦν νὰ ἦναι ὀρθαὶ ἡ μία ἢ ἄλλη, ἢ καὶ αἱ δύο ἐνταυτῷ· λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν Ρ : ἡμ ΒΓ : : ἡμ Β : ἡμ ΑΓ.

Ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας Ο, ἄς ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ἄς ληφθῇ ἀκολούθως ἡ ΟΖ ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τῶν πινάκων, καὶ ἀπὸ τὴν ςιγμὴν Ζ ἄς ἀχθῇ ἡ ΖΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ· ἡ γραμμὴ ΖΔ θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΟΑΒ, ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθὴ, καὶ οὕτω τὰ δύο ἐπίπεδα ΟΑΒ, ΟΑΓ εἶναι κάθετα μεταξύ των. Από την στιγμήν Δ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΒ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΖ· αὕτη θέλει εἶναι ὁμοίως κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΒ, και οὕτως ἡ γωνία ΔΕΖ θέλει μετρεῖ τὴν κλίσιν τῶν δύο ἐπιπέδων ΟΒΑ, ΟΒΓ, καὶ ἰσοῦται μὲ τὴν γωνίαν Β τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Τούτου τεθέντος εἰς τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ὀρθογώνιον εἰς Δ ἔχομεν Ρ : ἡμ ΔΕΖ :: ΕΖ : ΔΖ· ἀλλ' ἡ γωνία ΔΕΖ = Β, καὶ ἐπειδὴ ΟΖ = Ρ, ἕπεται ὅτι ΕΖ = ἡμ ΕΟΖ = ἡμ ΒΓ, ΔΖ = ἡμ ΑΓ. Λοιπὸν Ρ : ἡμ Β :: ἡμ ΒΓ : ἡμ ΑΓ, ἢ

Ρ : ἡμ ΒΓ :: ἡμ Β : ἡμ ΑΓ.

Ἐὰν λοιπὸν καλέσωμεν α τὴν ὑποτείνουσαν ἢ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς τὴν ὀρθὴν γωνίαν Α, β τὴν ἀπέναντι εἰς τὴν γωνίαν Β, καὶ γ τὴν ἀπέναντι εἰς τὴν Γ, θέλομεν ἔχει

Ρ : ἡμ α :: ἡμ Β : ἡμ β :: ἡμ Γ : ἡμ γ.

καὶ ἐκ τῶν ἀναλογιῶν τούτων συνάγονται δύο ἐξισώσεις μεταξὺ τῶν μερῶν τοῦ σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

ξγ'. Εἰς κάθε σφαιρικὸν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ ἀκτὶς εἶναι πρὸς τὸ συνημίτονον μιᾶς πλαγίας γωνίας, ὡς ἡ ἐφαπτομένη τῆς ὑποτεινούσης πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς προσκειμένης εἰς ταύτην τὸν γωνίαν πλευρᾶς.

Ἐσω πάντοτε (σχ. 10) ΑΒΓ τὸ προτεθὲν ὀρθογώνιον εἰς Α τρίγωνον· λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει Ρ : συν Β :: εφ ΒΓ : ἐφ ΑΒ.

Διότι γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς ἀνωτέρω, τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔΕΖ δίδει τὴν ἀναλογίαν Ρ : συν ΔΕΖ :: ΕΖ : ΕΔ. Ἀλλὰ ΔΕΖ = Β, ΕΖ = ἡμ ΒΓ, ΟΕ = συν ΒΓ, καὶ εἰς τὸ τρίγωνον ΟΕΔ ὀρθογώνιον εἰς Ε,

$$\Delta E = \frac{OE\ \text{ἐφ}\ \Delta OE}{P} = \frac{\text{συν}\ B\Gamma\ \text{ἐφ}\ AB}{P}\text{· λοιπὸν } P : \text{συν}\ B :: \text{ἡμ}\ B\Gamma :$$

$$\frac{\text{συν}\ B\Gamma\ \text{ἐφ}\ AB}{P} :: \frac{P\ \text{ἡμ}\ B\Gamma}{\text{συν}\ B\Gamma} : \text{ἐφ}\ AB, \text{ ἢ τέλος}$$

Ρ : συν Β :: ἐφ ΒΓ : ἐφ ΑΒ.

Ἐὰν κάμωμεν, ὡς ἀνωτέρω, ΒΓ = α καὶ ΑΒ = γ, θέλομεν ἔχει Ρ : συν Β : : ἐφ α : ἐφ γ, ἢ συν Β $= \frac{\text{Ρ ἐφ γ}}{\text{ἐφ α}} = \frac{\text{ἐφ γ σφ α}}{\text{Ρ}}$. Η αὐτὴ ἀρχὴ ἐφαρμοσθεῖσα εἰς τὴν γωνίαν Γ δίδει συν Γ $= \frac{\text{Ρ ἐφ β}}{\text{ἐφ α}} = \frac{\text{ἐφ β σφ α}}{\text{Ρ}}$.

ξδ΄. Εἰς κάθε σφαιρικὸν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ ἀκτὶς εἶναι πρὸς τὸ συνημίτονον μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας, ὡς τὸ συνημίτονον τῆς ἄλλης πλευρᾶς πρὸς τὸ συνημίτονον τῆς ὑποτεινούσης.

Ἔςω ΑΒΓ (σχ. 10) τὸ προτεθὲν ὀρθογώνιον εἰς Α τρίγωνον, λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει Ρ:συν ΑΒ::συν ΑΓ : συν ΒΓ.

Διότι ἐπειδὴ ἡ κατασκευὴ εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν τῶν ἀνωτέρω δύο προτάσεων, τὸ τρίγωνον ΟΔΖ ὀρθογώνιον εἰς Δ, καὶ εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ὑποτείνουσα ΟΖ = Ρ, δίδει ΟΔ = συν ΔΟΖ = συν ΑΓ· ἀκολούθως τὸ τρίγωνον ΟΔΕ ὀρθογώνιον εἰς Ε, δίδει ΟΕ $= \frac{\text{ΟΔ συν ΔΟΕ}}{\text{Ρ}} = \frac{\text{συν ΑΓ συν ΑΒ}}{\text{Ρ}}$. Ἀλλ᾽ εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΕΖ, ἔχομεν ΟΕ = συν ΒΓ· λοιπὸν συν ΒΓ $= \frac{\text{συν ΑΓ συν ΑΒ}}{\text{Ρ}}$, ἢ, ὅπερ ταὐτόν,

Ρ : συν ΑΓ : : συν ΑΒ : συν ΒΓ.

Η τρίτη αὕτη ἀρχὴ ἐκφράζεται διὰ τῆς ἐξισώσεως Ρσυνα = συνβσυνγ· ἀπὸ ταύτην, ὡς ἀπὸ τὰς δύο προλαβούσας, δὲν συνάγεται μία δευτέρα ἐξίσωσις· διότι ἡ γινομένη μετάθεσις μεταξὺ α καὶ β δὲν φέρει οὐδεμίαν τροπὴν εἰς τὴν ἐξίσωσιν.

ξε΄. Διὰ τῶν τριῶν τούτων γενικῶν ἀρχῶν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἄλλας τρεῖς ἀναγκαίας διὰ τὴν λύσιν τῶν σφαιρικῶν ὀρθογωνίων τριγώνων. Εκάςην τῶν τελευταίων τούτων ἀρχῶν ἠμπορούσαμεν νὰ ἀποδείξωμεν κατ᾽εὐθεῖαν, διὰ μιᾶς ἰδιαιτέρας κατασκευῆς· ἀλλ᾽ εἶναι προτιμότερον νὰ τὰς συνάξωμεν ἀπὸ τὰς τρεῖς πρώτας διὰ τῆς ἀναλύσεως, καθὼς ἐρχόμεθα νὰ πράξωμεν.

Αἱ ἐξισώσεις ἡμ B $=\frac{\text{P ἡμ β}}{\text{ἡμ α}}$, συν Γ $=\frac{\text{P ἐφ β}}{\text{ἐφ α}}$ δίδουν διὰ τῆς διαιρέσεώς των $\frac{\text{συν Γ}}{\text{ἡμ B}}=\frac{\text{ἐφ β}}{\text{ἡμ β}}\cdot\frac{\text{ἡμ α}}{\text{ἐφ α}}=\frac{\text{συν α}}{\text{συν β}}=$ (κατὰ τὴν τρίτην ἀρχὴν) $\frac{\text{συν γ}}{\text{P}}$. Ἔχομεν λοιπὸν τὴν τετάρτην ταύτην ἀρχὴν

$$\text{ἡμ B : συν Γ : : P : συν γ}$$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν γραμμάτων προκύπτει ἡμ Γ : συν B : : P : συν β.

Η πρώτη καὶ ἡ δευτέρα ἀρχὴ δίδουν ἡμB $=\frac{\text{P ἡμ β}}{\text{ἡμ α}}$, συν B $=\frac{\text{P ἐφ γ}}{\text{ἐφ α}}$. ἐντεῦθεν συνάγεται $\frac{\text{ἡμ B}}{\text{συν B}}$ ἢ $\frac{\text{ἐφ B}}{\text{P}}=\frac{\text{ἡμ β ἐφ α}}{\text{ἡμ α ἐφ γ}}$ $=\frac{\text{P ἡμ β}}{\text{συν α ἐφ γ}}=$ (δυνάμει τῆς τρίτης ἀρχῆς) $\frac{\text{P}^2\text{ ἡμ β}}{\text{συνβ συνγ ἐφγ}}$ $=\frac{\text{ἐφ β}}{\text{ἡμγ}}$. Ἔχομεν λοιπὸν διὰ πέμπτην ἀρχὴν τὴν ἐξίσωσιν ἐφ B $=\frac{\text{P ἐφ β}}{\text{ἡμ γ}}$, ἢ τὴν ἀναλογίαν

$$\text{P : ἐφ B : : ἡμ γ : ἐφ β :}$$

ἐκ τῆς ὁποίας διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν γραμμάτων συνάγεται

$$\text{P : ἐφ Γ : : ἡμ β : ἐφ γ.}$$

Τέλος οἱ δύο οὗτοι τύποι δίδουν ἐφ B ἐφ Γ $=\frac{\text{P}^2\text{ ἐφβ ἐφγ}}{\text{ἡμ β ἡμ γ}}$ $=\frac{\text{P}^4}{\text{συν β συν γ}}=$ (δυνάμει τῆς τρίτης ἀρχῆς) $\frac{\text{P}^3}{\text{συν α}}$.

Λοιπὸν P^3 = συν α ἐφ B ἐφ Γ, ἢ σφ B σφ Γ = Pσυν α, ἢ

$$\text{ἐφ B : σφ Γ : : P : συν α}$$

Αὕτη εἶναι ἡ ἕκτη καὶ τελευταία ἀρχὴ, καὶ δὲν δίδει ἄλλην ἐξίσωσιν, διότι ἡ μετάθεσις μεταξὺ Γ καὶ B δὲν φέρει οὐδεμίαν τροπήν.

Ἰδοὺ ἡ ἀνακεφαλαίωσις τῶν ἓξ τούτων ἀρχῶν ἐκ τῶν ὁποίων τέσσαρες δίδουν ἑκάστη δύο ἐξισώσεις.

Α΄. Ρἡμ β = ἡμ α ἡμ Β, Ρἡμ γ = ἡμ α ἡμ Γ

Β΄. Ρἐφ β = ἐφ α συν Γ, Ρἐφ γ = ἐφ α συν Β

Γ΄. Ρσυν α = συν β συν γ,

Δ΄. Ρσυν Β = ἡμ Γ συν β, Ρσυν Γ = ἡμ Β συν γ

Ε΄. Ρἐφβ = ἡμ γ ἐφ Β, Ρεφ γ = ἡμ β ἐφ Γ

ΣΤ΄. Ρσυν α = σφ Β σφ Γ,

Ἐντεῦθεν προκύπτουν δέκα ἐξισώσεις περιέχουσαι ὅλας τὰς δυνατὰς νὰ ὑπάρξουν σχέσεις μεταξὺ τριῶν τῶν πέντε στοιχείων Β, Γ, α, β, γ· ὥστε ὅταν ἦναι γνωσταὶ δύο τούτων τῶν ποσοτήτων μὲ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, ἀμέσως γίνεται γνωστὴ ἡ τρίτη, διὰ τοῦ ἡμιτόνου, συνημιτόνου, ἐφαπτομένης ἢ συνεφαπτομένης της.

ξϛ΄. Σημειωτέον ὅτι ὅταν στοιχεῖόν τι προσδιορίζεται μόνον διὰ τοῦ ἡμιτόνου του, τότε ἔχει δύο τιμὰς, καὶ ἐπομένως ὑπάρχουν δύο τρίγωνα πληροῦντα εἰς τὸ ζήτημα· διότι τὸ αὐτὸ ἡμίτονον τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς μίαν τινα γωνίαν ἢ τόξον, ἀνήκει καὶ εἰς τὸ παραπλήρωμά της. Ἀλλὰ τὸ πρᾶγμα δὲν ἔχει οὕτως ὅταν τὸ ἄγνωστον στοιχεῖον προσδιορίζεται διὰ τοῦ συνημιτόνου, ἐφαπτομένης ἢ συνεφαπτομένης του. Τότε δυνατὸν εἶναι νὰ ἀποφασισθῇ ἀπὸ τὸ σημεῖον ταύτης τῆς τιμῆς, ἐὰν τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος στοιχεῖον ἦναι μεῖζον ἢ ἔλασσον τῶν 100°· τὸ στοιχεῖον θέλει εἶναι ἔλασσον τῶν 100°, ἐὰν τὸ συνημίτονον ἡ ἐφαπτομένη ἢ συνεφαπτομένη του ἔχῃ τὸ σημεῖον +· θέλει δὲ εἶναι μεῖζον τῶν 100°, ἐὰν μία τῶν γραμμῶν τούτων ἔχῃ τὸ σημεῖον —. Περὶ τῆς ὑποθέσεως ταύτης ἦτον δυνατὸν νὰ στερεωθῶσι γενικὰ παραγγέλματα τὰ ὁποῖα ἄλλό τι δὲν ἤθελον εἶναι παρὰ συνέπειαι τῶν ἓξ ἀποδεδειγμένων ἐξισώσεων.

Φερ' εἰπεῖν, ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν Ρσυν α = συν β συν γ, ἕπεται ὅτι αἱ τρεῖς πλευραὶ σφαιρικοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἢ ὅλαι εἶναι μικρότεραι τῶν 100°, ἢ δύο τῶν τριῶν πλευρῶν εἶναι μεγαλήτεραι τῶν 100°, καὶ ἡ τρίτη μικροτέρα. Οὐδεὶς ἄλλος συνδυασμὸς ἠμπορεῖ νὰ καταςήσῃ τὸ σημεῖον τοῦ συν β συν γ ὅμοιον μὲ τὸ τοῦ συν α, ὡς ἀπαιτεῖ αὔτη ἡ ἐξίσωσις. ὡσαύτως ἡ ἐξίσωσις Ρέφ γ = ἡμ ϐ ἐφ Γ, εἰς τὴν ὁποίαν ἡμ ϐ εἶναι πάντοτε θετικὸν, δεικνύει ὅτι ἐφ Γ ἔχει πάντοτε τὸ αὐτὸ σημεῖον μὲ τὸ τῆς ἐφ γ. Εἰς κάθε λοιπὸν σφαιρικὸν ὀρθογώνιον τρίγωνον μία πλαγία γωνία καὶ ἡ ἀπέναντι εἰς ταύτην πλευρὰ, εἶναι πάντοτε τοῦ ἰδίου εἴδους· τοῦτ᾽ ἔςι, ἢ καὶ τὰ δύο μεγαλήτερα ἢ καὶ τὰ δύο μικρότερα τῶν 100°.

Λύσις τῶν σφαιρικῶν ὀρθογωνίων τριγώνων.

ξζ΄. Σφαιρικὸν τρίγωνον δυνατὸν νὰ ἔχῃ τρεῖς ὀρθὰς γωνίας, καὶ τότε αἱ τρεῖς πλευραί του ἰσοῦνται μὲ 100°· δυνατὸν νὰ ἔχῃ δύο μόνον ὀρθὰς γωνίας· τότε αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ἴσαι μὲ 100°, καὶ μένει μία γωνία μὲ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν, μέτρον τῶν ὁποίων εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς μοιρῶν, ὥςε ἡ γνῶσις τοῦ ἑνὸς τῶν δύο τούτων ςοιχείων φέρει τὴν γνῶσιν τοῦ ἄλλου. Εκ τούτου φανερὸν γίνεται ὅτι τοιούτου εἴδους τρίγωνα δὲν ἠμποροῦν νὰ δώσουν χώραν εἰς κἀνὲν πρόβλημα· ἠμποροῦμεν λοιπὸν νὰ ἀφήσωμεν κατὰ μέρος τὰς μερικὰς ταύτας περιςάσεις, καὶ νὰ θεωρήσωμεν ἐκεῖνα τὰ τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν μόνον ὀρθὴν γωνίαν.

Εςω Α ἡ ὀρθὴ γωνία, Β καὶ Γ αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι αἱ λεγόμεναι πλάγιαι, α ἡ ὑποτείνουσα ἢ ἀπέναντι εἰς τὴν γωνίαν Α πλευρὰ, ϐ καὶ γ αἱ εἰς τὰς γωνίας Β καὶ Γ ἀπέναντι πλευραί. Δοθεισῶν δύο τῶν πέντε ποσοτήτων Β, Γ, α, ϐ, γ, πάντοτε ἡ λύσις τοῦ τριγώνου ἠμπορεῖ νὰ ἀναχθῇ εἰς μίαν τῶν ἀκολούθων ἓξ περιςάσεων.

ΠΡΩΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

ξη'. Δοθείσης τῆς ὑποτεινούσης α καὶ μιᾶς πλευρᾶς β, εὑρίσκονται αἱ δύο γωνίαι Β καὶ Γ καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ γ διὰ τῶν ἐξισώσεων

$$ἡμ\,Β = \frac{Ρ\,ἡμ\,β}{ἡμ\,α},\ συν\,Γ = \frac{ἐφ\,β\,σφ\,α}{Ρ},\ συν\,γ = \frac{Ρ\,συν\,α}{συν\,β}.$$

Επειδὴ τὰ δύο ϛοιχεῖα Γ καὶ γ προσδιορίζονται διὰ τοῦ συνημιτόνου των, διὰ τοῦτο δὲν εἶναι δεκτικὰ παρὰ μιᾶς μόνης τιμῆς. Οσον διὰ τὴν γωνίαν Β, πρέπει νὰ ἦναι τοῦ ἰδίου εἴδους μὲ τὴν δεδομένην πλευρὰν β.

ΔΕΥΤΕΡΑ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

ξθ'. Δοθεισῶν τῶν δύο πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας β καὶ γ, εὑρίσκεται ἡ ὑποτείνουσα α καὶ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ διὰ τῶν ἐξισώσεων

$$συν\,α = \frac{συν\,β\,συν\,γ}{Ρ},\ ἐφ\,Β = \frac{Ρ\,ἐφ\,β}{ἡμ\,γ},\ ἐφ\,Γ = \frac{Ρ\,ἐφ\,γ}{ἡμ\,β}.$$

Εἰς τὴν περίϛασιν ταύτην δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία.

ΤΡΙΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

ο'. Δοθείσης τῆς ὑποτεινούσης α καὶ μιᾶς γωνίας Β, αἱ δύο πλευραὶ β καὶ γ καὶ ἡ ἄλλη γωνία Γ προσδιορίζονται ἐκ τῶν ἐξισώσεων

$$ἡμ\,β = \frac{ἡμ\,α\,ἡμ\,Β}{Ρ},\ ἐφ\,γ = \frac{ἐφ\,α\,συν\,Β}{Ρ},\ σφ\,Γ = \frac{συν\,α\,ἐφ\,Β}{Ρ}.$$

Τὰ ϛοιχεῖα γ καὶ Γ προσδιορίζονται ἐκ τούτων τῶν τύπων χωρὶς ἀμφιβολίαν· ὅσον διὰ τὴν πλευρὰν β, πρέπει νὰ ἦναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τὴν γωνίαν Β.

ΤΕΤΑΡΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

οα'. Δοθείσης τῆς πλευρᾶς τῆς ὀρθῆς γωνίας β μετὰ τῆς ἀπέναντι γωνίας Β, εὑρίσκονται τὰ τρία ἄλλα ϛοιχεῖα διὰ τῶν τύπων

$$ἡμ\ α = \frac{P\ ἡμ\ β}{ἡμ\ B},\ ἡμ\ γ = \frac{ἐφ\ β\ σφ\ B}{P},\ ἡμ\ Γ = \frac{P\ συν\ B}{συν\ β}$$

Εἰς τὴν παροῦσαν περίςασιν τὰ τρία ἄγνωςα ςοιχεῖα προσδιορίζονται δι' ἡμιτόνων, καὶ διὰ τοῦτο τὸ ζήτημα εἶναι ἐπιδεκτικὸν δύο λύσεων. Εἶναι τῷ ὄντι φανερὸν ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒ'Γ (σχ. 11) εἶναι καὶ τὰ δύο ὀρθογώνια εἰς Α, καὶ τὰ δύο ἔχουν τὴν αὐτὴν πλευρὰν $ΑΓ = β$, καὶ τὴν αὐτὴν ἀπέναντι γωνίαν $B = B'$. Τοῦ λοιποῦ, αἱ διπλαῖ τιμαὶ πρέπει νὰ συμπλεχθοῦν οὕτω πως ὥςε γ καὶ Γ νὰ ἦναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους· ἀκολούθως τὸ εἶδος τῆς γ καὶ β προσδιορίζεται ἀπὸ τὸ τῆς α διὰ τῆς παρατηρήσεως τοῦ τύπου $συν\ β\ συν\ γ = Pσυν\ α$, ἀλλ' ἡ τιμὴ τῆς α προσδιορίζεται κατ' εὐθεῖαν ἐκ τῆς ἐξισώσεως $ἡμ\ α = \frac{P\ ἡμ\ β}{ἡμ\ B}$.

ΠΕΜΠΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

οβ'. Δοθείσης μιᾶς πλευρᾶς τῆς ὀρθῆς γωνίας β μετὰ τῆς προσκειμένης γωνίας Γ, εὑρίσκονται τὰ τρία ἄλλα ςοιχεῖα α, γ, Β, διὰ τῶν τύπων

$$σφ\ α = \frac{σφ\ β\ συν\ Γ}{P},\ ἐφ\ γ = \frac{ἡμ\ β\ ἐφ\ Γ}{P},\ συν\ B = \frac{συν\ β\ ἡμ\ Γ}{P}.$$

Εἰς τὴν παροῦσαν περίςασιν δὲν μένει οὐδεμία ἀβεβαιότης περὶ τοῦ εἴδους τῶν ἀγνώςων ςοιχείων.

ΕΚΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

ογ'. Δοθεισῶν τῶν πλαγίων γωνιῶν Β καὶ Γ, εὑρίσκονται αἱ τρεῖς πλευραὶ α, β, γ διὰ τῶν τύπων

$$συν\ α = \frac{σφ\ B\ σφ\ Γ}{P},\ συν\ β = \frac{P\ συν\ B}{ἡμ\ Γ},\ συν\ γ = \frac{P\ συν\ Γ}{ἡμ\ B}.$$

Καὶ εἰς τὴν παροῦσαν περίςασιν δὲν μένει ἀκόμη οὐδεμία ἀβεβαιότης.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

οδ'. Τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον τοῦ ὁποίου Α, Β, Γ εἶναι αἱ γωνίαι, καὶ α, β, γ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ, ἀντιςοιχεῖ εἰς πολικὸν τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶναι παραπληρώματα τῶν πλευρῶν α, β, γ, καὶ αἱ πλευραὶ παραπληρώματα τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ· ὥςε ἐὰν καλέσωμεν Α', Β', Γ' τὰς γωνίας τοῦ πολικοῦ τριγώνου, καὶ α', β', γ' τῆς ἀπέναντι εἰς ταύτας τὰς γωνίας πλευρὰς, θέλομεν ἔχει

$$A' = 200^\circ - \alpha,\ B' = 200^\circ - \beta \cdot\ \Gamma' = 200^\circ - \gamma$$
$$\alpha' = 200^\circ - A,\ \beta' = 200^\circ - B,\ \gamma' = 200^\circ - \Gamma.$$

Τούτου τεθέντος, ἐὰν σφαιρικὸν τρίγωνον ἔχῃ μίαν πλευρὰν ἴσην μὲ τεταρτημόριον, φανερὸν ὅτι ἡ ἀντιςοιχοῦσα γωνία Α' τοῦ πολικοῦ εἶναι ὀρθὴ, καὶ τὸ τρίγωνον τοῦτο ὀρθογώνιον. Τὰ δύο λοιπὸν δοθέντα τὰ ὁποῖα, ἐκτὸς τῆς πλευρᾶς τῆς ἴσης μὲ 100°, ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν λύσιν τοῦ προτεθέντος τριγώνου, χρησιμεύουν διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς λύσεως τοῦ πολικοῦ, καὶ ἀκολούθως ἐκείνης τοῦ προτεθέντος τριγώνου. Εκ τούτου δυνατὸν νά συναχθῶσι παρόμοιοι μὲ τοὺς προηγουμένους τύποι διὰ τὴν κατ' εὐθεῖαν λύσιν τῶν σφαιρικῶν τριγώνων τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν πλευρὸν ἴσην μὲ 100°.

Ισοσκελὲς τρίγωνον μοιράζεται εἰς δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἴσα καθ' ὅλά των τὰ μέρη· οὕτως ἡ λύσις τῶν σφαιρικῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων κρέμαται προσέτι ἀπὸ τὴν τῶν σφαιρικῶν ὀρθογωνίων.

Εςω ΑΒΓ (σχ. 12) σφαιρικὸν τρίγωνον, τοιοῦτον ὥςε αἱ δύο πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ νὰ ἦναι παραπληρώματα ἡ μία τῆς ἄλλης· ἐὰν προεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Δ, φανερὸν ὅτι ΒΓ καὶ ΒΔ θέλουν εἶναι ἴσαι μεταξύ των ὡς παραπληρώματα τῆς αὐτῆς πλευρᾶς ΑΒ· ἄλλως δὲ εἶναι κατάδηλον ὅτι γνωςῶν τῶν μερῶν τοῦ τριγώνου ΒΓΔ, γίνονται γνωςὰ τὰ μέρη τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἀτράκτου; καὶ τ᾿ ἀνάπαλιν. Η λύσις λοιπὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον δύο πλευραὶ κάμνουν ὁμοῦ 200°, ἀνάγεται εἰς τὴν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΓΔ, ἢ εἰς τὴν τοῦ ὀρθογωνίου ΒΔΕ ἡμίσεως τοῦ ΓΒΔ.

Οταν αἱ δύο πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ ἦναι παραπληρώματα ἡ μία τῆς ἄλλης, πρέπει τὸ αὐτὸ νὰ ὑπάρχῃ καὶ διὰ τὰς ἀπέναντι γωνίας ΑΓΒ, ΒΑΓ· διότι ΒΓΔ εἶναι παραπλήρωμα τῆς ΒΓΑ· ἀλλὰ ΒΓΔ=Δ=Α. Αδύνατον λοιπὸν νὰ ὑπάρχῃ $α+γ=200°$, χωρὶς ἐνταυτῷ $Α+Γ=200°$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀντίςροφον.

Εντεῦθεν βλέπομεν ὅτι εἰς τὴν λύσιν τῶν σφαιρικῶν ὀρθογωνίων τρίγωνων συμπεριλαμβάνεται, 1ον ἡ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων μίαν πλευρὰν ἴσην μὲ τεταρτημόριον. 2ον ἡ τῶν σφαιρικῶν ἰσοσκελῶν. 3ον ἡ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων εἰς τὰ ὁποῖα τὸ ἄθροισμα δύο πλευρῶν, ὡς καὶ τῶν ἀπέναντι δύο γωνιῶν, ἰσοῦται μὲ 200°.

Αρχαὶ διὰ τὴν λύσιν τῶν σφαιρικῶν τριγώνων ἐν γένει.

οε'. Εἰς κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν εἶναι ἀνάλογα τῶν ἡμιτόνων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν.

Εςω ΑΒΓ (σχ. 13) ὁποιονδήποτε σφαιρικὸν τρίγωνον· λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει ἡμΒ : ἡμΓ :: ἡμΑΓ : ἡμΑΒ.

Απὸ τὴν κορυφὴν Α ἂς κατεβασθῇ τὸ τόξον ΑΔ κάθετον ἐπὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΒΓ· τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ δίδουν τὰς ἀναλογίας

ἡμ Β : Ρ :: ἡμ ΑΔ : ἡμ ΑΒ.

Ρ : ἡμ Γ :: ἡμ ΑΓ : ἡμ ΑΔ.

Απὸ τὸν κατὰ τάξιν πολλαπλασιασμὸν τῶν δύο τούτων ἀναλογιῶν, καὶ τὴν τῶν κοινῶν παραγόντων ἐξάλειψιν, συνάγεται