τῶν εὐθειῶν τούτων θέλει εἶναι ὁ αὐτὸς, καὶ θέλομεν ἔχει ΜΠ : ΜΚ :: ΑΠ : ΑΚ. σχ. 136.

Διότι, ἐξ ὑποθέσεως, ἔχομεν, ΓΠ : ΓΑ :: ΓΑ, ΓΚ· ἀντὶ ΓΑ θέτοντες ΓΜ, θέλομεν ἔχει ΓΠ : ΓΜ :: ΓΜ : ΓΚ· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΓΠΜ, ΓΚΜ, ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην Γ περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων· λοιπὸν εἶναι ὅμοια (20, 3)· ἄρα ἡ τρίτη πλευρὰ ΜΠ εἶναι πρὸς τὴν τρίτην ΜΚ ὡς ΓΠ πρὸς ΓΜ ἢ ΓΑ. Ἀλλ' ἡ ἀναλογία ΓΠ : ΓΑ :: ΓΑ : ΓΚ δίδει, ἐν διαιρέσει, ΓΠ : ΓΑ :: ΓΑ—ΓΠ : ΓΚ—ΓΑ, ἢ ΓΠ : ΓΑ :: ΑΠ : ΑΚ λοιπὸν ΜΠ : ΜΚ :: ΑΠ : ΑΚ· εἰς τὸν αὐτὸν λόγον μὲ τὸν ἴδιον τρόπον ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι ὑπάρχουν αἱ εὐθεῖαι Μ′Π, Μ′Κ, Μ″Π, Μ″Κ κ. τ. λ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΑ

ΕΙΣ ΤΟ Γ′. ΒΙΒΛΙΟΝ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΡΩΤΟΝ.

Νὰ διαιρέσωμεν εὐθεῖαν δεδομένην εἰς ὅσα ἴσα μέρη θέλομεν, ἢ εἰς μέρη ἀνάλογα δεδομένων γραμμῶν.

1.ον Ἂς προτεθῇ νὰ διαιρέσωμεν τὴν γραμμὴν ΑΒ εἰς πέντε ἴσα μέρη· ἐκ τοῦ ἄκρου Α ἂς ἀχθῇ ἡ ἀπροσδιόριστος ΑΗ, καὶ ἀφ' οὗ ληφθῇ ΑΓ ἴση μὲ ὁποιονδήποτε μέγεθος, ἂς φερθῇ πεντάκις ἐπὶ τῆς ΑΗ. Ἂς ἑνωθῇ ἡ τελευταία στιγμὴ διαιρέσεως Η καὶ τὸ ἄκρον Β διὰ τῆς ΗΒ, ἔπειτα ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΙ παράλληλος τῆς ΗΒ· λέγω ὅτι ΑΙ εἶναι τὸ πέμπτον μέρος τῆς ΑΒ, καὶ οὕτω φερθείσης τῆς ΑΙ πεντάκις ἐπὶ ΑΒ, ἡ ΑΒ θέλει διαιρεθῇ εἰς πέντε ἴσα μέρη. σχ. 137.

Διότι, ἐπειδὴ ΓΙ εἶναι παράλληλος τῆς ΗΒ, αἱ πλευραὶ ΑΗ, ΑΒ τέμνονται ἀναλόγως εἰς Γ καὶ Ι (πρό. 15). Ἀλλὰ ΑΓ εἶναι τὸ πέμπτον μέρος τῆς ΑΗ· λοιπὸν ΑΙ εἶναι τὸ πέμπτον τῆς ΑΒ.

2.ον Ἂς προτεθῇ νὰ διαιρεθῇ ἡ ΑΒ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν δεδομένων γραμμῶν Π, Κ, Ρ. Ἐκ τοῦ ἄκρου Α ἂς ἀχθῇ ἡ ἀπροσδιόριστος ΑΗ, ἂς ληφθῇ ΑΓ=Π, ΓΔ=Κ, ΔΕ=Ρ, ἂς ἑνωθῶσι τὰ ἄκρα Ε καὶ Β, καὶ διὰ τῶν σημείων Γ, Δ, ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΓΙ, ΔΚ′ παράλληλοι τῆς ΕΒ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ διαιρεῖται εἰς μέρη ΑΙ, ΙΚ′, Κ′Β ἀνάλογα τῶν δεδομένων γραμμῶν Π, Κ, Ρ. σχ. 138.

Διότι ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ΓΙ, ΔΚ′, ΕΒ τὰ μέρη ΑΙ, ΙΚ′, Κ′Β εἶναι ἀνάλογα τῶν μερῶν ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ (πρό. 15)· ἐκ δὲ τῆς κατασκευῆς ταῦτα εἶναι ἴσα μὲ τὰς δεδομένας γραμμὰς Π, Κ, Ρ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β′.

Νὰ εὕρωμεν τετάρτην ἀνάλογον τριῶν δεδομένων γραμμῶν Α, Β, Γ.

Ἂς ἀχθῶσιν αἱ δύο ἀπροσδιόριστοι ΔΕ, ΔΖ ὑπὸ ὁποιανδήποτε γωνίαν. Ἐπὶ τῆς ΔΕ ἂς ληφθῇ ΔΑ=Α καὶ ΔΒ=Β, ἐπὶ τῆς ΔΖ ἂς ληφθῇ ΔΓ=Η, ἂς ἑνωθῇ ΑΓ, καὶ διὰ τῆς στιγμῆς Β ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΧ παράλληλος τῆς ΑΓ· λέγω ὅτι ΔΧ εἶναι ἡ ζητουμένη τετάρτη ἀνάλογος· διότι, οὔσης τῆς ΒΧ παραλλήλου τῆς ΑΓ, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΔΑ : ΔΒ : : ΔΓ : ΔΧ. Τώρα οἱ τρεῖς πρῶτοι ὅροι ταύτης τῆς ἀναλογίας εἶναι ἴσοι μὲ τὰς τρεῖς δεδομένας γραμμάς· λοιπὸν ΔΧ εἶναι ἡ ζητουμένη τετάρτη ἀνάλογος. σχ. 139.

Πόρισμα. Παρομοίως ἠθέλαμεν εὕρη τρίτην ἀνάλογον δύο δεδομένων γραμμῶν Α, Β· διότι αὕτη ἄλλό τι δὲν ἤθελεν εἶναι παρὰ ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν γραμμῶν Α, Β, Β.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

Νὰ εὕρωμεν μέσην ἀνάλογον μεταξὺ δύο δεδομένων γραμμῶν Α καὶ Β.

Ἐπὶ τῆς ἀπροσδιορίςου ΔΖ ἂς ληφθῇ ΔΕ = Α, καὶ ΕΖ = Β: ἐπὶ τῆς ὅλης ΔΖ ὡς διαμέτρου, ἂς γραφθῇ ἡ ἡμιπεριφέρεια ΔΗΖ· εἰς τὴν ςιγμὴν Ε ἂς ὑψωθῇ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἡ κάθετος ΕΗ, ἥτις συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν εἰς Η: λέγω ὅτι ΕΗ εἶναι ἡ ζητουμένη μέση ἀνάλογος. σχ. 140.

Διότι ἡ φερομένη κάθετος ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς περιφερείας ἐπὶ τῆς διαμέτρου εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων τῆς διαμέτρου (πρό. 23)· λοιπὸν ΗΕ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν τμημάτων ΔΕ, ΕΖ, ἀλλὰ τὰ τμήματα ταῦτα εἶναι ἴσα μὲ τὰς δεδομένας γραμμὰς Α καὶ Β;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'.

Νὰ διαιρέσωμεν τὴν δεδομένην εὐθεῖαν ΑΒ εἰς δύο μέρη ὥστε τὸ μεγαλήτερον νὰ ἦναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῆς ὅλης γραμμῆς καὶ τοῦ ἄλλου μέρους. σχ. 141.

Εἰς τὸ ἄκρον Β τῆς γραμμῆς ΑΒ ἂς ὑψωθῇ ἡ κάθετος ΒΓ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ· ἐκ τῆς ςιγμῆς Γ ὡς ἐκ κέντρου, μὲ ἀκτῖνα ΓΒ ἂς γραφθῇ περιφέρεια· ἂς ἐπιζευχθῇ ΑΓ ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς Δ, καὶ ἂς ληφθῇ ΑΖ = ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ διαιρεῖται εἰς τὴν ςιγμὴν Ζ κατὰ τὸν ζητούμενον τρόπον, τουτέςι ὡς ΑΒ:ΑΖ : : ΑΖ:ΖΒ.

Διότι οὖσα ἡ ΑΒ κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΓΒ εἶναι ἐφαπτομένη· καὶ ἐὰν προεκβληθῇ ΑΓ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ ἐκ νέου τὴν περιφέρειαν εἰς Ε, θέλομεν ἔχει ΑΕ : ΑΒ : : ΑΒ : ΑΔ (πρό. 30)· λοιπὸν, ἐνδιαιρέσει, ΑΕ—ΑΒ : ΑΒ : : ΑΒ—ΑΔ : ΑΔ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς ΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ, ἡ διάμετρος ΔΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒ, καὶ ἐπομένως ΑΕ—ΑΒ = ΑΔ = ΑΖ· ἔχομεν ὡσαύτως, ἐπειδὴ ΑΖ = ΑΔ, ΑΒ — ΑΔ = ΖΒ· λοιπὸν ΑΖ : ΑΒ : : ΖΒ : ΑΔ ἢ ΑΖ· λοιπὸν ἀντιςρέφοντες θέλομεν ἔχει ΑΒ : ΑΖ : : ΑΖ : ΖΒ· ἐπειδὴ δὲ ΑΒ > ΑΖ, διὰ τοῦτο καὶ ΑΖ > ΖΒ· λοιπὸν ΑΖ εἶναι τὸ μεῖζον τμῆμα καὶ ὡς βλέπομεν εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῆς ὅλης ΑΒ καὶ τοῦ μικροτέρου τμήματος ΖΒ.

Σχόλιον. Τὸ εἶδος τοῦτο τῆς διαιρέσεως τῆς γραμμῆς ΑΒ καλεῖται διαίρεσις εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον: θέλομεν ἰδεῖ τὰς χρήσεις της. Ἠμποροῦμεν δὲ νὰ σημειώσωμεν ὅτι ἡ διατέμνουσα ΑΕ διαιρεῖται εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον εἰς τὴν ςιγμὴν Δ· διότι, ἐπειδὴ ΑΒ = ΔΕ, ἔχομεν ΑΕ : ΔΕ : : ΔΕ : ΑΔ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄.

Ἀπὸ δεδομένον σημεῖον Α ἐντὸς δεδομένης γωνίας ΒΓΔ, νὰ ἀχθῇ ἡ ΒΔ εἰς τρόπον ὥςε τὰ μέρη ΑΒ, ΑΔ τὰ περιεχόμενα μεταξὺ τοῦ σημείου Α καὶ τῶν δύο πλευρῶν τῆς γωνίας νὰ ἦναι ἴσα. σχ. 142.

Διὰ τῆς ςιγμῆς Α ἄς ἀχθῇ ἡ ΑΕ παράλληλος τῆς ΓΔ, ἄς ληφθῇ ΒΕ = ΓΕ, καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΒΑΔ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη γραμμή.

Διότι, οὔσης τῆς ΑΕ παραλλήλου τῆς ΓΔ, ἔχομεν ΒΕ : ΕΓ : : ΒΑ : ΑΔ· τώρα ΒΕ = ΕΓ· λοιπὸν ΒΑ = ΑΔ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ς΄.

Νὰ κατασκευάσωμεν τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ παραλληλόγραμμον ἢ δεδομένον τρίγωνον.

1.ον Ἔςω ΑΒΓΔ τὸ δεδομένον παραλληλόγραμμον, ΑΒ ἡ βάσις του, ΔΕ τὸ ὕψος του: ἄς ζητηθῇ μέση ἀνάλογος ΧΨ μεταξὺ ΑΒ καὶ ΔΕ (πρόβλ. 3)· λέγω ὅτι τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς ΧΨ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Διότι ἐκ τῆς κατασκευῆς ἔχομεν ΑΒ : ΧΨ : : ΧΨ : ΔΕ· λοιπὸν $\overline{ΧΨ}^2$ = ΑΒ ×

ΔΕ· ἀλλὰ $AB \times \Delta E$ εἶνα τὸ μέτρον τοῦ παραλληλογράμμου, καὶ $\overline{X\Psi}^2$ τὸ τοῦ τετραγώνου· λοιπὸν εἶναι ἰσοδύναμα. σχ. 143.

2.ον Εςω ΑΒΓ τὸ δεδομένον τρίγωνον, ΒΓ ἡ βάσις του, ΑΔ τὸ ὕψος του: ἄς ληφθῇ μέση ἀνάλογος μεταξὺ ΒΓ καὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς ΑΔ, καὶ ἔςω ΧΨ ἡ μέση αὕτη ἀνάλογος· λέγω ὅτι τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς ΧΨ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ δεδομένον τρίγωνον ΑΒΓ. σχ. 144.

Διότι, ἐπειδὴ ἔχομεν $B\Gamma : X\Psi :: X\Psi : \frac{1}{2}A\Delta$, ἕπεται ὅτι $\overline{X\Psi}^2 = AB \times \frac{1}{2}A\Delta$· λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς ΧΨ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ′.

Επὶ τῆς δεδομένης γραμμῆς ΑΔ νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον ΑΔΕΧ ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον ὀρθογώνιον ΑΒΖΓ. σχ. 145.

Ας ζητηθῇ τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν γραμμῶν ΑΔ, ΑΒ, ΑΓ, καὶ ἔςω ΑΧ ἡ τετάρτη αὕτη ἀνάλογος· λέγω ὅτι τὸ κατασκευαζόμενον ὀρθογώνιον ἐπὶ ΑΔ καὶ ΑΧ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΖΓ.

Διότι, ἐπειδὴ ἔχομεν $A\Delta : AB :: A\Gamma : AX$, ἀκολουθεῖ ὅτι $A\Delta \times AX = AB \times A\Gamma$· λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΑΔΕΧ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΖΓ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η′.

Νὰ εὕρωμεν εἰς γραμμὰς τὸν λόγον τοῦ ὀρθογωνίου δύο δεδομένων γραμμῶν Α καὶ Β πρὸς τὸ ὀρθογώνιον δύο δεδομένων γραμμῶν Γ καὶ Δ. σχ. 148.

Εςω Χ τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν γραμμῶν Β,Γ,Δ· λέγω ὅτι ὁ λόγος τῶν δύο γραμμῶν Α καὶ Χ εἶναι ἴσος μὲ τὸν τῶν δύο ὀρθογωνίων $A \times B$, $\Gamma \times \Delta$.

Διότι, ἐπειδὴ ἔχομεν $B:\Gamma::\Delta:X$, ἔπεται ὅτι $\Gamma\times\Delta = B\times X$· λοιπὸν $A\times B:\Gamma\times\Delta::A\times B:B\times X::A:X$.

Πόρισμα. Εἰς εὕρεσιν λοιπὸν τοῦ λόγου τῶν τετραγώνων τῶν δεδομένων γραμμῶν Α καὶ Γ, ἂς ζητήσωμεν τρίτην ἀνάλογον Χ τῶν γραμμῶν Α καὶ Γ, εἰς τρόπον ὥστε $A:\Gamma::\Gamma:X$, καὶ θέλομεν ἔχει $\overline{A}^2:\overline{\Gamma}^2::A:X$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ'.

Νὰ εὕρωμεν εἰς γραμμὰς τὸν λόγον τοῦ γινομένου τριῶν δεδομένων γραμμῶν Α, Β, Γ, πρὸς τὸ γινόμενον τριῶν ἄλλων ἐπίσης δεδομένων Π, Κ, Ρ. (1).

Ἂς ζητηθῇ τετάρτη ἀνάλογος Χ τῶν τριῶν δεδομένων γραμμῶν Π, Α, Β· ἂς ζητηθῇ ἐπίσης τετάρτη ἀνάλογος Ψ τῶν τριῶν δεδομένων γραμμῶν Γ, Κ, Ρ. Αἱ δύο γραμμαὶ Χ, Ψ θέλουν εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ γινόμενα $A\times B\times\Gamma$, $\Pi\times K\times P$.

Διότι, ἐπειδὴ $\Pi:A::B:X$, ἔχομεν $A\times B=\Pi\times X$, καὶ, πολλαπλασιασθέντων τῶν δύο μερῶν ἐπὶ Γ, $A\times B\times\Gamma=\Pi\times\Gamma\times X$· ὡσαύτως, ἐπειδὴ $\Gamma:K::P:\Psi$, ἔπεται ὅτι $K\times P=\Gamma\times\Psi$· καί, μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν δύο μερῶν ἐπὶ Π, ἔχομεν $\Pi\times K\times P=\Pi\times\Gamma\times\Psi$· λοιπὸν τὸ γινόμενον $A\times B\times\Gamma$ εἶναι πρὸς τὸ γινόμενον $\Pi\times K\times P$ ὡς $\Gamma\times\Pi\times X$ πρὸς $\Pi\times\Gamma\times\Psi$, ἢ ὡς Χ πρὸς Ψ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι'.

Νὰ εὕρωμεν τρίγωνον ἰσοδύναμον μὲ δεδομένον πολύγωνον.

---

(1) Ἐπειδὴ ὡς ἀλλοῦ θέλομεν ἴδει τὸ γινόμενον τριῶν γραμμῶν παριστάνει ἓν στερεόν· διὰ τοῦτο ἡ ἐκφώνησις τοῦ παρόντος προβλήματος δύναται νὰ ἀχθῇ εἰς τὴν ἀκόλουθον ; Δεδομένων τῶν τριῶν διαστάσεων δύο στερεῶν νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον τούτων εἰς γραμμὰς Ο. Μ.

Πρέπει νὰ πασχίσωμεν νὰ τρέψωμεν τὸ δεδομένον πολύγωνον εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μιᾶς πλευρᾶς ὀλιγώτερον τοῦ δεδομένου, καὶ τοῦτο πάλιν εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μιᾶς πλευρᾶς ὀλιγώτερον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἕως οὗ τελευταῖον νὰ καταντήσωμεν εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον τὸ ὁποῖον θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἔστω λοιπὸν ΑΒΓΔΕ τὸ δεδομένον πολύγωνον. Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ διαγώνιος ΓΕ, ἥτις ἀφαιρεῖ τὸ τρίγωνον ΓΔΕ· ἐκ τῆς στιγμῆς Δ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΖ παράλληλος τῇ ΓΕ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΑΕ προεκβαλλομένην· ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΖ, καὶ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ θέλει ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΖ τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν πλευρὰν ὀλιγώτερον.

Διότι τὰ τρίγωνα ΓΔΕ, ΓΖΕ ἔχουν κοινὴν βάσιν τὴν ΓΕ· ἔχουν ὡσαύτως τὸ ἴδιον ὕψος, διότι αἱ κορυφαί των Δ, Ζ, κεῖνται ἐπὶ μιᾶς γραμμῆς ΔΖ, παραλλήλου τῆς βάσεως· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα. Προσθέτοντες καὶ εἰς τὰ δύο μέρη τὸ σχῆμα ΑΒΓΕ, ἔχομεν ἐξ ἑνὸς μέρους τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, καὶ ἐκ τοῦ ἄλλου τὸ πολύγωνον ΑΒΓΖ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα.

Παρομοίως δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν γωνίαν Β ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τὸ ἰσοδύναμον ΑΗΓ, καὶ οὕτως τὸ πεντάγωνον ΑΒΔΕ θέλει τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον ΗΓΖ. σχ. 146.

Ο αὐτὸς τρόπος ἐφαρμόζεται εἰς κάθε ἄλλο σχῆμα· διότι ὀλιγοστεύοντες κάθε φορὰν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν, θέλομεν καταντήσει τέλος εἰς τὸ ἰσοδύναμον τρίγωνον.

Σχόλιον. Εἴδομεν (προβ. 6) ὅτι κάθε τρίγωνον δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἰσοδύναμον τετράγωνον. Οὕτω πάντοτε εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ δεδομένον εὐθύγραμμον σχῆμα· τοῦτο δὲ καλεῖται τετραγωνίζειν τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα, ἢ εὑρίσκειν τὸν τετραγωνισμὸν αὐτοῦ.

Τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου συνίςαται εἰς τὴν εὕρεσιν τετραγώνου ἰσοδυνάμου μὲ κύκλον δεδομένης διαμέτρου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΑ'.

Νὰ κατασκευάσωμεν τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν δύο δεδομένων τετραγώνων.

Εςωσαν Α καὶ Β αἱ πλευραὶ τῶν δεδομένων τετραγώνων.

1.ον Ἐὰν πρέπῃ νὰ εὕρωμεν τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τούτων τῶν τετραγώνων, ἄς φερθῶσι πρὸς ὀρθὰς αἱ ἀπροσδιόριςοι ΕΔ, ΕΖ· ἄς ληφθῇ ΕΔ = Α καὶ ΕΗ = Β, ἄς ἐπιζευχθῇ ΔΗ, καὶ ΔΗ θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου. σχ. 147.

Διότι ὄντος τοῦ τριγώνου ΔΕΗ ὀρθογωνίου, τὸ ἐπὶ τῆς ΔΗ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπὶ ΕΔ καὶ ΕΗ κατασκευαζομένων.

2.ον Ἐὰν δὲ πρέπῃ νὰ εὕρωμεν τετράγωνον ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν δεδομένων τετραγώνων, ἄς σχηματισθῇ ὡσαύτως ἡ ὀρθὴ γωνία ΖΕΘ, ἄς ληφθῇ ΗΕ ἴση μὲ τὴν μικροτέραν τῶν πλευρῶν Α καὶ Β· ἐκ τῆς ςιγμῆς Η ὡς ἐκ κέντρου, μὲ ἀκτῖνα ΗΘ ἴση μὲ τὴν ἄλλην πλευρὰν, ἄς γραφθῇ τόξον τὸ ὁποῖον τέμνει ΕΘ εἰς Θ· λέγω ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΕΘ ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν γραμμῶν Α καὶ Β.

Διότι τὸ τρίγωνον ΗΕΘ εἶναι ὀρθογώνιον, ἡ ὑποτείνουσα ΗΘ = Α, καὶ ἡ πλευρὰ ΗΕ = Β· λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς ΕΘ κ. τ. λ.

Σχόλιον. Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον ἠμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ὅσων θέλομεν τετραγώνων· διότι μὲ τὴν αὐτὴν κατασκευὴν μὲ τὴν ὁποίαν ἀνάγομεν δύο εἰς ἕν, ἀνάγομεν τρία εἰς δύο, καὶ τὰ δύο ταῦτα εἰς ἕν, καὶ οὕτω διὰ τὰ ἄλλα. Τὸ αὐτὸ ἤθελεν ὑπάρχει ἐὰν μερικὰ τῶν τετραγώνων ἔπρεπε νὰ ἀφαιρεθοῦν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΒ΄.

Νὰ κατασκευάσωμεν τετράγωνον τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ δεδομένον ΑΒΓΔ, ὅν ἡ γραμμὴ Μ πρὸς τὴν γραμμὴν Ν. σχ. 150.

Ἐπὶ τῆς ἀπροσδιορίστου ΕΗ, ἂς ληφθῇ ΕΖ$=$Μ καὶ ΖΗ$=$Ν· ἐπὶ τῆς ΕΗ ὡς διαμέτρου, ἂς γραφθῇ ἡμιπεριφέρεια, καὶ εἰς τὴν στιγμὴν Ζ ἂς ὑψωθῇ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἡ κάθετος ΖΘ. Ἀπὸ τὴν στιγμὴν Θ ἂς ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ ΗΘ, ΘΕ αἵτινες ἂς προεκβληθῶσιν ἀπροσδιορίστως· ἐπὶ τῆς πρώτης ἂς ληφθῇ ΘΚ΄ ἴση μὲ τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ δεδομένου τετραγώνου, καὶ ἐκ τῆς στιγμῆς Κ΄ ἂς ἀχθῇ ἡ Κ΄Ι παράλληλος τῆς ΕΗ. λέγω ὅτι ΘΙ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Διότι, ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων Κ΄Ι, ΗΕ, ἔχομεν ΘΙ:ΘΚ΄::ΘΕ:ΘΗ· λοιπὸν $\overline{ΘΙ}^2:\overline{ΘΚ'}^2::\overline{ΘΕ}^2:\overline{ΘΗ}^2$: ἀλλ' εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΕΘΗ (πρό. 23), τὸ τετράγωνον τῆς ΘΕ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΘΗ ὡς τὸ τμῆμα ΕΖ πρὸς τὸ τμῆμα ΖΗ, ἢ ὡς Μ πρὸς Ν, λοιπὸν $\overline{ΘΙ}^2:\overline{ΘΚ'}^2::Μ:Ν$. Ἀλλὰ ΘΚ΄$=$ΑΒ· λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς ΘΙ εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ ὡς Μ πρὸς Ν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΓ΄.

Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΖΗ, ὁμολόγου τῇ ΑΒ, νὰ γράψωμεν πολύγωνον ὅμοιον τῷ δεδομένῳ ΑΒΓΔΕ. σχ. 129.

Εἰς τὸ δεδομένον πολύγωνον ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΑΔ, εἰς τὴν στιγμὴν Ζ ἂς γένῃ ἡ γωνία

ΗΖΘ = ΒΑΓ, καὶ εἰς τὴν στιγμὴν Η ἡ γωνία ΖΗΘ = ΑΒΓ· αἱ γραμμαὶ ΖΘ, ΗΘ, τέμνονται εἰς Θ, καὶ ΖΗΘ εἶναι τρίγωνον ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΓ: ὡσαύτως ἐπὶ τῆς ΖΘ, ὁμολόγου τῇ ΑΓ, ἂς κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον ΖΙΘ ὅμοιον τῷ ΑΔΓ, καὶ ἐπὶ τῆς ΖΙ ὁμολόγου τῇ ΑΔ, ἂς κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον ΖΙΚ′ ὅμοιον τῷ ΑΔΕ. Τὸ πολύγωνον ΖΗΘΙΚ′ εἶναι τὸ ζητούμενον ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔΕ.

Διότι τὰ δύο ταῦτα πολύγωνα σύγκειται ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων (πρό. 26).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔ′.

Δεδομένων δύο ὁμοίων σχημάτων, νὰ κατασκευασθῇ σχῆμα ὅμοιον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφοράν των.

Εςωσαν Α καὶ Β δύο ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν δεδομένων σχημάτων, ἂς ζητηθῇ τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνον τῶν Α καὶ Β· ἔςω Χ ἡ πλευρὰ τούτου τοῦ τετραγώνου, Χ θέλει εἶναι εἰς τὸ ζητούμενον σχῆμα ἡ ὁμόλογος πλευρὰ τῇ Α καὶ Β εἰς τὰ δεδομένα σχήματα. Ἀκολούθως τὸ σχῆμα κατασκευάζεται διὰ τοῦ προλαβόντος προβλήματος.

Διότι τὰ ὅμοια σχήματα εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Τώρα τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς Χ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν κατασκευαζομένων τετραγώνων ἐπὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν Α καὶ Β· λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς Χ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν κατασκευαζομένων ὁμοίων σχημάτων ἐπὶ τῶν πλευρῶν Α καὶ Β.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΕ′.

Νὰ κατασκευάσωμεν σχῆμα ὅμοιον μὲ δεδομένον, καὶ τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ πρὸς τοῦτο τὸ σχῆμα λόγον δεδομένον Μ πρὸς Ν.

Ἔστω Α μία τῶν πλευρῶν τοῦ δεδομένου σχήματος, Χ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ εἰς τὸ ζητούμενον· ἐπειδὴ τὰ δύο ταῦτα σχήματα πρέπει νὰ ἦναι ὅμοια, καὶ τὰ ὅμοια σχήματα εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· διὰ τοῦτο τὸ τετράγωνον τῆς Χ ἀνάγκη νὰ ἦναι πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς Α ὡς Μ πρὸς Ν· εὑρίσκομεν λοιπὸν Χ διὰ τοῦ προβλήματος ΙΒ′. γνωστῆς τῆς Χ, τὸ ὑπόλοιπον ἐκτελεῖται διὰ τοῦ ΙΓ′ προβλήματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙϚ′.

Νὰ κατεσκευάσωμεν σχῆμα ὅμοιον μὲ τὸ σχῆμα Π καὶ ἰσοδύναμον μὲ τὸ σχῆμα Κ. σχ. 151.

Ζητοῦμεν τὴν πλευρὰν Μ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου μὲ τὸ σχῆμα Π, καὶ τὴν πλευρὰν Ν τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου μὲ τὸ σχῆμα Κ· εὑρίσκομεν ἀκολούθως μίαν τετάρτην ἀνάλογον Χ τῶν γραμμῶν Μ, Ν, ΑΒ αἵτινες εἶναι δεδομέναι· ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Χ, ὁμολόγου τῇ ΑΒ, ἂς γραφθῇ σχῆμα ὅμοιον μὲ τὸ σχῆμα Π· λέγω ὅτι θέλει εἶναι προσέτι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σχῆμα Κ.

Διότι καλοῦντες Ψ τὸ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Χ ἀναγραφόμενον σχῆμα, θέλομεν ἔχει $Π:Ψ::AB^2:X^2$· ἀλλ' ἐκ τῆς κατασκευῆς, $AB:X::M:N$, ἢ $AB^2:X^2::M^2:N^2$· λοιπὸν $Π:Ψ::M^2:N^2$. Ἀλλ' ἐκ τῆς κατασκευῆς ἔχομεν $M^2=Π$ καὶ $N^2=K$· λοιπὸν $Π:Ψ::Π:K$· λοιπὸν $Ψ=K$· ἄρα τὸ σχῆμα Ψ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ σχῆμα Π, καὶ ἰσοδύναμον μὲ τὸ σχῆμα Κ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΖ′.

Νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον τετράγωνον Γ, καὶ τοῦ ὁποίου αἱ προσκείμεναι πλευραὶ νὰ κάμνουν δεδομένον ἄθροισμα ΑΒ. σχ. 152.

Ἐπὶ τῆς ΑΒ, ὡς διαμέτρου, ἃς γραφθῇ ἡμιπεριφέρεια· ἐκ τῆς ςιγμῆς Α ἂς ὑψωθῇ μία κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, καὶ ἀφ' οὗ ληφθῇ ἐπὶ τῆς καθέτου ἡ ΑΔ ἴση μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ δεδομένου τετραγώνου Γ, ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΕ παράλληλος τῇ ΑΒ. Ἀπὸ τὴν ςιγμὴν Ε, ὅπου ἡ παράλληλος τέμνει τὴν περιφέρειαν ἂς κατεβασθῇ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἡ κάθετος ΕΖ· λέγω ὅτι ΑΖ καὶ ΖΒ εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου· διότι τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἴσον μὲ ΑΒ· καὶ τὸ ὀρθογώνιόν των $ΑΖ \times ΖΒ$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΕΖ (πρό. 23), ἢ μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ· λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον τετράγωνον Γ.

Σχόλιον. Διὰ νὰ ἦναι τὸ πρόβλημα δυνατὸν, πρέπει τὸ διάςημα ΑΔ νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὴν ἀκτῖνα, τουτέςιν ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου Γ νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸ ἥμισυ τῆς γραμμῆς ΑΒ. (1).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΗʹ.

Νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον μὲ τετράγωνον Γ, καὶ τοῦ ὁποίου αἱ προσκείμεναι πλευραὶ νὰ ἔχουν μεταξύ των τὴν δεδομένην διαφορὰν ΑΒ. σχ. 153.

Ἐπὶ τῆς δεδομένης ΑΒ, ὡς διαμέτρου, ἂς γραφθῇ περιφέρεια· εἰς τὸ ἄκρον τῆς διαμέτρου ἂς ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΑΔ ἴση με τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου Γ: ἂς ἑνωθῇ ἡ ΔΟ καὶ ἂς προεκβληθῇ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς Ε· λέγω ὅτι ΔΕ καὶ ΔΖ εἶναι αἱ προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου.

(1) Τὸ ὅριον λοιπὸν τοῦ προβλήματος εἶναι ὅταν ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ δεδομένου ἀθροίσματος, καὶ τότε τὸ κατασκευαζόμενον ὀρθογώνιον εἶναι εἰς τὴν μεγίςην του κατάςασιν· εἰς τὸ ὅριον τοῦτο ἡ φερομένη παράλληλος τῇ ΑΒ ἅπτεται τῆς περιφερείας. Πέραν τούτου τοῦ ὁρίου τὸ πρόβλημα καταςαίνεται ἀνύπαρκτον, διότι δὲν ὑπάρχει πλέον κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν φερομένην παράλληλον καὶ τὴν περιφέρειαν. Ο. Μ.

Διότι 1.ον ἡ διαφορὰ τῶν πλευρῶν τούτων εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρον ΕΖ ἢ ΑΒ. 2.ον τὸ ὀρθογώνιον $ΔΕ \times ΔΖ$ εἶναι ἴσον μὲ $\overline{ΑΔ}^2$ (πρό. 30)· λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ δεδομένον τετράγωνον Γ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΘʹ.

Νὰ εὕρωμεν τὸ κοινὸν μέτρον, ἐὰν ὑπάρχῃ, μεταξὺ τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου.

Ἔςω ΑΒΓΗ ὑποιονδήποτε τετράγωνον, ΑΓ ἡ διαγώνιός του, σχ. 154.

Ἐπειδὴ ΑΓ ὡς πλαγία εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΓΒ ὡς καθέτου, πρέπει νὰ φέρωμεν ΓΒ ἐπὶ ΓΑ τοσάκις ὁσάκις εἶναι δυνατὸν νὰ περιέχεται (προβλ. 17: βιβλ. 2), καὶ πρὸς τοῦτο ἂς γραφθῇ ἐκ τοῦ κέντρου Γ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΒ τὸ ἡμικύκλιον ΑΒΕ, βλέπομεν ὅτι ΓΒ περιέχεται μίαν φορὰν εἰς ΑΓ μὲ τὸ ὑπόλοιπον ΑΔ· τὸ ἐξαγόμενον λοιπὸν τῆς πρώτης ἐργασίας εἶναι τὸ πηλίκον 1 μὲ τὸ ὑπόλοιπον ΑΔ, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ συγκρίνωμεν μὲ ΒΓ ἢ μὲ τὴν ἴσην της ΑΒ.

Ἠμπυροῦμεν νὰ λάβωμεν ΑΖ=ΑΔ, καὶ νὰ φέρωμεν ΑΖ ἐπὶ ΑΒ· ἠθέλαμεν εὕρῃ ὅτι περιέχεται δὶς μὲ ὑπόλοιπον: πλὴν ἐπειδὴ τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο καὶ τὰ ἀκόλουθα προβαίνουν σμικρύνοντα, καὶ διὰ τὴν σμικρότητά των ἀμέσως ἤθελον γένῃ ἀνεπαίσθητα, ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις δὲν ἤθελεν εἶναι παρὰ ἀτελὲς μηχανικὸν μέσον, ὅθεν τίποτε δὲν ἠθέλαμεν ἠμπορέσει νὰ συμπεράνωμεν ὥςε νὰ ἀποφασίσωμεν ἐὰν αἱ γραμμαὶ ΑΓ, ΓΒ ἔχουν ἢ δὲν ἔχουν μεταξύ των κοινὸν μέτρον: ἀλλ' ὑπάρχει μέσον ἁπλούςατον νὰ ἀποφύγωμεν τὰς μειουμένας γραμμάς, καὶ νὰ μὴ ἔχωμεν νὰ ἐργαζώμεθα παρὰ ἐπὶ γραμμῶν αἱ ὁποῖαι μένουν πάντοτε τοῦ ἰδίου μεγέθους.

Τῷ ὄντι, οὔσης τῆς γωνίας ΑΒΓ ὀρθῆς, ΑΒ εἶναι ἐφαπτομένη, καὶ ΑΕ διατέμνουσα ἠγμένη ἐκ τοῦ ἰδίου σημείου, εἰς τρόπον ὥςε ἔχομεν (πρό. 30) ΑΔ : ΑΒ : : ΑΒ : ΑΕ. Οὕτως εἰς τὴν δευτέραν ἐργασίαν, εἰς τὴν ὁποίαν πρόκειται νὰ συγκρίνωμεν ΑΔ μὲ ΑΒ, ἠμποροῦμεν ἀντὶ τοῦ λόγου τῆς ΑΔ πρὸς ΑΒ, νὰ λάβωμεν τὸν τῆς ΑΒ πρὸς ΑΕ: Τώρα ΑΒ ἢ ἴση της ΓΔ περιέχεται δὶς εἰς ΑΕ μὲ τὸ ὑπόλοιπον ΑΔ· λοιπὸν τὸ ἐξαγόμενον τῆς δευτέρας ἐργασίας εἶναι τὸ πηλίκον 2 μὲ τὸ ὑπόλοιπον ΑΔ τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ συγκρίνωμεν μὲ ΑΒ.

Η τρίτη ἐργασία, ἥτις συνίςαται εἰς τὴν σύγκρισιν τῆς ΑΔ μὲ ΑΒ, ἄγεται ὡσαύτως εἰς τὴν σύγκρισιν τῆς ΑΒ ἢ τῆς ἴσης της ΓΔ μὲ ΑΕ, καὶ ἀκόμη ἔχομεν πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον ΑΔ.

Τώρα ἐπειδὴ εἰς ὅλας ταύτας τὰς ἐργασίας καὶ τὰς ἀκολούθους ἐργαζόμεθα ἐπὶ τῶν αὐτῶν ποσοτήτων, διὰ τοῦτο θέλομεν ἔχει τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον δηλαδὴ πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον ΑΔ, καὶ ὅσον καὶ ἂν προεκτείνωμεν τὴν ἐργασίαν πάντοτε τὸ αὐτὸ πηλίκον καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον ΑΔ εὑρίσκομεν· ἐπειδὴ λοιπὸν πάντοτε εὑρίσκομεν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἰδίου μεγέθους, ἡ ἐργασία δὲν τελειόνει ποτέ· διότι ποτὲ δὲν εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον μηδέν. Δικαίως λοιπὸν ἠμποροῦμεν νὰ συμπεράνωμεν ὅτι δὲν ὑπάρχει κοινὸν μέτρον μεταξὺ τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου: ἀλήθεια γνωςὴ καὶ ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς (διότι αἱ γραμμαὶ αὗται εἶναι μεταξύ των : : $\sqrt{2}$: 1 ἤγουν εἰς λόγον ἀσύμμετρον (πρ. 11)), πλὴν ἀποκαθίςαται σαφεςάτη διὰ τῆς γεωμετρικῆς λύσεως.

Σχόλιον. Αδύνατον λοιπὸν εἶναι νὰ εὕρωμεν εἰς ἀριθμοὺς τὸν ἀκριβῆ λόγον τῆς διαγωνίου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου· ἀλλ' ἠμοροῦμεν νὰ πλησιάσωμεν τοσοῦτον ὅσον θέλομεν διὰ τοῦ συνεχοῦς κλάσματος τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ ταῦτον τὸν λόγον. Η πρώτη ἐργασία ἔδωκε διὰ πηλίκον 1· ἡ δευτέρα καὶ ὅλαι αἱ ἄλλαι ἐπ' ἄπειρον δίδουν 2: Οὕτως τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος κλάσμα εἶναι ....

$1 + \frac{1}{2}$

$\quad + \frac{1}{2}$

$\qquad + \frac{1}{2}$

$\qquad\quad + \frac{1}{2}$

$\qquad\qquad + \frac{1}{2} +$ κ. τ. λ. ἐπ' ἄπειρον.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν λογαριάσωμεν τοῦτο τὸ κλάσμα μέχρι τοῦ τετάρτου ὅρου, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τιμή του εἶναι $1\frac{12}{29}$ ἢ $\frac{41}{29}$· εἰς τρόπον ὥςε ὁ ὡς ἔγγιςα λόγος τῆς διαγωνίου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου εἶναι :: 41 : 29. Ηθέλαμεν εὕρη πλέον ὡς ἔγγιςα λόγον λογαριάζοντες μεγαλήτερον ἀριθμὸν ὅρων.

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'.

ΤΑ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΚΑΙ ΤΟ ΜΕΤΡΟΝ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

Τὸ πολύγωνον τὸ ὁποῖον ἐνταὐτῷ εἶναι ἰσογώνιον καὶ ἰσόπλευρον, καλεῖται κανονικὸν πολύγωνον.

Υπάρχουν κανονικὰ πολύγωνα κάθε ἀριθμοῦ πλευρῶν. Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι τὸ κανονικὸν πολύγωνον τριῶν πλευρῶν· καὶ τὸ τετράγωνον, τὸ τῶν τεσσάρων.