Ἡ κάθετος δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ τριγώνου· διότι ἐὰν ἔπιπτε, παραδείγματος χάριν, εἰς Ε, τὸ τρίγωνον ΑΓΕ ἤθελεν ἔχει ἐνταυτῷ τὴν ὀρθὴν γωνίαν Ε καὶ τὴν ἀμβλεῖαν Γ, ὅπερ ἀδύνατον (19, 1)· πίπτει λοιπὸν ἐκτὸς, καὶ ἔχομεν ΒΔ = ΒΓ + ΓΔ. Ἐκ τούτου ἕπεται (πρό. 8)· $B\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + 2B\Gamma \times \Gamma\Delta$. Προσθέτοντες καὶ εἰς τὰ δύο μέρη $A\Delta^2$ καὶ κάμνοντες τὰς ἀναγωγὰς ὡς εἰς τὸ προλαβὸν θεώρημα, εὑρίσκομεν $AB^2 = B\Gamma^2 + A\Gamma^2 + 2B\Gamma \times \Gamma\Delta$.

Σχόλιον. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι τὸ μόνον εἰς τὸ ὁποῖον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς τρίτης· διότι ἐὰν ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν πλευρῶν τούτων ἦναι ὀξεῖα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των θέλει εἶναι μεγαλήτερον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς· ἐὰν δὲ ἀμβλεῖα μικρότερον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ′.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς ὁποιονδήποτε τρίγωνον ΑΒΓ, ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως ἀχθῇ ἡ γραμμὴ ΑΕ, λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AE^2 + 2BE^2$. σχ. 112.

Ἂς κατεβασθῇ ἡ κάθετος ΑΔ ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ· τὸ τρίγωνον ΑΕΓ κατὰ τὸ ΙΒ′ θεώρημα δίδει,

$$A\Gamma^2 = AE^2 + E\Gamma^2 - 2E\Gamma \times E\Delta.$$

Τὸ τρίγωνον ΑΒΕ κατὰ τὸ ΙΓ′ θεώρημα δίδει,

$$AB^2 = AE^2 + EB^2 + 2EB \times E\Delta.$$

Λοιπὸν προσθέτοντες καὶ παρατηροῦντες ὅτι ΕΒ = ΕΓ, συνάγομεν

$$\overline{ΑΒ}^2 + \overline{ΑΓ}^2 = 2\overline{ΑΕ}^2 + 2\overline{ΕΒ}^2.$$

Πόρισμα. Εἰς κάθε ἄρα παραλληλόγραμμον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων.

Διότι αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ, τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὴν στιγμὴν Ε (πρό. 31, 1)· Οὕτω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ δίδει, σχ. 113.

$$\overline{ΑΒ}^2 + \overline{ΒΓ}^2 = 2\overline{ΑΕ}^2 + 2\overline{ΒΕ}^2.$$

Τὸ τρίγωνον ΑΔΓ δίδει παρομοίως,

$$\overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΔΓ}^2 = 2\overline{ΑΕ}^2 + 2\overline{ΔΕ}^2.$$

Προσθέτοντες μέλος εἰς μέλος, καὶ παρατηροῦντες ὅτι ΒΕ = ΔΕ, συνάγομεν

$$\overline{ΑΒ}^2 + \overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΔΓ}^2 + \overline{ΒΓ}^2 = 4\overline{ΑΕ}^2 + 4\overline{ΔΕ}^2.$$

Ἀλλὰ $4\overline{ΑΕ}^2$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ· διότι ΑΓ = 2ΑΕ· παρομοίως $4\overline{ΔΕ}^2$ εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΒΔ· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ γραμμὴ ΔΕ, παραλλήλως τῆς βάσεως τριγώνου τινὸς ΑΒΓ ἀγομένη διαιρεῖ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ, ἀναλόγως· εἰς τρόπον ὥστε ΑΔ : ΒΔ :: ΑΕ : ΕΓ. σχ. 114.

Ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΒΕ, ΔΓ. Τὰ δύο τρίγωνα ΒΔΕ, ΔΕΓ ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΔΕ, καὶ τὸ ἴδιον ὕψος, διότι αἱ κορυφαὶ των Β καὶ Γ κεῖνται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου τῆς βάσεως· λοιπὸν εἶναι ἰσοδύναμα (πρό. 2).

Τὰ τρίγωνα ΑΔΕ, ΒΔΕ, τῶν ὁποίων ἡ κοινὴ κορυφὴ εἶναι Ε, ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις των ΑΔ, ΒΔ (προ. 6)· διὰ τοῦτο,

ΑΔΕ : ΒΔΕ : : ΑΔ : ΔΒ

Τὰ τρίγωνα ΑΔΕ, ΔΕΓ, τῶν ὁποίων ἡ κοινὴ κορυφὴ εἶναι Δ, ἔχουν ὡσαύτως τὸ ἴδιον ὕψος, καὶ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις των ΑΕ, ΕΓ· ἄρα,

ΑΔΕ : ΔΕΓ : : ΑΕ : ΕΓ.

Αλλὰ τὸ τρίγωνον ΒΔΕ=ΔΕΓ· λοιπὸν, ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ λόγου εἰς τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας, συνάγομεν ΑΔ : ΔΒ : : ΑΕ : ΕΓ.

Πόρισμα. Α'. Εντεῦθεν συνάγομεν συνθέτοντες ΑΔ + ΔΒ : ΑΔ : : ΑΕ + ΕΓ : ΑΕ, ἢ ΑΒ : ΑΔ : : ΑΓ : ΑΕ, καὶ παρομοίως ΑΒ : ΒΔ : : ΑΓ : ΓΕ.

Πόρισμα. Β'. Εὰν μεταξὺ δύο εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε παράλληλοι ΑΓ, ΕΖ, ΗΘ, ΒΔ, κ. τ. λ. αἱ εὐθεῖαι αὗται θέλουν τμηθῆ ἀναλόγως, καὶ θέλομεν ἔχει

ΑΕ : ΓΖ : : ΕΗ : ΖΘ : : ΗΒ : ΘΔ. σχ. 115.

Διότι ἔσω Ο τὸ σημεῖον τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ· εἰς τὸ τρίγωνον ΟΕΖ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ γραμμὴ ΑΓ εἶναι παράλληλος τῆς βάσεως ΕΖ, θέλομεν ἔχει ΟΕ : ΑΕ : : ΟΖ : ΓΖ ἢ ΟΕ : ΟΖ : : ΑΕ : ΓΖ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΟΗΘ, θέλομεν ἔχει παρομοίως ΟΕ : ΕΗ : : ΟΖ : ΖΘ, ἢ ΟΕ : ΟΖ : : ΕΗ : ΖΘ· λοιπὸν, ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ λόγου, ΟΕ : ΟΖ, αἱ δύο αὗται ἀναλογίαι δίδουν ΑΕ : ΓΖ : : ΕΗ : ΖΘ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι ΕΗ : ΖΘ : : ΗΒ : ΘΔ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· αἱ γραμμαὶ ἄρα ΑΒ, ΓΔ τέμνονται ἀναλόγως ὑπὸ τῶν παραλλήλων ΕΖ, ΗΘ κ. τ. λ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙϚʹ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Αντιςρόφως ἐὰν αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, τμηθῶσιν ἀναλόγως ὑπὸ τῆς γραμμῆς ΔΕ, εἰς τρόπον ὥςε ΑΔ : ΔΒ :: ΑΕ : ΕΓ, λέγω ὅτι ἡ γραμμὴ ΔΕ θέλει εἶναι παράλληλος τῆς βάσεως ΒΓ.

Διότι ἐὰν ΔΕ δὲν ἦναι παράλληλος τῆς ΒΓ, ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι ἡ ΔΟ· τότε, κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα, θέλομεν ἔχει ΑΔ : ΒΔ :: ΑΟ : ΟΓ. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, ΑΔ : ΔΒ :: ΑΕ : ΕΓ· λοιπὸν ἤθελαμεν ἔχει ΑΟ : ΟΓ :: ΑΕ : ΕΓ· ἀναλογία ἀνύπαρκτος· διότι ἀπὸ τὸ ἓν μέρος ὁ ἡγούμενος ΑΕ εἶναι μείζων τοῦ ΑΟ, ἀπὸ τὸ ἄλλο ὁ ἑπόμενος ΕΓ εἶναι ἐλάσσων τοῦ ΟΓ· ἐὰν λοιπὸν διὰ τῆς ςιγμῆς Δ ἀχθῇ παράλληλος τῆς ΒΓ, αὐτὴ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ διαφέρῃ τῆς ΔΕ· ἡ ΔΕ ἄρα εἶναι ἡ τοιαύτη παράλληλος.

Σχόλιον. Η ἰδία συνέπεια ἤθελεν ἔχει χώραν ἐὰν ὑπετίθετο ἡ ἀναλογία ΑΒ : ΑΔ :: ΑΓ : ΑΕ. διότι ἐκ ταύτης ἤθελε συναχθῇ ἡ ΑΒ—ΑΔ : ΑΔ :: ΑΓ—ΑΕ : ΑΕ ἢ ΒΔ : ΑΔ :: ΓΕ : ΑΕ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖʹ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Η γραμμὴ ΑΔ, ἡ δίχα τέμνουσα τὴν γωνίαν ΒΑΓ ἑνὸς τριγώνου, διαιρεῖ τὴν βάσιν ΒΓ εἰς δύο τμήματα ΒΔ, ΔΓ, ἀνάλογα τῶν προσκειμένων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ· εἰς τρόπον ὥςε ΒΔ : ΔΓ :: ΑΒ : ΑΓ. σχ. 117.

Εκ τῆς ςιγμῆς Γ ἄς ἀχθῇ ἡ ΓΕ παράλληλος τῆς ΑΔ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΒΑ προεκβαλλομένην.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΓΕ, ἡ ΑΔ εἶναι παράλληλος τῆς βάσεως ΓΕ· οὕτως ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν (προ. ιε),

ΒΔ : ΔΓ :: ΑΒ : ΑΕ,

Αλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΓΕ εἶναι ἰσοσκελὲς· διότι, ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ΑΔ, ΓΕ, ἡ γωνία ΑΓΕ=ΔΑΓ, καὶ ἡ γωνία ΑΕΓ=ΒΑΔ (πρό. 24, 1). Τώρα, ἐξ ὑποθέσεως ΔΑΓ=ΒΑΔ· ἡ γωνία ἄρα ΑΓΕ=ΑΕΓ. καὶ ἀκολούθως ΑΕ=ΑΓ (πρό. 13, 1)· ἀντεισάγοντες λοιπὸν ΑΓ ἀντὶ ΑΕ εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀναλογίαν, συνάγομεν

ΒΔ : ΔΓ : : ΑΒ : ΑΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο τρίγωνα ἰσογώνια ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους καὶ εἶναι ὅμοια.

Εςωσαν ΑΒΓ, ΓΔΕ, δύο τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, δηλαδὴ ΒΑΓ=ΓΔΕ, ΑΒΓ=ΔΓΕ, καὶ ΑΓΒ=ΔΕΓ· λέγω ὅτι αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἢ προσκείμεναι εἰς τὰς ἴσας γωνίας θέλουν εἶναι ἀνάλογοι, εἰς τρόπον ὥςε ΒΓ : ΓΕ : : ΑΒ : ΓΔ : : ΑΓ : ΔΕ. σχ. 119.

Ας τεθῶσιν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ΒΓ, ΓΕ εἰς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, καὶ ἂς προεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ ΒΑ, ΕΔ, ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Ζ.

Επειδὴ ΒΓΕ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ, καὶ ἡ γωνία ΒΓΑ=ΓΕΔ, ἕπεται ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος τῆς ΔΕ (24, 1). Παρομοίως, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΒΓ=ΔΓΕ, ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῆς ΔΓ· λοιπὸν τὸ σχῆμα ΑΓΔΖ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΖΕ ἡ ΑΓ εἶναι παράλληλος τῆς βάσεως ΖΕ, ὅθεν ΒΓ : ΓΕ : : ΒΑ : ΑΖ (πρό. 15). Αντὶ ΑΖ θέτοντες τὴν ἴσην τῆς ΓΔ, ἔχομεν,

ΒΓ : ΓΕ : : ΒΑ : ΓΔ.

Εἰς τὸ αὐτὸ τρίγωνον ΒΖΕ, ἐὰν ἡ ΒΖ θεωρηθῇ ὡς βάσις, ἡ ΓΔ εἶναι παράλληλος αὐτῆς, καὶ ἐκ τούτου ΒΓ : ΓΕ : : ΖΔ : ΔΕ. Αντὶ ΖΔ θέτοντες τὴν ἴσην τῆς ΑΓ ἔχομεν

ΒΓ : ΓΕ : : ΑΓ : ΔΕ.

Τέλος ἐκ τῶν δύο τούτων ἀναλογιῶν εἰς τὰς ὁποίας ὁ λόγος ΒΓ : ΓΕ εἶναι κοινὸς, συνάγομεν ὡσαύτως,

ΑΓ : ΔΕ : : ΒΑ : ΓΔ.

Λοιπὸν τὰ ἰσογώνια τρίγωνα ΒΑΓ, ΓΔΕ ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους : ἀλλὰ κατὰ τὸν Β'. Ορισμὸν, δύο σχήματα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν ἐνταυτῷ τὰς γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· ἄρα τὰ ἰσογώνια τρίγωνα ΒΑΓ, ΓΔΕ, εἶναι δύο σχήματα ὅμοια.

Πόρισμα. Διὰ νὰ ἦναι δύο τρίγωνα ὅμοια, ἀρκεῖ νὰ ἔχουν δύο γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, διότι τότε ἡ ἰσότης τῆς τρίτης ἕπεται, καὶ τὰ δύο τρίγωνα θέλουν εἶναι ἰσογώνια.

Σχόλιον. Ας σημειώσωμεν ὅτι, εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα, αἱ ὁμόλογαι πλευραὶ εἶναι ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν· οὕτως οὔσης τῆς γωνίας ΑΓΒ ἴσης μὲ τὴν ΔΕΓ, ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι ὁμόλογος τῆς ΔΓ· ὡσαύτως ΑΓ καὶ ΔΕ εἶναι ὁμόλογαι ὡς ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν ΑΒΓ,ΔΓΕ : ἀφ' οὗ γνωρίσωμεν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς, εὐθὺς σχηματίζομεν τὰς ἀναλογίας : ΑΒ : ΔΓ : : ΑΓ : ΔΕ : : ΒΓ : ΓΕ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους, εἶναι ἰσογώνια καὶ ὅμοια.

Ας ὑποθέσωμεν ὅτι ΒΓ : ΕΖ : : ΑΒ : ΔΕ : : ΑΓ : ΔΖ· λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, θέλουν ἔχει τὰς γωνίας ἴσας, δηλαδὴ, Α=Δ, Β=Ε, Γ=Ζ. σχ. 120.

Εἰς τὴν στιγμὴν Ε ἄς γένῃ ἡ γωνία ΖΕΗ=Β, καὶ εἰς τὴν στιγμὴν Ζ ἡ γωνία ΕΖΗ=Γ, ἡ τρίτη Η θέλει εἶναι ἴση τῇ τρίτῃ Α, καὶ τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΕΖΗ, θέλουν εἶναι ἰσογώνια· λοιπὸν κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα ΒΓ : ΕΖ : : ΑΒ : ΕΗ· Αλλὰ, ἐξ ὑποθέσεως, ΒΓ : ΕΖ : :

ΑΒ : ΔΕ· ἄρα ΕΗ = ΔΕ. Κατὰ τὸ ἴδιον θεώρημα, ΒΓ : ΕΖ : : ΑΓ : ΗΖ· ἀλλὰ, ἐξ ὑποθέσεως, ΒΓ : ΕΖ : : ΑΓ : ΔΖ, ἄρα ΖΗ = ΔΖ. Λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΕΗΖ, ΔΕΖ, ἔχουν τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν ἄρα εἶναι ἴσα (πρό. ΙΙ, Ι). Ἀλλ' ἐκ τῆς κατασκευῆς, τὸ τρίγωνον ΕΗΖ εἶναι ἰσογώνιον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ· λοιπὸν ὡσαύτως τὰ τρίγωνα ΔΕΖ, ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνια καὶ ὅμοια.

Σχόλιον. Α΄. Ἀπὸ τὰς δύο ταύτας τελευταίας προτάσεις, βλέπομεν ὅτι εἰς τὰ τρίγωνα, ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν εἶναι συνέπεια τῆς ἀναλογίας τῶν πλευρῶν, καὶ ἀντιςρόφως, εἰς τρόπον ὥςε μία τούτων τῶν συνθηκῶν ἀρκεῖ πρὸς βεβαίωσιν τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων. Δὲν ὑπάρχει τὸ αὐτὸ εἰς τὰ σχήματα τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι περισσότεραι ἀπὸ τρεῖς· διότι, ἐὰν ὁ λόγος ἦναι μόνον περὶ τετραπλεύρων, ἠμποροῦμεν, χωρὶς νὰ ἀλλάξωμεν τὰς γωνίας, νὰ μεταβάλλωμεν τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν, ἢ χωρὶς νὰ μεταβάλλωμεν τὰς πλευρὰς νὰ ἀλλάξωμεν τὰς γωνίας. Οὕτως ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἦναι συνέπεια τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν, καὶ τ' ἀνάπαλιν. Βλέπομεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΕΖ παράλληλος τῆς ΒΓ, αἱ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΑΕΖΔ εἶναι μὲν ἴσαι μὲ τὰς τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ· ἀλλ' ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν διαφέρει: ὡσαύτως χωρὶς νὰ ἀλλάξωμεν τὰς τέσσαρας πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΑΔ ἠμποροῦμεν νὰ μεταβάλλωμεν τὰς γωνίας πλησιάζοντες ἢ ἀποκρύνοντες τὸ σημεῖον Β ἀπὸ τὸ Δ. σχ. ΙΑΙ.

Σχόλιον. Β΄. Αἱ δύο προηγούμεναι προτάσεις αἱ ὁποῖαι κυρίως δὲν κάμνουν παρὰ μίαν, καὶ ἡ τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης εἶναι αἱ ἀξιολογώτεραι καὶ γονιμώτεραι προτάσεις τῆς Γεωμετρίας· ἀρκοῦσι σχεδὸν μόναι δι' ὅλας τὰς ἐφαρμογὰς καὶ τὴν λύσιν ὅλων τῶν προβλημάτων· ὁ λόγος εἶναι ὅτι ὅλα τὰ σχήματα ἠμποροῦν νὰ μοιρασθοῦν εἰς τρίγωνα, καὶ ὁποιονδήποτε τρίγωνον εἰς δύο τρίγωνα ὀρθογώνια. Οὕτως αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῶν τριγώνων περιέχουσι συνεπτυγμένως (implicitment) τὰς ἰδιότητας ὅλων τῶν σχημάτων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων, εἶναι ὅμοια.

Ἔστω ἡ γωνία Α=Δ, καὶ ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν ΑΒ:ΔΕ::ΑΓ:ΔΖ, λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΔΕΖ. σχ. 122.

Ας ληφθῇ ΑΗ=ΔΕ καὶ ἄς ἀχθῇ ἡ ΗΘ παράλληλος τῆς ΒΓ, ἡ γωνία ΑΗΘ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΑΒΓ (πρότ. 24, 1)· καὶ τὸ τρίγωνον ΑΗΘ ἰσογώνιον μὲ τὸ ΑΒΓ· θέλομεν ἔχει λοιπὸν ΑΒ:ΑΗ::ΑΓ:ΑΘ· Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, ΑΒ:ΔΕ::ΑΓ:ΔΖ, καὶ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ΑΗ=ΔΕ· λοιπὸν ΑΘ=ΔΖ. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΗΘ, ΔΕΖ ἔχουν λοιπὸν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων· ἄρα εἶναι ἴσα. Τώρα τὸ τρίγωνον ΑΗΘ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΓ· λοιπὸν ΔΕΖ εἶναι ὡσαύτως ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς παραλλήλους, ἢ καθέτους τὴν κάθε μίαν εἰς τὴν κάθε μίαν, εἶναι ὅμοια.

Διότι 1.ον, ἐὰν ἡ πλευρὰ ΑΒ ἦναι παράλληλος τῆς ΔΕ, καὶ ΒΓ τῆς ΕΖ, ἡ γωνία ΑΒΓ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΔΕΖ (27, 1)· ἐὰν περιπλέον ΑΓ ἦναι παράλληλος τῆς ΔΖ, ἡ γωνία ΑΓΒ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΔΖΕ καὶ ὡσαύτως ἡ

ΒΑΓ τῇ ΕΔΖ: τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ἰσογώνια· ἄρα καὶ ὅμοια. σχ. 123.

2.ον Ἔσω ἡ πλευρὰ ΔΕ κάθετος εἰς τὴν ΑΒ, καὶ ἡ ΔΖ εἰς τὴν ΑΓ· εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΙΔΘ αἱ δύο γωνίαι Ι καὶ Θ θέλουν εἶναι ὀρθαί· αἱ τέσσαρες γωνίαι ἰσοδυναμοῦν ὁμοῦ μὲ τέσσαρας ὀρθὰς (20, 1)· λοιπὸν αἱ δύο ὑπόλοιποι ΙΑΘ, ΙΔΘ, ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο ὀρθάς. Ἀλλ' αἱ δύο γωνίαι ΕΔΖ, ΙΔΘ ἰσοδυναμοῦν ὡσαύτως μὲ δύο ὀρθάς· λοιπὸν ἡ γωνία ΕΔΖ εἶναι ἴση τῇ ΙΑΘ ἢ τῇ ΒΑΓ· παρομοίως ἐὰν ἡ τρίτη πλευρὰ ΕΖ ἦναι κάθετος εἰς τὴν τρίτην ΒΓ, θέλομεν δείξει ὅτι ἡ γωνία ΔΖΕ=Γ, καὶ ΔΕΖ=Β· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς πλευρὰς καθέτους τὴν κάθε μίαν εἰς τὴν κάθε μίαν, εἶναι ἰσογώνια καὶ ὅμοια. σχ. 124.

Σχόλιον. Εἰς τὴν πρώτην περίςασιν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι αἱ παράλληλοι· εἰς τὴν δευτέραν, εἶναι αἱ κάθετοι. Οὕτως εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίςασιν, ΔΕ εἶναι ὁμόλογος τῇ ΑΒ, ΔΖ τῇ ΑΓ, καὶ ΕΖ τῇ ΒΓ.

Εἰς τὴν περίςασιν καθ' ἣν αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι τὰ δύο τρίγωνα δυνατὸν νὰ ἔχωσι μίαν θέσιν διαφορετικὴν τῆς ὑποτεθείσης εἰς τὸ σχῆμα 124, ἀλλ' ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν πάντοτε ἤθελεν ἀποδειχθῇ εἴτε διὰ τετραπλεύρων τοιούτων ὡς ΑΙΔΘ, τῶν ὁποίων δύο γωνίαι εἶναι ὀρθαί, εἴτε διὰ τῆς συγκρίσεως δύο τριγώνων, ἕκαςον τῶν ὁποίων ἐκτὸς τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν, ἤθελεν ἔχει μίαν γωνίαν ὀρθήν: ἔπειτα, πάντοτε εἶναι δυνατὸν νὰ ὑποθέσωμεν ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευασμένον τρίγωνόν τι ΔΕΖ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ ἦναι παράλληλοι τῶν πλευρῶν τοῦ συγκρινομένου τριγώνου μὲ τὸ ΑΒΓ, καὶ τότε ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὡς εἰς τὴν περίςασιν τοῦ 124 σχήματος.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ'.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν τριγώνου τινὸς ἀχθῶσιν εἰς τὴν βάσιν ὁποιαδήποτε εὐθεῖαι ὡς ΑΖ, ΑΗ, κ. τ. λ. αὗται θέλουσι διαιρεῖ τὴν βάσιν ΒΓ καὶ τὴν παράλληλόν της ΔΕ ἀναλόγως, εἰς τρόπον ὥςε ΔΙ : ΒΖ : : ΙΚ' : ΖΗ : : Κ'Λ : ΗΘ, κ. τ. λ. σχ. 125.

Διότι, ἐπειδὴ ΔΙ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΖ, τὸ τρίγωνον ΑΔΙ εἶναι ἰσογώνιον μὲ τὸ ΑΒΖ, καὶ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΔΙ : ΒΖ : : ΑΙ : ΑΖ; ὡσαύτως ΙΚ' οὔσης παραλλήλου τῆς ΖΗ, ἔχομεν ΑΙ : ΑΖ : : ΙΚ' : ΖΗ· λοιπὸν, ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ λόγου ΑΙ : ΑΖ, ΔΙ : ΒΖ : : ΙΚ' : ΖΗ· εὑρίσκομεν παρομοίως ΙΚ' : ΖΗ : : Κ'Λ : ΗΘ, κ. τ. λ· λοιπὸν ἡ γραμμὴ ΔΕ διαιρεῖται εἰς τὰ σημεῖα Ι, Κ', Λ ὡς ἡ βάσις ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Ζ, Η, Θ.

Πόρισμα. Ἄρα, ἐὰν ΒΓ διαιρεθῇ εἰς μέρη ἴσα εἰς τὰς ςιγμὰς Ζ, Η, Θ, ἡ παράλληλος ΔΕ θέλει διαιρεθῇ ὡσαύτως εἰς μέρη ἴσα εἰς τὰς ςιγμὰς Ι, Κ', Λ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ'.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας Α ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου κατεβασθῇ ἡ κάθετος ΑΔ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης. σχ. 126.

1.ον Τὰ δύο μερικὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ θέλουν εἶναι ὅμοια ἀλλήλοις καὶ ὅμοια τῷ ὅλῳ ΑΒΓ.

2.ον Εκάςη πλευρὰ ΑΒ ἢ ΑΓ θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ καὶ τοῦ προσκειμένου τμήματος ΒΔ ἢ ΔΓ.

3.ον Η κάθετος ΑΔ θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων ΒΔ, ΔΓ.

Διότι, 1.ον τὸ τρίγωνον ΒΑΔ καὶ τὸ τρίγωνον ΒΑΓ ἔχουν κοινὴν γωνίαν τὴν Β, περιπλέον ἡ ὀρθὴ ΒΔΑ εἶναι ἴση τῇ ὀρθῇ ΒΑΓ· λοιπὸν ἡ τρίτη γωνία ΒΑΔ τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴση μὲ τὴν τρίτην Γ τοῦ ἄλλου· ἄρα τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἰσογώνια καὶ ὅμοια· ὡσαύτως θέλομεν δείξει ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΑΓ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΒΑΓ· λοιπὸν τὰ τρία τρίγωνα εἶναι ἰσογώνια καὶ ὅμοια ἀλλήλοις.

2.ον Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΒΑΔ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΒΑΓ, αἱ ὁμόλογοί των πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι. Τώρα, ἡ πλευρὰ ΒΔ εἰς τὸ μικρὸν τρίγωνον εἶναι ὁμόλογος τῇ ΒΑ εἰς τὸ μεγάλον, διότι εἶναι ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν, ΒΑΔ, ΒΓΑ· ἡ ὑποτείνουσα ΒΑ τοῦ μικροῦ εἶναι ὁμόλογος τῇ ὑποτεινούσῃ ΒΓ τοῦ μεγάλου· δυνάμεθα λοιπὸν νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἀναλογίαν ΒΔ : ΒΑ :: ΒΑ : ΒΓ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἠθέλαμεν ἔχει ΔΓ : ΑΓ :: ΑΓ : ΒΓ· λοιπὸν 2ον ἑκάστη τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ προσκειμένου εἰς ταύτην τὴν πλευρὰν τμήματος.

3.ον Τέλος, ἡ ὁμοιότης τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΑΔΓ δίδει, παραβαλλομένων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ΒΔ : ΑΔ :: ΑΔ : ΔΓ· λοιπόν, 3.ον ἡ κάθετος ΑΔ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν τμημάτων ΒΔ, ΔΓ τῆς ὑποτεινούσης.

Σχόλιον. Εἰς τὴν ἀναλογίαν ΒΔ : ΑΒ :: ΑΒ : ΒΓ ἐξισοῦντες τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων μὲ τὸ τῶν μέσων συνάγομεν $\overline{AB}^2 = B\Delta \times B\Gamma$. Ἔχομεν παρομοίως $\overline{A\Gamma}^2 = \Delta\Gamma \times B\Gamma$, λοιπὸν $\overline{AB}^2 + \overline{A\Gamma}^2 = B\Delta \times B\Gamma + \Delta\Gamma \times B\Gamma$· τὸ δεύτερον μέλος εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ $(B\Delta + \Delta\Gamma) \times B\Gamma$ καὶ ἄγεται εἰς $B\Gamma \times B\Gamma$ ἢ $\overline{B\Gamma}^2$· ἄρα $\overline{AB}^2 + \overline{A\Gamma}^2 = \overline{B\Gamma}^2$· λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἄλλων δύο πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ. Οὕτως ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν πρότασιν τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης διὰ μιᾶς ὁδοῦ πολλὰ διαφορετικῆς ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν· ὅθεν βλέπομεν ὅτι κυρίως ἡ πρότασις τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης εἶναι συνέπεια τῆς ἀναλογίας τῶν πλευρῶν εἰς τὰ ἰσογώνια τρίγωνα. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον αἱ θεμελιώδεις προτάσεις τῆς Γεωμετρίας ἄγονται, διὰ νὰ εἴπω οὕτω, εἰς ταὐτὸν μόνην, ὅτι τὰ ἰσογώνια τρίγωνα ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους.

Συχνάκις ἀκολουθεῖ, καθὼς εἴδομεν ἀνωτέρω τούτου παράδειγμα, ἐξάγοντες συνεπείας ἀπὸ μίαν ἢ περισσοτέρας προτάσεις, νὰ καταντῶμεν εἰς προτάσεις ἀποδεδειγμένας. Ἐν γένει, ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον μάλιστα χαρακτηρίζει τὰ θεωρήματα τῆς γεωμετρίας, καὶ εἶναι δεῖξις ἰσχυροτάτη τῆς βεβαιότητός των, εἶναι ὅτι συμπλέκοντές τα καθ' ὁποιονδήποτε τρόπον, φθάνει νὰ συλλογιζώμεθα ὀρθῶς, πάντοτε καταντοῦμεν εἰς ἀκριβῆ ἐξαγόμενα. Τοῦτο δὲν ἤθελεν ὑπάρχει ἐὰν καμμία πρότασις ἦτον ψευδής, ἢ ἦτον ἀληθὴς ὡς ἔγγιστα, καὶ διὰ τῆς συμπλοκῆς τῶν προτάσεων πρὸς ἀλλήλας τὸ σφάλμα ἤθελεν αὐξάνει καὶ κατασταθῆ ἐπαισθητόν. Τούτου δὲ βλέπομεν παραδείγματα εἰς ὅλας τὰς ἀποδείξεις εἰς τὰς ὁποίας μεταχειριζόμεθα τὴν εἰς τὸ ἄτοπον ἀπαγωγὴν (reduction à l'asburde). Διὰ τῶν τοιούτων ἀποδείξεων βεβαιόνεται ἡ ἀλήθεια μιᾶς προτάσεως ἐκ τοῦ ἀτόπου τὸ ὁποῖον ἤθελεν ἀκολουθήσει ἐὰν ὑπῆρχε τὸ ἐναντίον, συνίστανται λοιπὸν αἱ ἀποδείξεις αὗται εἰς τὸ νὰ καταστήσουν φανερὸν τὸ τοιοῦτον ἄτοπον. Οὕτω, παραδείγματος χάριν, βεβαιόνομεν ὅτι δύο ποσότητες εἶναι ἴσαι, ἀποδεικνύοντες ὅτι ἐὰν ὑπῆρχε ἡ παραμικρὰ ἀνισότης μεταξὺ αὐτῶν ἠθέλαμεν φθάσει διὰ μιᾶς σειρᾶς συλλογισμῶν εἰς ἄτοπον φανερὸν καὶ διὰ νὰ εἴπω οὕτω, ψηλαφητόν· ὅθεν ἀναγκαζόμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι αἱ δύο ποσότητες εἶναι ἴσαι.

Πόρισμα. Εὰν ἐξ ἑνὸς σημείου Α τῆς περιφερείας ἀχθῶσιν αἱ δύο χορδαὶ ΑΒ, ΑΓ εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου ΒΓ, τὸ τρίγωνον ΒΑΓ θέλει εἶναι ὀρθογώνιον εἰς Α (18, 2)· λοιπὸν 1ον ἡ κάθετος ΑΔ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων ΒΔ, ΔΓ, τῆς διαμέτρου, ἤ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, τὸ τετράγωνον $\overline{ΑΔ}^2$ ἰσοῦται μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΒΔ×ΔΓ.

2ον Η χορδὴ ΑΒ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς διαμέτρου ΒΓ καὶ τοῦ προσκειμένου τμήματος ΒΔ, ἤ, $\overline{ΑΒ}^2 = ΒΔ \times ΒΓ$· ἔχομεν παρομοίως $\overline{ΑΓ}^2 = ΓΔ \times ΒΓ$· λοιπὸν $\overline{ΑΒ}^2 : \overline{ΑΓ}^2 :: ΒΔ : ΔΓ$· ἐπειδὴ δὲ $\overline{ΑΒ}^2 = ΒΔ \times ΒΓ$, καὶ $\overline{ΑΒ}^2 \times ΒΓ = ΒΔ \times \overline{ΒΓ}^2$ διὰ τοῦτο $\overline{ΑΒ}^2 : \overline{ΒΓ}^2 :: ΒΔ : ΒΓ$· ὡσαύτως $\overline{ΑΓ}^2 : \overline{ΒΓ}^2 :: ΔΓ : ΒΓ$. Οἱ λόγοι οὗτοι τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν εἴτε πρὸς ἄλληλα εἴτε πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης, ἐδόθησαν εἰς τὰ πορίσματα Γ΄ καὶ Δ΄ τῆς ΙΑ΄ προτάσεως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ΄.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὀρθογώνια τῶν πλευρῶν αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὴν ἴσην γωνίαν. Οὕτως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΔΕ καθὼς τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ× ΑΓ πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΔ×ΑΕ. σχ. 128.

Ας ἐπιζευχθῇ ΒΕ. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΕ, ΑΔΕ, τῶν ὁποίων ἡ κοινὴ κορυφὴ εἶναι Ε, ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις των ΑΒ, ΑΔ (πρό. 6) λοιπὸν, ΑΒΕ : ΑΔΕ : : ΑΒ : ΑΔ.
ἔχομεν ὡσαύτως, ΑΒΓ : ΑΒΕ : : ΑΓ : ΑΕ.

Πολλαπλασιάζοντες κατὰ τάξιν τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας, καὶ ἐξαλείφοντες τὸν κοινὸν ὅρον ΑΒΕ, ἔχομεν

ΑΒΓ : ΑΔΕ : : ΑΒ × ΑΓ : ΑΔ × ΑΕ.

Πόρισμα. Ἄρα τὰ δύο τρίγωνα θέλουν εἶναι ἰσοδύναμα, ἐὰν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ × ΑΓ ἰσοῦται μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΑΔ × ΑΕ, ἢ ἐὰν ἔχωμεν ΑΒ : ΑΔ : : ΑΕ : ΑΓ, τὸ ὁποῖον ἔχει χώραν ὅταν ἡ ΔΓ ἦναι παράλληλος τῆς ΒΕ. (βλέπε τὸ β'. τῶν δύο σχημάτων, 128).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ὅμοια τρίγωνα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. α.

Ἔστω ἡ γωνία Α = Δ καὶ ἡ Β = Ε· κατὰ πρῶτον ἐξ αἰτίας τῶν ἴσων γωνιῶν Α καὶ Δ, ἔχομεν, κατὰ τὴν προλαβοῦσαν πρότασιν, σχ. 122.

ΑΒΓ : ΔΕΖ : : ΑΒ × ΑΓ : ΔΕ × ΔΖ.

ἔπειτα, ἐξ αἰτίας τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων,

ΑΒ : ΔΕ : : ΑΓ : ΔΖ,

Καὶ ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ταύτην τὴν ἀναλογίαν ἐπὶ τὴν ταυτοσήμαντον

ΑΓ : ΔΖ : : ΑΓ : ΔΖ

ὅρον ἐπὶ ὅρον, συνάγομεν,

$$\text{ΑΒ} \times \text{ΑΓ} : \text{ΔΕ} \times \text{ΔΖ} : : \overline{\text{ΑΓ}}^2 : \overline{\text{ΔΖ}}^2$$

Ἄρα,

$$\text{ΑΒΓ} : \text{ΔΕΖ} : : \overline{\text{ΑΓ}}^2 : \overline{\text{ΔΖ}}^2.$$

Τὰ δύο λοιπὸν ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΑΓ, ΔΖ, ἢ ὡς τὰ τετράγωνα δύο ἄλλων ὁποιωνδήποτε ὁμολόγων πλευρῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚϚ'.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ὅμοια πολύγωνα σύγκεινται ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων.

Εἰς τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, ἄς ἀχθῶσιν ἀπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν Α εἰς τὰς ἄλλας γωνίας αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΑΔ. Εἰς τὸ ἄλλο πολύγωνον ΖΗΘΙΚ ἄς ἀχθῶσι παρομοίως ἀπὸ τὴν γωνίαν Ζ τὴν ὁμόλογον τῇ Α, αἱ διαγώνιοι ΖΘ, ΖΙ εἰς τὰς ἄλλας γωνίας. σχ. 129.

Επειδὴ τὰ πολύγωνα εἶναι ὅμοια, ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση τῇ ὁμολόγῳ τῆς ΖΗΘ (ὁρ. 2), καὶ περιπλέον αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, εἶναι ἀνάλογοι μὲ τὰς ΖΗ, ΗΘ· εἰς τρόπον ὥςε ΑΒ : ΖΗ : : ΒΓ : ΗΘ. Εκ τούτου ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΖΗΘ, ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων· λοιπὸν εἶναι ὅμοια (πρό. 20)· ἡ γωνία ἄρα ΒΓΑ εἶναι ἴση τῇ ΗΘΖ. Εὰν αἱ ἴσαι αὗται γωνίαι ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τὰς ἴσας ΒΓΔ, ΗΘΙ, τὰ ὑπόλοιπα ΑΓΔ, ΖΘΙ θέλουν εἶναι ἴσα: ἀλλ' ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ,ΖΗΘ εἶναι ὅμοια, ἔχομεν ΑΓ : ΖΘ : : ΒΓ : ΗΘ· ἀπὸ ἄλλο μέρος διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων (ὁρ. 2), ΒΓ : ΗΘ : : ΓΔ : ΘΙ· λοιπὸν ΑΓ : ΖΘ : : ΓΔ : ΘΙ: ἀλλ' εἴδομεν ἤδη ὅτι ἡ γωνία ΑΓΔ = ΖΘΙ· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΓΔ, ΖΘΙ, ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων, ἄρα εἶναι ὅμοια. Μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον ἠθέλαμεν ἀποδείξει τὴν ὁμοιότητα τῶν ἀκολούθων τριγώνων, ὅσος δήποτε καὶ ἂν ἦτον ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν προτεθέντων πολυγώνων· ἄρα δύο ὅμοια πολύγωνα σύγκεινται ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων.

Σχόλιον. Η ἀντίςροφος πρότασις εἶναι ἐπίσης ἀληθής: ἐὰν δύο πολύγωνα συντίθενται ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων, θέλουν εἶναι ὅμοια.

Διότι ἡ ὁμοιότης τῶν τριγώνων ἤθελε δώσει τὴν γωνίαν ΑΒΓ = ΖΗΘ, ΒΓΑ = ΗΘΖ, ΑΓΔ = ΖΘΙ· ἄρα ΒΓΔ = ΗΘΙ, ὡσαύτως ΓΔΕ = ΘΙΚ' κ. τ. λ. Περιπλέον, ΑΒ : ΖΗ : : ΒΓ : ΗΘ : : ΑΓ : ΖΘ : : ΓΔ : ΘΙ, κ. τ. λ. λοιπὸν τὰ δύο πολύγωνα ἔχουν τὰς γωνίας ἴσας καὶ τὰς πλευρὰς ἀναλόγους· ἄρα εἶναι ὅμοια.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Αἱ μὲν περίμετροι τῶν ὁμοίων πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ὁμόλογοι πλευραί· αἱ δὲ ἐπιφάνειαί των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἰδίων πλευρῶν.

Διότι 1.ον ἐπειδὴ, ἐκ τῆς φύσεως τῶν ὁμοίων σχημάτων, ἔχομεν ΑΒ : ΖΗ : : ΒΓ : ΗΘ : : ΓΔ : ΘΙ, κ. τ. λ. συνάγομεν ἐκ ταύτης τῆς σειρᾶς τῶν ἴσων λόγων: Τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ κ. τ. λ, περίμετρος τοῦ πρώτου σχήματος, λόγον ἔχει πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων περίμετρον τοῦ δευτέρου σχήματος, ὃν ἡγούμενός τις πρὸς τὸν ἴδιον ἑπόμενον, ἢ ὃν ἡ πλευρὰ ΑΒ πρὸς τὴν ὁμόλογόν της ΖΗ. σχ. 129.

2.ον Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΖΗΘ εἶναι ὅμοια, ἔχομεν (πρό. 25) ΑΒΓ : ΖΗΘ : : $\overline{\text{ΑΓ}}^2$: $\overline{\text{ΖΘ}}^2$· ὡσαύτως τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΓΔ, ΖΘΙ, δίδουν ΑΓΔ : ΖΘΙ : : $\overline{\text{ΑΓ}}^2$: $\overline{\text{ΖΘ}}^2$· ἄρα ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ λόγου $\overline{\text{ΑΓ}}^2$: $\overline{\text{ΖΘ}}^2$, ἔχομεν

ΑΒΓ : ΖΗΘ : : ΑΓΔ : ΖΘΙ

Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ ἠθέλαμεν εὕρη.

ΑΓΔ : ΖΘΙ : : ΑΔΕ : ΖΙΚ'.

καὶ οὕτως ἐφεξῆς, ἐὰν εἴχαμεν μεγαλήτερον ἀριθμὸν τριγώνων. Ἐκ ταύτης τῆς σειρᾶς τῶν ἴσων λόγων συνάγομεν: Τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων ΑΒΓ + ΑΓΔ + ΑΔΕ, ἢ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, λόγον ἔχει πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων ZHΘ + ZΘI + ZIK′, ἢ πρὸς τὸ πολύγωνον ZHΘIK′, ὃν ἡγούμενός τις ABΓ πρὸς τὸν ἴδιον ἑπόμενον, ἢ ὃν $\overline{AB}^2$ πρὸς $\overline{ZH}^2$· ἄρα αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ὁμοίων πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Πόρισμα. Ἐὰν κατασκευασθῶσι τρία ὅμοια σχήματα τῶν ὁποίων αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ νὰ ἦναι ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς πλευρὰς ὀρθογωνίου τινὸς τριγώνου, τὸ ἐπὶ τῆς μεγαλητέρας πλευρᾶς κατασκευαζόμενον θέλει ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων· διότι τὰ τρία ταῦτα σχήματα εἶναι ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των· ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν· ἄρα κ. τ. λ. (1).

---

(1) Ἔστωσαν AΓ, AB, BΓ αἱ τρεῖς πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου ἐκ τῶν ὁποίων AΓ εἶναι ἡ ὑποτείνουσά του· X δὲ φαριστάνῃ τὸ κατασκευαζόμενον σχῆμα ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης AΓ, ὅμοιον μὲ τὰ κατασκευαζόμενα ἐπὶ τῶν ἄλλων δύο πλευρῶν AB, BΓ ὁμολόγων τῆς AΓ, καὶ παριστάνομενα διὰ τῶν χαρακτήρων Ψ, Ω. Κατὰ τὴν ἀνωτέρω πρότασιν ἔχομεν,

$$\Psi : \Omega :: \overline{AB}^2 : \overline{B\Gamma}^2$$

Ὅθεν $$\Psi + \Omega : \overline{AB}^2 + \overline{B\Gamma}^2 :: \Omega : \overline{B\Gamma}^2.$$

Ἀλλὰ $$X : \overline{A\Gamma}^2 : \Omega : \overline{B\Gamma}^2.$$

Ἄρα $$\Psi + \Omega : \overline{AB}^2 + \overline{B\Gamma}^2 :: X : \overline{A\Gamma}^2$$

ἐπειδὴ δὲ $\overline{A\Gamma}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{B\Gamma}^2$· ἄρα $X = \Psi + \Omega$· λοιπὸν κ. τ. λ.—— O. M.