ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Η σχηματιζομένη γωνία ΒΑΓ ἀπὸ μίαν ἐφαπτομένην καὶ ἀπὸ μίαν χορδὴν, ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΜΔΓ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν της. σχ. 69.

Εἰς τὴν ςιγμὴν τῆς ἀφῆς Α ἂς ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΑΔ· ἡ γωνία ΒΑΔ εἶναι ὀρθή, (πρ. 9) καὶ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΜΔ, ἡ γωνία ΔΑΓ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ΔΓ· λοιπὸν ΒΑΔ + ΔΑΓ ἢ ΒΑΓ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΜΔ, πλέον τὸ ἥμισυ τοῦ ΔΓ, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ὅλου τόξου ΑΜΔΓ.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ γωνία ΓΑΕ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΓ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν της.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΑ

ΕΙΣ ΤΑ ΔΥΟ ΠΡΩΤΑ ΒΙΒΛΙΑ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΡΩΤΟΝ.

Νὰ διαιρέσωμεν τὴν δεδομένην εὐθεῖαν ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη. σχ. 70.

Εκ τῶν σημείων Α καὶ Β, ὡς ἐκ κέντρων, μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα ἀλλὰ μεγαλητέραν τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ, ἂς γραφθῶσι δύο τόξα, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς Δ. Τὸ σημεῖον Δ ἰσάκις θέλει ἀπέχει τῶν σημείων Α καὶ Β: ἂς σημειωθῇ παρομοίως ἄνω ἢ κάτω τῆς γραμμῆς ΑΒ ἐν δεύτερον σημεῖον Ε ἰσάκις ἀπέχον τῶν σημείων Α καὶ Β, ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ γραμμὴ ΔΕ· λέγω ὅτι ἡ ΔΕ τέμνει τὴν ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὴν ςιγμὴν Γ.

Διότι ἐπειδὴ ἕκαςον τῶν σημείων Δ καὶ Ε ἰσάκις ἀπέχει τῶν ἄκρων Α καὶ Β, πρέπει νὰ εὑρίσκεται εἰς τὴν ὑψωνομένην κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Ἀλλὰ διὰ δύο δεδομένων σημείων μία μόνη εὐθεῖα εἶναι δυνατὸν νὰ διέλθῃ· λοιπὸν ἡ γραμμὴ ΔΕ εἶναι αὐτὴ ἡ ἰδία κάθετος τέμνουσα τὴν ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὴν ςιγμὴν Γ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

Ἐξ ἑνὸς σημείου Α, δεδομένου ἐπὶ τῆς γραμμῆς ΒΓ, νὰ ὑψώσωμεν κάθετον εἰς ταύτην τὴν γραμμήν. σχ. 71.

Ἂς ληφθῶσι τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ὥςε ἰσάκις νὰ ἀπέχουν ἀπὸ τὸ Α, ἀκολούθως ἐκ τῶν σημείων Β καὶ Γ, ὡς ἐκ κέντρων, καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν ἀλλὰ μείζονα τῆς ΒΑ, ἂς γραφθῶσι δύο τόξα τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς Δ· ἂς ἐπιζευχθῇ ΑΔ καὶ θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος.

Διότι ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Δ ἰσάκις ἀπέχει τοῦ Β καὶ Γ, ἀνήκει εἰς τὴν ὑψωνομένην κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ· λοιπὸν ΑΔ εἶναι αὐτὴ ἡ κάθετος.

Σχόλιον. Διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς κάμνομεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν ΒΑΔ, εἰς δεδομένον σημεῖον Α, ἐπὶ δεδομένης γραμμῆς ΒΓ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.

Ἐξ ἑνὸς σημείου Α, ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΒΔ δεδομένου, νὰ κατεβάσωμεν μίαν κάθετον ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας. σχ. 72.

Ἐκ τοῦ σημείου Α ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ἀρκετὰ μεγάλην, ἂς γραφθῇ τόξον τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΒΔ εἰς δύο σημεῖα Β καὶ Δ· ἂς σημειωθῇ ἀκολούθως σημεῖόν τι Ε ἰσάκις ἀπέχον ἀπὸ Β καὶ Δ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ΑΕ ἥτις θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος.

Διότι ἕκαςον τῶν δύο σημείων Α καὶ Ε ἰσάκις ἀπέχει ἀπὸ Β καὶ Δ· λοιπὸν ἡ ΑΕ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΔ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ′.

Εἰς τὴν ςιγμὴν Α τῆς γραμμῆς ΑΒ, νὰ κατασκευασθῆ γωνία ἴση τῇ δεδομένῃ Κ. σχ. 73.

Εκ τῆς κορυφῆς Κ, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα κατ' ἀρέσκειαν, ἂς γραφθῆ τὸ τόξον ΙΛ περατούμενον εἰς τὰς δύο πλευρὰς τῆς γωνίας. Εκ τῆς ςιγμῆς Α ὡς ἐκ κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα ΑΒ ἴσην τῇ ΚΙ, ἂς γραφθῆ τὸ ἀπροσδιόριςον τόξον ΒΟ· ἂς ληφθῆ ἀκολούθως μία ἀκτὶς ἴση τῇ χορδῇ ΛΙ. Εκ τῆς ςιγμῆς Β ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ταύτην τὴν ἀκτῖνα, ἂς γραφθῆ τόξον τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ἀπροσδιόριςον ΒΟ εἰς Δ· ἂς ἐπιζευχθῆ ΑΔ, καὶ ἡ γωνία ΔΑΒ θέλει εἶναι ἴση τῇ δεδομένῃ Κ.

Διότι τὰ δύο τόξα ΒΔ, ΛΙ, ἔχουν ἀκτῖνας καὶ χορδὰς ἴσας· λοιπὸν εἶναι ἴσα (πρ. 4, 2.)· ἐπομένως ἡ γωνία ΒΑΔ = ΙΚΛ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε′.

Νὰ διαιρέσωμεν γωνίαν ἢ τόξον δεδομένον εἰς δύο ἴσα μέρη σχ. 74.

1.ον Εὰν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ τόξον ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη, ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β ὡς ἐκ κέντρων, καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα, γράφομεν δύο τόξα, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς Δ. Διὰ τῆς ςιγμῆς Δ καὶ τοῦ κέντρου Γ ἄγομεν τὴν ΓΔ, ἥτις θέλει τέμνει τὸ τόξον ΑΒ εἰς δύο ἴσα μερη εἰς τὴν ςιγμὴν Ε.

Διότι ἕκαςον τῶν δύο σημείων Γ καὶ Δ ἰσάκις ἀπέχει τῶν ἄκρων Α καὶ Β τῆς χορδῆς ΑΒ, λοιπὸν ἡ ΓΔ, εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον ταύτης τῆς χορδῆς· ἐπομένως διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὸ τόξον ΑΒ εἰς τὴν ςιγμὴν Ε. (προ. 6, 2).

2.ον Εὰν δὲ ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν ΑΓΒ, γράφομεν κατὰ πρῶτον ἐκ τῆς κορυφῆς Γ, ὡς ἐκ κέντρου, τὸ τόξον ΑΒ, ἔπειτα πράττομεν ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν· φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ ΓΔ θέλει διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν ΑΓΒ.

Σχόλιον. Διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν κάθε ἥμισυ ΑΕ, ΕΒ, εἰς δύο ἴσα μέρη· κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, διὰ διαδοχικῶν ὑποδιαιρέσεων, γωνία ἢ τόξον δεδομένον διαιρεῖται εἰς τέσσαρα, ὀκτώ, δεκαέξ, κ. τ. λ. ἴσα μέρη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ'.

Ἀπὸ δεδομένον σημεῖον Α, νὰ ἄξωμεν εὐθεῖαν παράλληλον ἄλλης δεδομένης ΒΓ. σχ. 75.

Εκ τοῦ σημείου Α, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ἀρκετὰ μεγάλην, γράφομεν τὸ ἀπροσδιόριστον τόξον ΕΟ· ἐκ τοῦ σημείου Ε ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα, γράφομεν τὸ τόξον ΔΖ, λαμβάνομεν ΕΔ = ΑΖ, καὶ ἐπιζευγνύοντες τὴν ΑΔ θέλομεν ἔχει τὴν ζητουμένην παράλληλον.

Διότι ἑνόνοντες τὴν ΑΕ, βλέπομεν ὅτι αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΕΖ, ΕΑΔ, εἶναι ἴσαι· λοιπὸν αἱ γραμμαὶ ΑΔ, ΕΖ εἶναι παράλληλοι. (24, 1).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'.

Δεδομένων δύο γωνιῶν Α καὶ Β ἑνὸς τριγώνου, νὰ εὕρωμεν τὴν τρίτην. σχ. 76.

Ας ἀχθῇ ἡ ἀπροσδιόριστος γραμμὴ ΔΕΖ, ἂς κατασκευασθῇ εἰς τὴν στιγμὴν Ε, ἡ γωνία ΔΕΓ = Α, καὶ ἡ ΓΕΘ = Β. Η γωνία ΘΕΖ θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη τρίτη· διότι αἱ τρεῖς αὗται γωνίαι ὁμοῦ λαμβανόμεναι δίδουν δι' ἄθροισμα δύο ὀρθάς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η′.

Δεδομένων δύο πλευρῶν Β καὶ Γ ἑνὸς τριγώνου καὶ τῆς περιεχομένης ὑπ' αὐτῶν γωνίας Α, νὰ γράψωμεν τὸ τρίγωνον σχ. 77.

Αχθείσης τῆς ἀπροσδιορίςου ΔΕ, ἄς κατασκευασθῇ εἰς τὴν ςιγμὴν Δ ἡ γωνία ΕΔΖ ἴση τῇ δεδομένῃ Α· ἄς ληφθῇ ἀκολούθως ΔΗ=Β, καὶ ΔΘ=Γ, ἄς ἐπιζευχθῇ ΗΘ καὶ ΔΗΘ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ′.

Δεδομένων μιᾶς πλευρᾶς καὶ δύο γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου, νὰ γράψωμεν τὸ τρίγωνον.

Η καὶ αἱ δύο δεδομέναι γωνίαι πρέπει νὰ ἦναι προσκείμεναι εἰς τὴν δεδομένην πλευρὰν, ἢ ἡ μία προσκειμένη, καὶ ἡ ἄλλη ἀπέναντι: εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίςασιν, ζητοῦμεν τὴν τρίτην (πρόβ. 7), καὶ οὕτως ἔχομεν τὰς δύο προσκειμένας. Τούτου τεθέντος, ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΕ ἴσην τῇ δεδομένῃ πλευρᾷ, κάμνομεν εἰς τὴν ςιγμὴν Δ τὴν γωνίαν ΕΔΖ ἴσην μὲ τὴν μίαν τῶν προσκειμένων γωνιῶν, καὶ εἰς τὴν ςιγμὴν Ε τὴν ΔΕΗ ἴσην μὲ τὴν ἄλλην· αἱ δύο γραμμαὶ ΔΖ, ΕΗ, θέλουν τέμνεσθαι εἰς Θ, καὶ ΔΕΘ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον σχ. 78.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι′.

Δεδομένων τῶν τριῶν πλευρῶν Α, Β, Γ ἑνὸς τριγώνου, νὰ γράψωμεν τὸ τρίγωνον.

Ας ἀχθῇ ἡ ΔΕ ἴση τῇ πλευρᾷ Α· ἐκ τῆς ςιγμῆς Ε ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ δευτέρᾳ πλευρᾷ Β, ἄς γραφθῇ τόξον· ἐκ τῆς ςιγμῆς Δ ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ τρίτῃ πλευρᾷ Γ ἄς γραφθῇ ἄλλο τόξον, τὸ ὁποῖον θέλει τέμνει τὸ πρῶτον εἰς Ζ· ἄς ἐπιζευχθῶσι ΔΖ, ΕΖ, καὶ ΔΕΖ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον. σχ. 79.

Σχόλιον. Ἐὰν μία τῶν πλευρῶν ἦτον μεγαλητέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, τὰ τόξα δὲν ἤθελον τέμνεσθαι· ἀλλ' ὁσάκις τὸ ἄθροισμα δύο πλευρῶν λαμβανόμενον ὁπωςδήποτε εἶναι μεγαλήτερον τῆς τρίτης, ἡ λύσις εἶναι πάντοτε δυνατή.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΑ'.

Δεδομένων δύο πλευρῶν Α καὶ Β ἑνὸς τριγώνου, καὶ τῆς γωνίας Γ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς Β, νὰ γράψωμεν τὸ τρίγωνον. σχ. 80.

Δύο περιςάσεις ὑπάρχουν. 1.ον Ἐὰν ἡ γωνία Γ ἦναι ὀρθὴ ἡ ἀμβλεῖα, ἂς κατασκευασθῇ ἡ γωνία ΕΔΖ ἴση τῇ Γ· ἂς ληφθῇ ΔΕ = Α· ἐκ τῆς ςιγμῆς Ε, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ δεδομένῃ πλευρᾷ Β, ἂς γραφθῇ τόξον τὸ ὁποῖον τέμνει εἰς Ζ τὴν ΔΖ· ἂς ἐπιζευχθῇ ΕΖ, καὶ ΔΕΖ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

Εἰς τὴν πρώτην ταύτην περίςασιν πρέπει ἡ πλευρὰ Β νὰ ἦναι μεγαλητέρα τῆς Α, διότι ἡ γωνία Γ οὖσα ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα εἶναι ἡ μεγαλητέρα τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου· λοιπὸν ἡ ἀπέναντι πλευρὰ πρέπει ὁμοίως νὰ ἦναι ἡ μεγαλητέρα.

2.ον Ἐὰν ἡ γωνία Γ ἦναι ὀξεῖα, καὶ Β μεγαλητέρα τῆς Α ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ἔχει χώραν, καὶ ΔΕΖ εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον. σχ. 81.

Ἀλλ' ἐὰν ἐν ᾧ Γ εἶναι ὀξεῖα, ἡ πλευρὰ Β ἦναι μείζων τῆς Α, τότε τὸ γραφόμενον τόξον ἐκ τοῦ κέντρου Ε μὲ τὴν ἀκτῖνα ΕΖ = Β, θέλει τέμνει τὴν πλευρὰν ΔΖ εἰς δύο σημεῖα Ζ καὶ Η θεμένα ἐκ τοῦ αὐτοῦ μέρους τοῦ Δ· θέλουν ὑπάρχει λοιπὸν δύο τρίγωνα ΔΕΖ, ΔΕΗ, ἐπίσης πληροῦντα εἰς τὸ πρόβλημα ὡς ἔχοντα τὰ αὐτὰ δοθέντα. σχ. 82.

Σχόλιον. Τὸ πρόβλημα ἤθελεν εἶναι ἀδύνατον εἰς ὅλας τὰς περιςάσεις, ἐὰν ἡ πλευρὰ Β ἦτον μικροτέρα τῆς φερομένης καθέτου ἐκ τῆς ςιγμῆς Ε ἐπὶ τῆς ΔΖ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΒ΄.

Δεδομένων τῶν προσκειμένων πλευρῶν Α καὶ Β ἑνὸς παραλληλογράμμου καὶ τῆς περιεχομένης ὑπ᾽ αὐτῶν γωνίας Γ, νὰ γράψωμεν τὸ παραλληλόγραμμον. σχ. 83.

Ἄγομεν τὴν ΔΕ = Α, κάμνομεν εἰς τὴν στιγμὴν Δ τὴν γωνίαν ΖΔΕ = Γ, λαμβάνομεν ΔΖ = Β· γράφομεν δύο τόξα, τὸ μὲν ἐκ τῆς στιγμῆς Ζ ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ΖΗ = ΔΕ, τὸ δὲ ἐκ τῆς στιγμῆς Ε ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ ἀκτῖνα ΕΗ = ΔΖ : ἑνόνομεν τὴν στιγμὴν Η, ὅπου τὰ δύο ταῦτα τόξα τέμνονται, μὲ τὰς Ζ καὶ Ε, διὰ τῶν ΖΗ, ΕΗ· καὶ ΔΕΗΖ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμον.

Διότι, ἐκ τῆς κατασκευῆς, αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι· λοιπὸν τὸ γεγραμμένον σχῆμα εἶναι παραλληλόγραμμον (3ο, ι)· καὶ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο περιέχει τὰς δεδομένας πλευρὰς καὶ τὴν δεδομένην γωνίαν.

Πόρισμα. Ἐὰν ἡ δεδομένη γωνία ἦναι ὀρθὴ, τὸ σχῆμα θέλει εἶναι ὀρθογώνιον· ἐὰν, περιπλέον, καὶ αἱ πλευραὶ ἴσαι, θέλει εἶναι τετράγωνον.

ΠΛΟΒΛΗΜΑ ΙΓ΄.

Νὰ εὕρωμεν τὸ κέντρον κύκλου ἢ τόξου δεδομένου. σχ. 84.

Ἂς ληφθῶσι κατ᾽ ἀρέσκειαν εἰς τὴν περιφέρειαν ἢ εἰς τὸ τόξον τρία σημεῖα Α, Β, Γ· ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΒ καὶ ΒΓ, ἂς τμηθῶσι δίχα αἱ γραμμαὶ αὗται ὑπὸ τῶν καθέτων ΔΕ, ΖΗ. Η στιγμὴ Ο, ὅπου αὗται αἱ κάθετοι συναπαντῶνται, θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον κέντρον.

Σχόλιον. Η αὐτὴ κατασκευὴ χρησιμεύει εἰς τὸ νὰ κάμωμεν νὰ διέλθῃ περιφέρεια ἀπὸ τρεῖς δεδομένας στιγμὰς Α, Β, Γ, καὶ παρομοίως εἰς τὸ νὰ περιγράψωμεν περιφέρειαν εἰς δεδομένον τρίγωνον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔ΄.

Από δεδομένον σημεῖον νὰ ἄξωμεν ἐφαπτομένην εἰς δεδομένον κύκλον.

Ἐὰν τὸ δεδομένον σημεῖον Α ἦναι ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἅς ἐπιζευχθῇ ἡ ἀκτὶς ΓΑ, καὶ ἅς ἀχθῇ ΑΔ κάθετος εἰς τὴν ΓΑ, ΑΔ θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη. (9, 2) σχ. 85.

Ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον Α ἦναι ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἅς ἑνωθῇ μὲ τὸ κέντρον διὰ τῆς εὐθείας ΓΑ· ἅς τμηθῇ δίχα ἡ ΓΑ εἰς τὴν στιγμὴν Ο· ἐκ τοῦ Ο, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΟΓ, ἅς γραφθῇ περιφέρεια ἥτις τέμνει τὴν δεδομένην εἰς τὴν στιγμὴν Β· ἅς ἐπιζευχθῇ ΑΒ, καὶ αὕτη θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη. σχ. 86.

Διότι ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΒ, ἡ γωνία ΓΒΑ εἶναι ὀρθὴ ὡς ἐγγεγραμμένη ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ (18, 2)· λοιπὸν ΑΒ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΓΒ, ἀκολούθως εἶναι ἐφαπτομένη.

Σχόλιον. Ὅταν τὸ σημεῖον Α ἦναι ἐκτὸς τοῦ κύκλου, βλέπομεν ὅτι ὑπάρχουν πάντοτε δύο ἐφαπτόμεναι ἴσαι ΑΒ, ΑΔ αἵτινες διέρχονται διὰ τοῦ Α: ἴσαι, διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΒΑ, ΓΔΑ, ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν ΓΑ κοινήν, καὶ τὴν πλευρὰν ΓΒ=ΓΔ· λοιπὸν εἶναι ἴσα (18, 1) ἑπομένως ΑΔ=ΑΒ, καὶ ἐνταῦτῷ ἡ γωνία ΓΑΔ=ΓΑΒ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΕ΄.

Νὰ ἐγγράψωμεν κύκλον εἰς τὸ δεδομένον τρίγωνον ΑΒΓ. σχ. 87.

Ἅς τμηθῶσι δίχα αἱ γωνίαι Α καὶ Β ὑπὸ τῶν γραμμῶν ΑΟ καὶ ΒΟ αἵτινες συναπαντῶνται εἰς Ο. Ἐκ τῆς στιγμῆς Ο ἅς κατεβασθῶσιν αἱ κάθετοι ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ ἐπὶ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου· λέγω ὅτι αἱ κάθετοι αὗται εἶναι ἴσαι μεταξύ των· διότι, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ γωνία ΔΑΟ=ΟΑΖ, ἡ ὀρθὴ γωνία ΑΔΟ=ΑΖΟ· λοιπὸν ἡ τρίτη ΑΟΔ εἶναι ἴση τῇ τρίτῃ ΑΟΖ. Ἀπὸ ἄλλο μέρος ἡ πλευρὰ ΑΟ εἶναι κοινὴ εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΑΟΔ, ΑΟΖ, καὶ αἱ προσκείμεναι γωνίαι εἰς τὴν ἴσην πλευρὰν εἶναι ἴσαι· λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἴσα· ἐπομένως ΔΟ = ΟΖ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύομεν ὅτι τὰ δύο τρίγωνα ΒΟΔ, ΒΟΕ, εἶναι ἴσα· λοιπὸν ΟΔ = ΟΕ, λοιπὸν αἱ τρεῖς κάθετοι ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ, εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

Τώρα ἐὰν ἐκ τῆς στιγμῆς Ο, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΟΔ, γραφθῇ περιφέρεια, φανερὸν εἶναι ὅτι θέλει εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ· διότι ἡ πλευρὰ ΑΒ κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΟΔ, εἶναι ἐφαπτομένη: τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΑΓ.

Σχόλιον. Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἵτινες τέμνουν δίχα τὰς τρεῖς γωνίας ἑνὸς τριγώνου, συντρέχουν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙϚʹ.

Ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ, νὰ γράψωμεν τμῆμα ἱκανὸν νὰ χωρέσῃ τὴν δεδομένην γωνίαν Γ, τουτέστι, τμῆμα τοιοῦτον ὥστε ὅλαι αἱ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι νὰ ἦναι ἴσαι μὲ τὴν δεδομένην Γ. σχ. 88 καὶ 89.

Ἂς προεκβληθῇ ΑΒ πρὸς τὸ Δ, ἂς γένῃ εἰς τὴν στιγμὴν Β ἡ γωνία ΔΒΕ = Γ, ἂς ὑψωθῇ ἡ ΒΟ κάθετος εἰς τὴν ΒΕ καὶ ΗΟ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ· ἐκ τῆς στιγμῆς τῆς συναπαντήσεως Ο, ὡς ἐκ κέντρου, καὶ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΟΒ, ἂς γραφθῇ κύκλος, τὸ ζητούμενον τμῆμα θέλει εἶναι ΑΜΒ.

Διότι ἐπειδὴ ΒΖ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΟΒ, εἶναι ἐφαπτομένη, καὶ ἡ γωνία ΑΒΖ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΚʹΒ (19, 2)· ἀπὸ ἄλλο μέρος ἡ γωνία ΑΜΒ, ὡς ἐγγεγραμμένη, ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΚʹΒ, λοιπὸν ἡ γωνία ΑΜΒ = ΑΒΖ = ΕΒΔ = Γ· λοιπὸν ὅλαι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἰς τὸ τμῆμα ΑΜΒ εἶναι ἴσαι μὲ τὴν δεδομένην Γ.

Σχόλιον. Εὰν ἡ δεδομένη γωνία ἦτον ὀρθὴ, τὸ ζητούμενον τμῆμα ἤθελεν εἶναι τὸ γεγραμμένον ἡμικύκλιον ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΖ'.

Νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμητικὸν λόγον δύο δεδομένων εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ, ἐὰν ὅμως ἔχωσι κοινὸν μέτρον μεταξύ των. σχ. 90.

Φέρομεν τὴν μικροτέραν ΓΔ ἐπὶ τῆς μεγαλητέρας ΑΒ τοσάκις ὁσάκις εἶναι δυνατὸν νὰ περιέχεται· παραδείγματος χάριν, δὶς, μὲ τὸ ὑπόλοιπον ΒΕ.

Φέρομεν τὸ ὑπόλοιπον ΒΕ ἐπὶ τῆς ΓΔ, τοσάκις ὁσάκις εἶναι δυνατὸν νὰ περιέχεται, μίαν φορὰν, παραδείγματος χάριν, μὲ τὸ ὑπόλοιπον ΔΖ.

Φέρομεν τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον ΔΖ ἐπὶ τοῦ πρώτου ΒΕ, τοσάκις ὁσάκις εἶναι δυνατὸν νὰ περιέχεται, μίαν φορὰν, παραδείγματος χάριν, μὲ τὸ ὑπόλοιπον ΒΗ.

Φέρομεν τὸ τρίτον ὑπόλοιπον ΒΗ ἐπὶ τοῦ δευτέρου ΔΖ, τοσάκις ὁσάκις εἶναι δυνατὸν νὰ περιέχεται.

Εξακολουθοῦμεν οὕτως ἕως οὗ νὰ φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον τὸ ὁποῖον ἀκριβῶς νὰ περιέχεται εἰς τὸ προηγούμενον.

Τότε τὸ τελευταῖον τοῦτο ὑπόλοιπον θέλει εἶναι τὸ κοινὸν μέτρον τῶν δεδομένων γραμμῶν, καὶ θεωροῦντές το ὡς μονάδα, εὑρίσκομεν εὐκόλως τὰς τιμὰς τῶν προηγουμένων ὑπολοίπων καὶ τέλος τὰς τῶν δεδομένων γραμμῶν, διὰ τῶν ὁποίων προσδιορίζομεν τὸν ἀριθμητικὸν λόγον των ἢ τὸν λόγον των ἐκφραζόμενον δι' ἀριθμῶν.

Εὰν, π. χ, εὕρωμεν ὅτι ΗΒ περιέχεται ἀκριβῶς δὶς εἰς ΖΔ, ΒΗ θέλει εἶναι τὸ κοινὸν μέτρον τῶν δεδομένων γραμμῶν. Εςω ΒΗ = 1, θέλομεν ἔχει ΖΔ=2· ἀλλὰ ΕΒ περιέχει μίαν φορὰν ΖΔ πλέον ΗΒ· λοιπὸν ΕΒ=3. ΓΔ περιέχει μίαν φορὰν ΕΒ πλέον ΖΔ· λοιπὸν ΓΔ=5· τέλος ΑΒ περιέχει δὶς τὴν ΓΔ πλέον ΕΒ· λοιπὸν ΑΒ=13· διὰ τοῦτο ὁ λόγος τῶν δύο γραμμῶν ΑΒ, ΓΔ εἶναι ὁ τοῦ 13 πρὸς 5. Ἐὰν ἡ ΓΔ ἐλαμβάνετο ὡς μονάς, ἡ ΑΒ ἤθελεν εἶναι $\frac{13}{5}$· ἐὰν δὲ ἡ ΑΒ ἐλαμβάνετο ὡς μονάς, ἡ ΓΔ ἤθελεν εἶναι $\frac{5}{13}$.

Σχόλιον. Ἡ ἐκτεθεῖσα μέθοδος εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ ἐκείνην τὴν ὁποίαν δίδει ἡ Ἀριθμητικὴ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν· διὰ τοῦτο δὲν ἔχει χρείαν ἄλλης ἀποδείξεως.

Δυνατὸν ὅσον μακρὰν καὶ ἂν ἐξακολουθήσωμεν τὴν ἐργασίαν, νὰ μὴ εὕρωμεν ὑπόλοιπον τὸ ὁποῖον ἀκριβῶς νὰ περιέχεται εἰς τὸ προηγούμενον. Τότε αἱ δύο γραμμαὶ δὲν ἔχουν μέτρον, καὶ λέγονται ἀσύμμετροι (incommensurables): ἐντὸς ὀλίγου θέλομεν ἰδεῖ ἓν παράδειγμα εἰς τὸν λόγον τῆς διαγωνίου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου. Τότε λοιπὸν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρωμεν τὸν ἀκριβῆ λόγον δι' ἀριθμῶν· ἀλλὰ παραβλέποντες τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον, εὑρίσκομεν λόγον περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον πλησιάζοντα εἰς τὸν ἀληθινόν, καθὼς ἐκτείνωμεν τὴν ἐργασίαν περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΗ'.

Δεδομένων δύο γωνιῶν Β καὶ Α, νὰ εὕρωμεν τὸ κοινὸν μέτρον των, ἐὰν ἔχωσι, καὶ ἐκ τούτου τὸν λόγον των εἰς ἀριθμούς. σχ. 91.

Ἄς γραφθῶσι μὲ ἴσας ἀκτῖνας τὰ τόξα ΓΔ, ΕΖ, τὰ ὁποῖα μετροῦσι ταύτας τὰς γωνίας· ἀκολούθως πράττομεν διὰ τὴν σύγκρισιν τῶν τόξων ΓΔ, ΕΖ, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα· διότι ἓν τόξον δύναται νὰ φερθῇ ἐπὶ ἄλλου τῆς ἰδίας ἀκτῖνος, καθὼς εὐθεῖα ἐπὶ εὐθείας. Οὕτω θέλομεν φθάσει εἰς τὸ κοινὸν μέτρον τῶν τόξων ΓΔ, ΕΖ, ἐὰν ἔχωσι, καὶ εἰς τὸν ἀριθμητικόν των λόγον. Ὁ λόγος οὗτος θέλει εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ ἐκεῖνον τῶν δεδομένων γωνιῶν

(17, 2) καὶ ἐὰν ΔΟ ἦναι τὸ κοινὸν μέτρον τῶν τόξων, ΑΔΟ θέλει εἶναι τὸ τῶν γωνιῶν.

Σχόλιον. Δυνάμεθα παρομοίως νὰ εὕρωμεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν μιᾶς γωνίας συγκρίνοντες τὸ τόξον ὁποῦ μετρεῖ αὐτὴν μὲ ὅλην τὴν περιφέρειαν: ἐὰν π. χ. τὸ τόξον ΓΔ ἦναι πρὸς τὴν περιφέρειαν ὡς 3 πρὸς 25, ἡ γωνία Α θέλει εἶναι τὰ $\frac{3}{25}$ τεσσάρων ὀρθῶν, ἢ τὰ $\frac{12}{25}$ τῆς ὀρθῆς.

Δυνατὸν νὰ ἀκολουθήσῃ ὁποῦ τὰ συγκρινόμενα τόξα νὰ μὴ ἔχουν κοινὸν μέτρον· τότε διὰ τὰς γωνίας θέλομεν ἔχει λόγους περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον πλησιάζοντας εἰς τὸν ἀληθινόν, καθὼς ἐκτείνωμεν τὴν ἐργασίαν περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον.

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'.

ΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ ΤΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Καλῶ σχήματα ἰσοδύναμα ἐκεῖνα τῶν ὁποίων αἱ ἐπιφάνειαι εἶναι ἴσαι.

Δύο σχήματα ἠμποροῦν νὰ ἦναι ἰσοδύναμα, ἂν καὶ πολλὰ ἀνόμοια: κύκλος, παραδείγματος χάριν, ἠμπορεῖ νὰ ἰσοδυναμῇ μὲ τετράγωνον, τρίγωνον μὲ ὀρθογώνιον κ.τ.λ.

Τὴν ὀνομασίαν ἴσα σχήματα θέλω ἀποδίδει εἰς ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα ἐπιτιθέμενα ἐφαρμόζουσιν εἰς ὅλα των τὰ σημεῖα: τοιαῦτα εἶναι δύο κύκλοι τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι, δύο τρίγωνα τῶν ὁποίων αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι ἴσαι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν κ. τ. λ.