(17, 2) καὶ ἐὰν ΔΟ ἦναι τὸ κοινὸν μέτρον τῶν τόξων, ΑΔΟ θέλει εἶναι τὸ τῶν γωνιῶν.

Σχόλιον. Δυνάμεθα παρομοίως νὰ εὕρωμεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν μιᾶς γωνίας συγκρίνοντες τὸ τόξον ὁποῦ μετρεῖ αὐτὴν μὲ ὅλην τὴν περιφέρειαν: ἐὰν π. χ. τὸ τόξον ΓΔ ἦναι πρὸς τὴν περιφέρειαν ὡς 3 πρὸς 25, ἡ γωνία Α θέλει εἶναι τὰ $\frac{3}{25}$ τεσσάρων ὀρθῶν, ἢ τὰ $\frac{12}{25}$ τῆς ὀρθῆς.

Δυνατὸν νὰ ἀκολουθήσῃ ὁποῦ τὰ συγκρινόμενα τόξα νὰ μὴ ἔχουν κοινὸν μέτρον· τότε διὰ τὰς γωνίας θέλομεν ἔχει λόγους περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον πλησιάζοντας εἰς τὸν ἀληθινόν, καθὼς ἐκτείνωμεν τὴν ἐργασίαν περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον.

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'.

ΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ ΤΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Καλῶ σχήματα ἰσοδύναμα ἐκεῖνα τῶν ὁποίων αἱ ἐπιφάνειαι εἶναι ἴσαι.

Δύο σχήματα ἠμποροῦν νὰ ἦναι ἰσοδύναμα, ἂν καὶ πολλὰ ἀνόμοια: κύκλος, παραδείγματος χάριν, ἠμπορεῖ νὰ ἰσοδυναμῇ μὲ τετράγωνον, τρίγωνον μὲ ὀρθογώνιον κ.τ.λ.

Τὴν ὀνομασίαν ἴσα σχήματα θέλω ἀποδίδει εἰς ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα ἐπιτιθέμενα ἐφαρμόζουσιν εἰς ὅλα των τὰ σημεῖα: τοιαῦτα εἶναι δύο κύκλοι τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι, δύο τρίγωνα τῶν ὁποίων αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι ἴσαι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν κ. τ. λ.

Β΄. Δύο σχήματα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν τὰς γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους. Δι᾿ ὁμολόγους πλευρὰς ἐννοοῦμεν ἐκείνας αἵτινες ἔχουν τὴν αὐτὴν θέσιν εἰς τὰ δύο σχήματα, ἢ πρόσκεινται εἰς ἴσας γωνίας. Αὗται δὲ αἱ γωνίαι καλοῦνται ὁμοίως γωνίαι ὁμόλογοι.

Δύο σχήματα ἴσα εἶναι πάντοτε ὅμοια· ἀλλὰ δύο σχήματα ὅμοια ἠμποροῦν νὰ ἦναι πολλὰ ἄνισα.

Γ΄. Εἰς δύο διαφθρετικοὺς κύκλους, καλοῦνται τόξα ὅμοια, τομεῖς ὅμοιοι, τμήματα ὅμοια, τὰ ἀνταποκρινόμενα εἰς γωνίας εἰς τὸ κέντρον ἴσας.

Οὕτως οὔσης τῆς γωνίας Α ἴσης μὲ τὴν Ο, τὸ τόξον ΒΓ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ τόξον ΔΕ, ὁ τομεὺς ΑΒΓ μὲ τὸν τομέα ΟΔΕ, κ. τ. λ. σχ. 92.

Δ΄. Τὸ ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἡ κάθετος ΕΖ ἥτις μετρεῖ τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο πλευρῶν ΑΒ, ΓΔ, λαμβανομένων ὡς βάσεων. σχ. 93.

Ε΄. τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ φερομένη κάθετος ΑΔ ἐκ τῆς κορυφῆς μιᾶς γωνίας Α ἐπὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΒΓ λαμβανομένης ὡς βάσεως. σχ. 94.

Ϛ΄. Τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου εἶναι ἡ φερομένη κάθετος ΕΖ μεταξὺ τῶν δύο παραλλήλων πλευρῶν του ΑΒ, ΓΔ. σχ. 95.

Ζ΄. Τὸ ἐμβαδὸν ἢ ἐπιφάνεια ἑνὸς σχήματος εἶναι σχεδὸν λέξεις συνώνυμοι. Η λέξις ἐμβαδὸν σημειόνει μερικώτερον τὴν ποσότητα τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος καθ᾿ ὅσον μετρεῖται ἢ συγκρίνεται μὲ ἄλλας ἐπιφανείας.

Σ. Κ. Πρὸς κατάληψιν τοῦ παρόντος βιβλίου καὶ τῶν ἀκολούθων, πρέπει ὁ ἀναγνώστης νὰ ἐνθυμῆται καλῶς τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλογιῶν, διὰ τὴν ὁποίαν παραπέμπεται εἰς τὰς κοινὰς πραγματείας τῆς Αριθμητικῆς καὶ Αλγέβρας. Ημεῖς δὲ μόνον μίαν παρατήρησιν θέλομεν κάμει, ἥτις θέλει χρησιμεύσει διὰ τὴν προσδιόρισιν τῆς ἀληθινῆς ἐννοίας τῶν προτάσεων, καὶ τὴν διάλυσιν κάθε δυσκολίας ἢ ἀσαφείας, ἥτις ἠμποροῦσε νὰ ἀπαντηθῇ εἴτε εἰς τὴν ἐκφώνησιν, εἴτε εἰς τὰς ἀποδείξεις τῶν προτάσεων.

Ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν $A:B::\Gamma:\Delta$, γνωςὸν εἶναι ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων $A\times\Delta$ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέσων $B\times\Gamma$.

Η ἀλήθεια αὕτη εἶναι ἀναντίῤῥητος διὰ τοὺς ἀριθμούς· ἀλλ' ὄχι ὀλιγώτερον ὑπάρχει δι' ὁποιασδήποτε ποσότητας, φθάνει μόνον νὰ ἐκφράζωνται ἢ νὰ τὰς ἐννοῶμεν ἐκφραζομένας δι' ἀριθμῶν· καὶ τοῦτο πάντοτε δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν: ἐὰν, παραδείγματος χάριν, A,B,Γ,Δ ἦναι γραμμαὶ, ἠμποροῦμεν νὰ ἐννοήσωμεν ὅτι μία τούτων τῶν τεσσάρων γραμμῶν ἢ, ἂν θέλωμεν, μία πέμπτη εἶναι κοινὸν μέτρον τούτων καὶ λαμβάνεται ὡς μονάς. Τότε ἕκαςον τῶν ςοιχείων A,B,Γ,Δ παριςάνει ἀριθμὸν τινὰ μονάδων, ἀκέραιον ἢ κλασματικὸν, συμμετρικὸν ἢ ἀσύμμετρον, καὶ ἡ μεταξὺ τῶν γραμμῶν A, B, Γ, Δ ἀναλογία τρέπεται εἰς ἀναλογίαν ἀριθμῶν.

Τὸ γινόμενον λοιπὸν τῶν γραμμῶν A καὶ Δ, τὸ ὁποῖον καλεῖται καὶ ὀρθογώνιον τῶν ἀλλότι δὲν εἶναι παρὰ ὁ ἀριθμὸς τῶν γραμμικῶν μονάδων (unités linéaires) τῶν περιεχομένων εἰς A, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γραμμικῶν μονάδων τῶν περιεχομένων εἰς B· καὶ εὐκόλως ἐννοεῖται ὅτι τοῦτο τὸ γινόμενον δύναται καὶ πρέπει νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸ προκύπτον κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀπὸ τὰς γραμμὰς B καὶ Γ.

Αἱ ποσότητες A καὶ B ἠμποροῦν νὰ ἦναι ἑνός τινὸς εἴδους, παραδείγματος χάριν, γραμμαὶ, καὶ αἱ ποσότητες Γ καὶ Δ ἄλλου διαφορετικοῦ, παραδείγματος χάριν, ἐπιφάνειαι. Τότε πρέπει πάντοτε νὰ θεωρῶμεν ταύτας τὰς ποσότητας ὡς ἀριθμούς· αἱ μὲν A καὶ B θέλουν ἐκφράζεσθαι διὰ γραμμικῶν μονάδων, αἱ δὲ Γ καὶ Δ διὰ μονάδων ἐπιφανείας, καὶ τὸ γινόμενον $A \times \Delta$ καθὼς καὶ τὸ $B \times \Gamma$ θέλουν εἶναι ἀριθμοί.

Εν γένει, εἰς ὅλας τὰς ἐργασίας τὰς ὁποίας θέλομεν ἐκτελεῖ ἐπὶ τῶν ἀναλογιῶν, πάντοτε πρέπει νὰ θεωρῶνται οἱ ὅροι αὐτῶν ὡς τόσοι ἀριθμοί, κατὰ τὸ εἶδος εἰς τὸ ὁποῖον ἕκαςος ἀνήκει, καὶ κἀμμία δυσκλία δὲν θέλει ἀπαντᾶται εἰς τὴν κατανόησιν τῶν ἐργασιῶν τούτων καὶ τῶν ἀπὸ αὐτὰς συναγομένων συνεπειῶν.

Νομίζομεν χρέος μας νὰ εἰδοποιήσωμεν προσέτι ὅτι πολλαὶ τῶν ἀποδείξεών μας θεμελιοῦνται ἐπὶ μερικῶν κανόνων τῆς Αλγέβρας τῶν ἁπλουςέρων, οἱ ὁποῖοι καὶ αὐτοὶ ἐπιςηρίζονται ἐπὶ τῶν γνωςῶν ἀξιωμάτων: οὕτως ἐὰν ἔχωμεν $A = B + \Gamma$ καὶ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαςον μέλος ἐπὶ τὴν αὐτὴν ποσότητα M, συνάγομεν $A \times M = B \times M + \Gamma \times M$· παρομοίως ἐὰν $A = B + \Gamma$ καὶ $\Delta = E - \Gamma$, καὶ προςεθῶσιν αἱ ἴσαι ποσότητες, ἐξαλειφθέντων τῶν $+\Gamma$ καὶ $-\Gamma$, συνάγομεν $A + \Delta = B + E$, καὶ οὕτω περὶ τῶν ἄλλων. ταῦτα εἶναι οἴκοθεν σαφῆ. Αλλὰ, τυχούσης δυσκολίας, καλὸν θέλει εἶναι νὰ συμβουλεύεται τινὰς τὰ βιβλία τῆς Αλγέβρας, καὶ οὕτω νὰ μιγνύῃ τὴν σπουδὴν τῶν δύο τούτων ἐπιςημῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΠΡΩΤΗ.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἴσας βάσεις ἔχοντα καὶ ἰσοϋψῆ ὄντα, εἶναι ἰσοδύναμα.

Εςω ΑΒ, σχ. 96. ἡ κοινὴ βάσις τῶν δύο παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ, ΑΒΕΖ· ἐπειδὴ ὑποτίθενται ἰσοϋψῆ, αἱ ἄνω βάσεις ΔΓ, ΖΕ, πρέπει νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας παραλλήλου τῆς ΑΒ. Τώρα ἐκ τῆς φύσεως τῶν παραλληλογράμμων $A\Delta = B\Gamma$, καὶ $AZ = BE$· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον $\Delta\Gamma = AB$, καὶ $ZE = AB$· λοιπὸν

ΔΓ=ΖΕ· ὅθεν, ἐὰν ἀφαιρεθῶσι ΔΓ καὶ ΖΕ ἀπὸ τὴν αὐτὴν γραμμὴν ΔΕ, τὰ ὑπόλοιπα ΓΕ καὶ ΔΖ θέλουν εἶναι ἴσα.

Εκ τούτου ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΔΑΖ, ΓΒΕ, εἶναι ἰσόπλευρα μεταξύ των, καὶ ἐπομένως ἴσα.

Αλλ' ἐὰν ἐκ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΕΔ ἀφαιρεθῇ τὸ τρίγωνον ΑΔΖ, μένει τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΕΖ· καὶ ἐὰν ἐκ τοῦ αὐτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΕΔ ἀφαιρεθῇ τὸ τρίγωνον ΓΒΕ, μένει τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ· λοιπὸν τὰ δύο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, ΑΒΕΖ, τὰ τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος ἔχοντα, εἶναι ἰσοδύναμα.

Πόρισμα. Κάθε παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΕΖ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους. σχ. 97.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Κάθε τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους. σχ. 98.

Διότι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ εἶναι ἴσα (πρ. 28, 1)

Πόρισμα. Α'. Λοιπὸν ἓν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ΒΓΕΖ τῆς αὐτῆς βάσεως ΒΓ καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους ΑΟ· διότι τὸ ὀρθογώνιον ΒΓΕΖ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ.

Πόρισμα. Β'. Ολα τὰ τρίγωνα τὰ ἴσα βάσεις ἔχοντα καὶ ἰσοϋψῆ ὄντα εἶναι ἰσοδύναμα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ἰσοϋψῆ ὀρθογώνια εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των.

Εστωσαν ΑΒΓΔ, ΑΕΖΔ δύο ὀρθογώνια τοῦ ἰδίου ὕψους ΑΔ· λέγω ὅτι εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των ΑΒ, ΑΕ. σχ. 99.

Ας ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον τὰς βάσεις ΑΒ, ΑΕ συμμετρικὰς, καὶ ὅτι εἶναι μεταξύ των, παραδείγματος χάριν, ὡς οἱ ἀριθμοὶ 7 καὶ 4: ἐὰν ΑΒ διαιρεθῇ εἰς 7 ἴσα μέρη, ΑΕ θέλει περιέχει 4 ἐκ τούτων· ἀπὸ κάθε ςιγμὴν διαιρέσεως ἄς ὑψωθῇ μία κάθετος εἰς τὴν βάσιν, θέλουν σχηματισθῆ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἑπτὰ μερικὰ ὀρθογώνια, ἴσα μεταξύ των, ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος. Τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ θέλει περιέχει ἑπτὰ μερικὰ ὀρθογώνια, ἐν ᾧ τὸ ΑΕΖΔ τέσσαρα· λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ εἶναι πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΑΕΖΔ ὡς 7 πρὸς 4, ἢ ὡς ΑΒ πρὸς ΑΕ. Ο αὐτὸς συλλογισμὸς δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς κάθε ἄλλον λόγον διαφορετικὸν ἀπὸ τὸν τοῦ 7 πρὸς 4· λοιπὸν ὁποιοςδήποτε καὶ ἂν ἦναι ὁ λόγος οὗτος, φθάνει νὰ ἦναι συμμετρικὸς, θέλομεν ἔχει.

ΑΒΓΔ : ΑΕΖΔ : : ΑΒ : ΑΕ.

Ας ὑποθέσωμεν, δεύτερον, ὅτι αἱ βάσεις ΑΒ, ΑΕ εἶναι ἀσύμμετροι μεταξύ των· λέγω ὅτι ἀκόμη θέλομεν ἔχει. σχ. 100.

ΑΒΓΔ : ΑΕΖΔ : : ΑΒ : ΑΕ.

Διότι ἐὰν ἡ ἀναλογία αὕτη δὲν ἦναι ἀληθὴς, τῶν τριῶν πρώτων ὅρων μενόντων τῶν αὐτῶν, ὁ τέταρτος θέλει εἶναι μεγαλήτερος ἢ μικρότερος ἀπὸ ΑΕ. Ας τὸν ὑποθέσωμεν μεγαλήτερον καὶ ὅτι ἔχομεν,

ΑΒΓΔ : ΑΕΖΔ : : ΑΒ : ΑΟ

Ας διαιρεθῇ ἡ ΑΒ εἰς μέρη ἴσα μικρότερα ἀπὸ ΕΟ, τοὐλάχιςον θέλει ὑπάρχει ἓν σημεῖον διαιρέσεως Ι μεταξὺ Ε καὶ Ο: ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἂς ὑψωθῇ ἐπὶ τῆς ΑΙ ἡ κάθετος ΙΚ· αἱ βάσεις ΑΒ, ΑΙ, θέλουν εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς ἀλλήλας, καὶ κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα θέλομεν ἔχει

ΑΒΓΔ : ΑΙΚΔ : : ΑΒ : ΑΙ.

ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ΑΒΓΔ : ΑΕΖΔ : : ΑΒ : ΑΟ.

Εἰς τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας οἱ ἡγούμενοι εἶναι ἴσοι· λοιπὸν οἱ ἑπόμενοι σχηματίζουν ἀναλογίαν, καὶ συνάγομεν·

ΑΙΚΔ : ΑΕΖΔ : : ΑΙ : ΑΟ.

Ἀλλὰ ΑΟ εἶναι μείζων ΑΙ· ἔπρεπε λοιπὸν διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἡ τοιαύτη ἀναλογία, τὸ ὀρθογώνιον ΑΕΖΔ νὰ ἦναι μεῖζον τοῦ ΑΙΚΔ· ἀλλ' ἐξ ἐναντίας εἶναι μικρότερον· λοιπὸν ἡ ἀναλογία εἶναι ἀδύνατος. Τὸ ὀρθογώνιον ἄρα ΑΒΓΔ δὲν δύναται νὰ ἦναι πρὸς τὸ ΑΕΖΔ ὡς ΑΒ πρὸς γραμμὴν μείζονα τῆς ΑΕ.

Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ, ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι ἐλάσσων τῆς ΑΕ· λοιπὸν εἶναι ἴσος μὲ ΑΕ.

Ὁποιοσδήποτε ἄρα καὶ ἂν ἦναι ὁ λόγος τῶν βάσεων, δύο ὀρθογώνια ἰσοϋψῆ ΑΒΓΔ, ΑΕΖΔ, εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των ΑΒ, ΑΕ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ὁποιαδήποτε ὀρθογώνια ΑΒΓΔ, ΑΕΗΖ εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ γινόμενα τῶν βάσεων πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ τὰ ὕψη, εἰς τρόπον ὥστε ΑΒΓΔ : ΑΕΗΖ : : ΑΒ $\times$ ΑΔ : ΑΕ $\times$ ΑΖ. σχ. 101.

Ἀφ' οὗ τὰ δύο ὀρθογώνια διαταχθῶσιν εἰς τρόπον ὥστε αἱ γωνίαι εἰς Α νὰ ἦναι κατὰ κορυφήν, ἂς προεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ ΗΕ, ΓΔ, ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Θ. Τὰ δύο ὀρθογώνια ΑΒΓΔ, ΑΕΘΔ, ἔχουν τὸ ἴδιον ὕψος ΑΔ· εἶναι λοιπὸν πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις των ΑΒ, ΑΕ: ὡσαύτως, τὰ δύο ὀρθογώνια ΑΕΘΔ, ΑΕΗΖ, ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΕ, εἶναι λοιπὸν πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις των ΑΔ, ΑΖ: οὕτω θέλομεν ἔχει τὰς δύο ἀναλογίας.

ΑΒΓΔ : ΑΕΘΔ : : ΑΒ : ΑΕ

ΑΕΘΔ : ΑΕΗΖ : : ΑΔ : ΑΖ

Πολλαπλασιάζοντες τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας κατὰ τάξιν, καὶ παρατηροῦντες ὅτι ὁ μέσος ὅρος ΑΕΘΔ ὡς κοινὸς πολλαπλασιαστὴς εἰς τὸν ἡγούμενον καὶ ἑπόμενον ἠμπορεῖ νὰ ἐξαλειφθῇ, θέλομεν ἔχει,

$$ΑΒΓΔ : ΑΕΗΖ :: ΑΒ \times ΑΔ : ΑΕ \times ΑΖ.$$

Σχόλιον. Ημποροῦμεν λοιπὸν νὰ λάβωμεν διὰ μέτρον ἑνὸς ὀρθογωνίου τὸ γινόμενον τῆς βάσεως του, ἐπὶ τοῦ ὕψους του, φθάνει μόνον διὰ τούτου τοῦ γινομένου νὰ ἐννοῶμεν τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν περιεχομένων γραμμικῶν μονάδων εἰς τὴν βάσιν, καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν περιεχομένων γραμμικῶν μονάδων εἰς τὸ ὕψος.

Τὸ μέτρον ὅμως τοῦτο δὲν εἶναι ἀπόλυτον, ἀλλὰ σχετικόν· προϋποθέτει τὴν ἐκτίμησιν ἄλλου ὀρθογωνίου διὰ τῆς καταμετρήσεως τῶν πλευρῶν του μὲ τὴν αὐτὴν γραμμικὴν μονάδα· κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον προσδιορίζεται ἓν δεύτερον γινόμενον καὶ ὁ λόγος τῶν δύο γινομένων θέλει εἶναι ἴσος μὲ τὸν τῶν ὀρθογωνίων, κατὰ τὴν ἀποδειχθεῖσαν πρότασιν.

Ἐὰν παραδείγματος χάριν ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου Α εἶναι τριῶν μονάδων καὶ τὸ ὕψος του δέκα, τὸ ὀρθογώνιον θέλει παρασταθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3×10 ἢ 30, ἀλλ' αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς οὕτω μεμονωμένος δὲν σημαίνει τίποτε· ἐὰν ὅμως ἔχωμεν ἓν δεύτερον ὀρθογώνιον Β ἡ βάσις τοῦ ὁποίου νὰ ἦναι δώδεκα μονάδων, καὶ τὸ ὕψος ἑπτά, τὸ δεύτερον ὀρθογώνιον θέλει παρασταθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 7×12, ἢ 84: ἐντεῦθεν θέλομεν συμπεράνει ὅτι τὰ δύο ὀρθογώνια Α καὶ Β εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς 30 πρὸς 84. Ἐὰν λοιπὸν ἐκ συνθήκης ἐλαμβάναμεν τὸ ὀρθογώνιον Α διὰ τὴν μονάδα τοῦ μέτρου εἰς τὰς ἐπιφανείας, τὸ ὀρθογώνιον Β ἤθελεν ἔχει τότε διὰ μέτρον ἀπόλυτον $\frac{24}{16}$ τουτέστιν ἤθελεν εἶναι ἴσον μὲ $\frac{24}{16}$ μονάδος ἐπιφανείας.

Κοινότερον καὶ ἁπλούστερον εἶναι νὰ λαμβάνεται ὡς μονὰς ἐπιφανείας τὸ τετράγωνον, καὶ ἐκλέγεται τὸ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἡ μονὰς τοῦ μήκους· τότε τὸ μέτρον τὸ ὁποῖον ἁπλῶς ἐθεωρήσαμεν ὡς σχετικὸν γίνεται ἀπόλυτον· ὁ ἀριθμὸς, παραδείγματος χάριν, 30 διὰ τοῦ ὁποίου ἐμετρήσαμεν τὸ ὀρθογώνιον Α, παριστάνει 30 μονάδας ἐπιφανείας, ἢ 30 τετράγωνα ἡ πλευρὰ τῶν ὁποίων εἶναι ἡ μονάς: τοῦτο γίνεται ἐπαισθητὸν διὰ τοῦ σχ. 102.

Συχνάκις εἰς τὴν Γεωμετρίαν συγχέεται τὸ γινόμενον δύο γραμμῶν μὲ τὸ ὀρθογώνιόν των, καὶ ἡ ἔκφρασις αὕτη μετέβη καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν σημειόνουσα τὸ γινόμενον δύο ἀνίσων ἀριθμῶν, καθὼς ἡ τοῦ τετραγώνου πρὸς παράστασιν τοῦ γινομένου ἑνὸς ἀριθμοῦ ἐφ' ἑαυτόν.

Τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3. κ. τ. λ. εἶναι 1, 4, 9, κ. τ. λ. Οὕτω βλέπομεν ὅτι τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ γραμμῆς διπλασίας εἶναι τετραπλάσιον, ἐπὶ τριπλασίας ἐννεαπλάσιον, καὶ ἐφεξῆς σχ. 103.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ ἐμβαδὸν ὁποιουδήποτε παραλληλογράμμου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του.

Διότι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΕΖ, τῆς αὐτῆς βάσεως ΑΒ καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους ΒΕ (πρό. 1.): ἀλλὰ τοῦτο ἔχει διὰ μέτρον ΑΒ$\times$ΒΕ (πρός 4)· λοιπὸν ΑΒ$\times$ΒΕ ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. σχ. 97.

Πόρισμα. Τὰ παραλληλόγραμμα τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των, καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τοῦ ἰδίου ὕψους εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των· διότι ἐὰν Α, Β, Γ παριστάνωσιν ὁποιασδήποτε ποσότητας, ἔχομεν ἐν γένει Α×Γ : Β×Γ : : Α : Β.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους του.

Διότι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΕ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ τὸ ἴδιον ὕψος ΑΔ (πρό. 2)· ἀλλὰ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραλληλογράμμου = ΒΓ×ΑΔ (πρό. 5.)· λοιπὸν ἡ τοῦ τριγώνου = ½ΒΓ×ΑΔ ἢ ΒΓ×½ΑΔ. σχ. 104.

Πόρισμα. Δύο τρίγωνα ἰσοϋψῆ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις των, καὶ δύο τρίγωνα τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὕψος του ΕΖ, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν παραλλήλων βάσεων, ΒΒ, ΓΔ. σχ. 105.

Ἐκ τῆς στιγμῆς Ι, μέσου τῆς πλευρᾶς ΓΒ, ἂς ἀχθῇ ἡ Κ'Λ παράλληλος τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΑΔ, καὶ ἂς προεκβληθῇ ΔΓ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν Κ'Λ.

Εἰς τὰ τρίγωνα ΙΒΛ, ΙΓΚ', ἔχομεν τὴν πλευρὰν ΙΒ = ΙΓ ἐκ τῆς κατασκευῆς, τὴν γωνίαν ΛΙΒ = ΓΙΚ', καὶ τὴν ΙΒΛ = ΙΓΚ', ἐπειδὴ ΓΚ' καὶ ΒΛ εἶναι παράλληλοι (πρό. 24, 1)· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα (πρ. 7, 1)· τὸ τραπέζιον ἄρα ΑΒΓΔ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ παραλληγραμμον ΑΔΚ'Λ, καὶ ἔχει διὰ μέτρον ΕΖ×ΑΛ.

Ἀλλ' ἔχομεν ΑΛ = ΔΚ′, καὶ διὰ τὴν ἰσότητα τοῦ τριγώνου ΒΙΑ μὲ τὸ Κ′ΓΙ, ἡ πλευρὰ ΒΑ = ΓΚ′· λοιπὸν ΑΒ + ΓΔ = ΑΛ + ΔΚ′ = 2ΑΛ, καὶ οὕτως ΑΛ εἶναι τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων ΑΒ, ΓΔ· λοιπὸν τέλος τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὕψος ΕΖ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν βάσεων ΑΒ, ΓΔ, ἢ $ΑΒΓΔ = ΕΖ \times \left(\frac{ΑΒ + ΓΔ}{2}\right)$.

Σχόλιον. Ἐὰν ἀπὸ τὴν στιγμὴν Ι, μέσον τῆς ΒΓ, ἀχθῇ ἡ ΙΘ, παράλληλος τῆς βάσεως ΑΒ, ἡ στιγμὴ Θ θέλει εἶναι παρομοίως τὸ μέσον τῆς ΑΔ· διότι τὸ σχῆμα ΑΘΙΛ εἶναι παραλληλόγραμμον, καθὼς καὶ τὸ ΔΘΙΚ′, ὡς ἔχοντα τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους: ἔχομεν λοιπὸν ΑΘ = ΙΛ καὶ ΔΘ = ΙΚ′· ἀλλὰ ΙΛ = ΙΚ′, ἐξ αἰτίας τῆς ἰσότητος τῶν δύο τριγώνων ΒΙΑ, ΓΙΚ′, λοιπὸν ΑΘ = ΔΘ.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γραμμὴ $ΘΙ = ΑΛ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2}$. λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἠμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ ὁμοίως διὰ $ΕΖ \times ΘΙ$: ἀπομόνως ἰσοῦται μὲ τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἥτις ἑνόνει τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η′.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν γραμμή τις ΑΓ διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη ΑΒ, ΒΓ, τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς ὅλης ΑΓ θέλει περιέχει τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τοῦ μέρους ΑΒ, πλέον τὸ κατασκευαζόμενον ἐπὶ τοῦ ἄλλου μέρους ΒΓ, πλέον δὶς τὸ ὀρθογώνιον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν δύο μερῶν ΑΒ, ΒΓ: τοῦτο δὲ ἐκφράζεται οὕτως,

$$\overline{ΑΓ}^2 \text{ ἢ } (\overline{ΑΒ + ΒΓ})^2 = \overline{ΑΒ}^2 + \overline{ΒΓ}^2 + 2ΑΒ \times ΒΓ. \text{ σχ. 106.}$$

Ας κατασκευασθῇ τὸ τετράγωνον ΑΓΔΕ, ἂς ληφθῇ ΑΖ = ΑΒ, ἂς ἀχθῇ ΖΗ παράλληλος τῆς ΑΓ, καὶ ΒΘ τῆς ΑΕ.

Δι' αὐτῆς τῆς κατασκευῆς τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ διαιρεῖται εἰς τέσσαρα μέρη: τὸ πρῶτον ΑΒΙΖ εἶναι τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἐπειδὴ ἐλήφθη ΑΖ = ΑΒ: τὸ δεύτερον ΙΗΔΘ εἶναι τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς ΒΓ· διότι ἐπειδὴ ΑΓ = ΑΕ, καὶ ΑΒ = ΑΖ, ἡ διαφορὰ ΑΓ — ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν ΑΕ — ΑΖ, ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι ΒΓ = ΕΖ· ἀλλ' ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ΙΗ = ΒΓ, καὶ ΔΗ = ΕΖ· λοιπὸν ΘΙΗΔ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ. Τὰ δύο ταῦτα μέρη ἀφαιρεθέντα ἀπὸ τὸ ὅλον τετράγωνον, ἀφίνουσιν ὑπόλοιπα τὰ δύο ὀρθογώνια ΒΓΗΙ, ΕΖΙΘ, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει διὰ μέτρον ΑΒ × ΒΓ· λοιπὸν τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς ΑΓ, κ. τ. λ.

Σχόλιον. Η πρότασις αὕτη εἶναι ἡ ἰδία μὲ τὴν εἰς τὴν Αλγεβραν ἀποδεικνυομένην διὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ τετραγώνου ἑνὸς διωνύμου, καὶ ἡ ὁποία ἐκφράζεται οὕτω: $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εὰν ἡ γραμμὴ ΑΓ ἦναι ἡ διαφορὰ δύο ἄλλων ΑΒ, ΒΓ, τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς ΑΓ θέλει περιέχει τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ, πλέον τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ, μεῖον δὶς τὸ ὀρθογώνιον τὸ κατασκευαζόμενον ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ ΒΓ· τουτέστι $ΑΓ^2$ ἢ $(ΑΒ - ΒΓ)^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 - 2ΑΒ \times ΒΓ$. σχ. 107.

Ας κατασκευασθῇ τὸ τετράγωνον ΑΒΙΖ, ἂς ληφθῇ ΑΕ = ΑΓ, ἂς ἀχθῇ ΓΗ παράλληλος τῆς ΒΙ, καὶ ΘΚ τῆς ΑΒ, καὶ ἂς πληρωθῇ τὸ τετράγωνον ΕΖΛΚ.

Ἕκαστον τῶν δύο ὀρθογωνίων ΓΒΙΗ, ΗΛΚ'Δ ἔχει διὰ μέτρον $\mathrm{AB}\times\mathrm{B\Gamma}$: ἐὰν ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τὸ ὅλον σχῆμα ΑΒΙΛΚ'ΕΑ, τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ εἶναι $\mathrm{AB}^2+\mathrm{B\Gamma}^2$, φανερὸν εἶναι ὅτι μένει τὸ τετράγωνον ΑΓΔΕ, λοιπὸν κ.τ.λ.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὐτὴ συμφωνεῖ μὲ τὸν τύπον τῆς Ἀλγέβρας $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ κατασκευαζόμενον ὀρθογώνιον ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς δύο γραμμῶν, ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν ἰδίων: δηλαδὴ $(\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma})\times(\mathrm{AB}-\mathrm{B\Gamma})=\mathrm{AB}^2-\mathrm{B\Gamma}^2$ σχ. 108.

Ἂς κατασκευασθῶσιν ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΑΓ τὰ τετράγωνα ΑΒΙΖ, ΑΓΔΕ· ἂς προεκβληθῇ ἡ ΑΒ ποσότητα τινὰ ΒΚ'=ΒΓ, καὶ ἂς πληρωθῇ τὸ ὀρθογώνιον ΑΚ'ΛΕ.

Ἡ βάσις ΑΚ' τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γραμμῶν ΑΒ, ΒΓ, τὸ ὕψος του ΑΕ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ἰδίων· λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΑΚ'ΛΕ$=(\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma})(\mathrm{AB}-\mathrm{B\Gamma})$. Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ ὀρθογώνιον σύγκειται ἀπὸ τὰ δύο μέρη ΑΒΘΕ+ΒΘΛΚ' καὶ τὸ μέρος ΒΘΛΚ' ἰσοῦται μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΕΔΗΖ, διότι ΒΘ=ΔΕ καὶ ΒΚ'=ΕΖ· λοιπὸν ΑΚ'ΛΕ=ΑΒΘΕ+ΕΔΗΖ.

Τώρα τὰ δύο ταῦτα μέρη σχηματίζουν τὸ τετράγωνον ΑΒΙΖ, μεῖον τὸ τετράγωνον ΔΘΙΗ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ· λοιπὸν τέλος $(\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma})\times(\mathrm{AB}-\mathrm{B\Gamma})=\mathrm{AB}^2-\mathrm{B\Gamma}^2$.

Σχόλιον. Ἡ πρότασις αὐτὴ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν τύπον τῆς Ἀλγέβρας $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν ἄλλων δύο πλευρῶν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀρθογώνιον εἰς Α: Μετὰ τὴν κατασκευὴν τῶν τετραγώνων ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν, ἄς κατεβασθῇ ἀπὸ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ἡ κάθετος ΑΔ ἥτις ἄς προεκβληθῇ ἕως εἰς τὸ Ε· ἄς ἐπιζευχθῶσιν ἔπειτα αἱ διαγώνιαι ΑΖ, ΓΘ. σχ. ιωη.

Η γωνία ΑΒΖ σύγκειται ἀπὸ τὴν ΑΒΓ καὶ τὴν ὀρθὴν ΓΒΖ: ἡ γωνία ΓΒΘ σύγκειται ἀπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν ΑΒΓ καὶ τὴν ὀρθὴν ΑΒΘ· λοιπὸν ἡ γωνία ΑΒΖ = ΘΒΓ. Ἀλλὰ ΑΒ = ΒΘ ὡς πλευραὶ τοῦ ἰδίου τετραγώνου, καὶ ΒΖ = ΒΓ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΒΖ, ΘΒΓ, ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων· λοιπὸν εἶναι ἴσα. (πρ. 6, ι).

Τὸ τρίγωνον ΑΒΖ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ΒΔΕΖ, (ἢ διὰ συντομίαν ΒΕ) τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΖ καὶ τὸ ἴδιον ὕψος ΒΔ (πρ. α). Τὸ τρίγωνον ΘΒΓ εἶναι παρομοίως τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου ΑΘ· διότι ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΒΑΓ, ΒΑΔ εἶναι ὀρθαὶ, αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΑΛ μίαν μόνην σχηματίζουσιν εὐθεῖαν παράλληλον τῆς ΘΒ· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΘΒΓ καὶ τὸ τετράγωνον ΑΘ, ἐκτὸς τῆς κοινῆς βάσεως ΒΘ, ἔχουν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΒ· τὸ τρίγωνον ἄρα εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου.

Ἀπεδείξαμεν ἤδη ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΖ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΘΒΓ· λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΒΔΕΖ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΒΖ, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ τετράγωνον ΑΘ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΘΒΓ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΓΔΕΗ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τετράγωνον ΑΓ· ἀλλὰ τὰ δύο ὀρθογώνια ΒΔΕΖ, ΓΔΕΗ, ὁμοῦ λαμβανόμενα, κάμνουν τὸ τετράγωνον ΒΓΗΖ: λοιπὸν τὸ τετράγωνον ΒΓΗΖ, τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης κατασκευαζόμενον ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ΑΒΘΛ, ΑΓΙΚ τῶν κατασκευαζομένων ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν· ἤ, μὲ ἄλλους ὅρους,

$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$.

Πόρισμα. Α΄. Λοιπὸν τὸ τετράγωνον μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης μεῖον τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης πλευρᾶς, τὸ ὁποῖον ἐκφράζεται οὕτω: $ΑΒ^2 = ΒΓ^2 - ΑΓ^2$.

Πόρισμα. Β΄. Ἔστω ΑΒΓΔ ἓν τετράγωνον, ΒΓ ἡ διαγώνιός του· τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ὡς ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς δίδει $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 2ΑΒ^2$ λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς διαγωνίου ΑΓ εἶναι διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς πλευρᾶς ΑΒ σχ. 118.

Ἡ ἰδιότης αὕτη καταφαίνεται ἐπαισθητὴ ἐὰν ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Γ ἀχθῶσι παράλληλοι τῆς ΒΔ, καὶ ἐκ τῶν σημείων Β καὶ Δ παράλληλοι τῆς ΑΓ: κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον σχηματίζεται νέον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἴσον μὲ τὸ τῆς ΑΓ. Τώρα βλέπομεν ὅτι ΕΖΗΘ περιέχει ὀκτὼ τρίγωνα ἴσα μὲ ΑΒΕ, καὶ ΑΒΓΔ περιέχει ἀπὸ αὐτὰ τέσσαρα· ἄρα τὸ τετράγωνον ΕΖΗΘ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΑΒΓΔ.

Ἐπειδὴ $ΑΓ^2 : ΑΒ^2 :: 2 : 1$, ἔχομεν, ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, $ΑΓ : ΑΒ :: \sqrt{2} : 1$· λοιπὸν ἡ διαγώνιος ἑνὸς τετραγώνου εἶναι ἀσύμμετρος μὲ τὴν πλευράν του.

Τοῦτο θέλομεν ἀναπτύξει περισσότερον εἰς ἄλλην εὐκαιρίαν.

Πόρισμα. Γ'. Ἀπεδείχθη ὅτι τὸ τετράγωνον ΑΘ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΒΔΕΖ· τώρα, ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ ὕψους ΒΖ, τὸ τετράγωνον ΒΓΗΖ εἶναι πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ΒΔΕΖ ὡς ἡ βάσις ΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΒΔ· λοιπὸν;

$$\overline{ΒΓ}^2 : \overline{ΑΒ}^2 :: ΒΓ : ΒΔ.$$

Ὅθεν τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης εἶναι πρὸς τὸ τετράγωνον μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ὡς ἡ ὑποτείνουσα πρὸς τὸ προσκείμενον εἰς ταύτην τὴν πλευρὰν τμῆμα.

Ἐδῶ ὀνομάζομεν τμῆμα τὸ μέρος τῆς ὑποτεινούσης τὸ ὁποῖον προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν κάθετον ἥτις κατεβάζεται ἀπὸ τὴν ὀρθὴν γωνίαν. Οὕτως ΒΔ εἶναι τὸ προσκείμενον τμῆμα εἰς τὴν πλευρὰν ΑΒ, καὶ ΔΓ τὸ προσκείμενον τμῆμα εἰς τὴν πλευρὰν ΑΓ. Παρομοίως

$$\overline{ΒΓ}^2 : \overline{ΑΓ}^2 :: ΒΓ : ΓΔ.$$

Πόρισμα. Δ'. Τὰ ὀρθογώνια ΒΔΕΖ, ΔΓΗΕ ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις των ΒΔ, ΓΔ. Τώρα, τὰ ὀρθογώνια ταῦτα ἰσοδυναμοῦσι μὲ τὰ τετράγωνα $\overline{ΑΒ}^2$, $\overline{ΑΓ}^2$ ἄρα

$$\overline{ΑΒ}^2 : \overline{ΑΓ}^2 :: ΒΔ : ΔΓ.$$

Λοιπὸν τὰ τετράγωνα τῶν δύο πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ προσκείμενα εἰς ταύτας τὰς πλευρὰς τμήματα τῆς ὑποτεινούσης.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία Γ ἦναι ὀξεῖα, τὸ τετράγωνον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς θέλει εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν αἵτινες περιέχουσι τὴν γωνίαν Γ· καὶ ἐὰν καταβασθῇ ἡ κάθετος ΑΔ ἐπὶ τῆς ΒΓ, ἡ διαφορὰ θέλει ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου ΒΓ×ΓΔ· εἰς τρόπον ὥστε, σχ. 110.

$$\overline{AB}^2 = \overline{A\Gamma}^2 + \overline{B\Gamma}^2 - 2B\Gamma \times \Gamma\Delta.$$

Δύο περιστάσεις ὑπάρχουσι. 1.τη Ἐὰν ἡ κάθετος πέσῃ ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θέλομεν ἔχει $B\Delta = B\Gamma - \Gamma\Delta$, καὶ ἐπομένως (πρό. 9) $\overline{B\Delta}^2 = \overline{B\Gamma}^2 + \overline{\Gamma\Delta}^2 - 2B\Gamma \times \Gamma\Delta$· προσθέτοντες καὶ εἰς τὰ δύο μέρη $\overline{A\Delta}^2$, καὶ παρατηροῦντες ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ, δίδουν $\overline{A\Delta}^2 + \overline{B\Delta}^2 = \overline{AB}^2$ καὶ $\overline{A\Delta}^2 + \overline{\Delta\Gamma}^2 = \overline{A\Gamma}^2$, συνάγομεν $\overline{AB}^2 = \overline{B\Gamma}^2 + \overline{A\Gamma}^2 - 2B\Gamma \times \Gamma\Delta$.

2.α Ἐὰν δὲ ἡ κάθετος ΑΔ πίσῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θέλομεν ἔχει $B\Delta = \Gamma\Delta - B\Gamma$, ἐπομένως (πρό. 9) $\overline{B\Delta}^2 = \overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{B\Gamma}^2 - 2\Gamma\Delta \times B\Gamma$. προσθέτοντες καὶ εἰς τὰ δύο μέρη $\overline{A\Delta}^2$, συνάγομεν παρομοίως

$$\overline{AB}^2 = \overline{B\Gamma}^2 + \overline{A\Gamma}^2 - 2B\Gamma \times \Gamma\Delta.$$

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία Γ ἦναι ἀμβλεῖα, τὸ τετράγωνον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΑΒ θέλει εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν αἵτινες περιέχουσι τὴν γωνίαν Γ, καὶ ἐὰν κατεβασθῇ ἡ ΑΔ κάθετος ἐπὶ τῆς ΒΓ, ἡ διαφορὰ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου ΒΓ×ΓΔ, εἰς τρόπον ὥστε,

$$\overline{AB}^2 = \overline{A\Gamma}^2 + \overline{B\Gamma}^2 + 2B\Gamma \times \Gamma\Delta.$$

Η κάθετος δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ τριγώνου· διότι ἐὰν ἔπιπτε, παραδείγματος χάριν, εἰς Ε, τὸ τρίγωνον ΑΓΕ ἤθελεν ἔχει ἐνταυτῷ τὴν ὀρθὴν γωνίαν Ε καὶ τὴν ἀμβλεῖαν Γ, ὅπερ ἀδύνατον (19, 1)· πίπτει λοιπὸν ἐκτὸς, καὶ ἔχομεν ΒΔ=ΒΓ+ΓΔ. Ἐκ τούτου ἕπεται (πρό. 8)· $\overline{ΒΔ}^2=\overline{ΒΓ}^2+\overline{ΓΔ}^2+2ΒΓ\times ΓΔ$. Προσθέτοντες καὶ εἰς τὰ δύο μέρη $\overline{ΑΔ}^2$ καὶ κάμνοντες τὰς ἀναγωγὰς ὡς εἰς τὸ προλαβὸν θεώρημα, εὑρίσκομεν $\overline{ΑΒ}^2=\overline{ΒΓ}^2+\overline{ΑΓ}^2+2ΒΓ\times ΓΔ$.

Σχόλιον. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι τὸ μόνον εἰς τὸ ὁποῖον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς τρίτης· διότι ἐὰν ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν πλευρῶν τούτων ἦναι ὀξεῖα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των θέλει εἶναι μεγαλήτερον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς· ἐὰν δὲ ἀμβλεῖα μικρότερον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔʹ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς ὁποιονδήποτε τρίγωνον ΑΒΓ, ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως ἀχθῇ ἡ γραμμὴ ΑΕ, λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει $\overline{ΑΒ}^2+\overline{ΑΓ}^2=2\overline{ΑΕ}^2+2\overline{ΒΕ}^2$. σχ. 112.

Ας κατεβασθῇ ἡ κάθετος ΑΔ ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ· τὸ τρίγωνον ΑΕΓ κατὰ τὸ ΙΒʹ θεώρημα δίδει,

$$\overline{ΑΓ}^2=\overline{ΑΕ}^2+\overline{ΕΓ}^2-2ΕΓ\times ΕΔ.$$

Τὸ τρίγωνον ΑΒΕ κατὰ τὸ ΙΓʹ θεώρημα δίδει,

$$\overline{ΑΒ}^2=\overline{ΑΕ}^2+\overline{ΕΒ}^2+2ΕΒ\times ΕΔ.$$