ΒΙΒΛΙΟΝ Β'.

Ο ΚΥΚΛΟΣ ΚΑΙ ΤΟ ΜΕΤΡΟΝ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Η περιφέρεια του κύκλου είναι γραμμή τις καμπύλη της οποίας όλα τα σημεία ισάκις απέχουσιν από έν εντός αυτής σημείον καλούμενον κέντρον.

Ο κύκλος είναι το περατούμενον χωρίον από ταύτην την καμπύλην γραμμήν.

Σ. Κ. Ενίοτε εις την ομιλίαν συγχέομεν τον κύκλον με την περιφέρειάν του· αλλ' ευκόλως δυνάμεθα να αποφεύγωμεν την σύγχυσιν ταύτην και να αντικαθιςώμεν την ακρίβειαν των εκφράσεων, ενθυμούμενοι ότι ο κύκλος είναι επιφάνεια ήτις έχει μήκος και πλάτος, εν ῷ η περιφέρεια είναι γραμμή.

Β. Κάθε ευθεία γραμμή ΓΑ, ΓΕ, ΓΔ, κ. τ. λ. αγομένη εκ του κέντρου εις την περιφέρειαν, καλείται ακτίς ή ημιδιάμετρος, κάθε δε γραμμή, ως ΑΒ, διερχομένη εκ του κέντρου, και από τα δύο μέρη περατουμένη εις την περιφέρειαν, λέγεται διάμετρος.

Κατά τον ορισμόν του κύκλου, όλαι αι ακτίνες είναι ίσαι· όλαι αι διάμετροι είναι ίσαι παρομοίως, και διπλάσιαι της ακτίνος.

Γ'. Καλείται τόξον μέρος της περιφερείας ως το ΖΘΗ.

Χορδή δε η υποτείνουσα του τόξου είναι η ευθεία ΖΗ η ενόνουσα τα δύο άκρα του.

Δ'. Τμῆμα εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἢ μέρος τοῦ κύκλου περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ τόξου καὶ τῆς χορδῆς.

Σ. Κ. Εἰς τὴν αὐτὴν χορδὴν ΖΗ ἀντίκεινται πάντοτε δύο τόξα ΖΘΗ, ΖΕΗ, καὶ ἐπομένως δύο τμήματα· πλὴν πάντοτε ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ λόγος εἶναι περὶ τοῦ μικροτέρου, ἐν ὅσῳ δὲν ἐκφράζομεν τὸ ἐναντίον.

Ε'. Τομεὺς εἶναι τὸ μέρος τοῦ κύκλου τὸ περιεχόμενον μεταξὺ ἑνὸς τόξου ΔΕ καὶ τῶν δύο ἀκτίνων ΓΔ, ΓΕ, ἠγμένων εἰς τὰ ἄκρα τούτου τοῦ τόξου.

Ϛ'. Καλεῖται γραμμὴ ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον, ἐκείνη τῆς ὁποίας τὰ δύο ἄκρα εἶναι εἰς τὴν περιφέρειαν, ὡς ΑΒ. (σχ. 47.).

Γωνία ἐγγεγραμμένη, ἡ ἔχουσα τὴν κορυφήν της εἰς τὴν περιφέρειαν, καὶ σχηματιζομένη ἀπὸ δύο χορδάς. Τοιαύτη εἶναι ἡ ΒΑΓ.

Τρίγωνον ἐγγεγραμμένον, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς γωνίαι ἔχουν τὰς κορυφάς των εἰς τὴν περιφέρειαν, ὡς τὸ ΒΑΓ.

Καὶ ἐν γένει σχῆμα ἐγγεγραμμένον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ γωνίαι ἔχουν τὰς κορυφάς των εἰς τὴν περιφέρειαν: εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν λέγεται ὁ κύκλος περιγεγραμμένος εἰς τοῦτο τὸ σχῆμα.

Ζ'. Καλεῖται διατέμνουσα ἡ γραμμὴ ἥτις συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο σημεῖα: τοιαύτη εἶναι ἡ ΑΒ (σχ. 48.).

Η'. Ἐφαπτομένη εἶναι γραμμὴ ἔχουσα ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν περιφέρειαν: τοιαύτη εἶναι ἡ ΓΔ. Η κοινὴ στιγμὴ Μ λέγεται σημεῖον τῆς ἁφῆς.

Θ'. Παρομοίως δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται ἀλλήλων, ὅταν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχωσι.

Ι'. Πολύγωνον περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον εἶναι ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ ἐφάπτονται τῆς περιφερείας. Εἰς τὴν αὐτὴν περίςασιν ὁ κύκλος εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ πολύγωνον. σχ. 160.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΠΡΩΤΗ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Κάθε διάμετρος ΑΒ διαιρεῖ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειάν του εἰς δύο ἴσα μέρη. (σχ. 49.).

Διότι ἐὰν φυλάττοντες τὴν κοινὴν βάσιν ΑΒ τρέψωμεν τὸ σχῆμα ΑΕΒ ἐπὶ τοῦ ΑΖΒ, πρέπει ἡ καμπύλη γραμμὴ ΑΕΒ νὰ πέσῃ ἀκριβῶς ἐπὶ τῆς καμπύλης ΑΖΒ· ἐπειδὴ, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι πίπτει ἐντὸς ἢ ἐκτὸς αὐτῆς, ἤθελον ὑπάρχει εἰς τὴν μίαν ἢ εἰς τὴν ἄλλην σημεῖα ἀνισάκις ἀπέχοντα τοῦ κέντρου, τὸ ὁποῖον ἐναντιοῦται εἰς τὸν ὁρισμὸν τοῦ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Κάθε χορδὴ εἶναι μικροτέρα τῆς διαμέτρου.

Διότι ἐὰν εἰς τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς ΑΔ ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΑΓ, ΓΔ, ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΔ θέλει εἶναι ἐλάσσων ΑΓ + ΓΔ ἢ ΑΔ < ΑΒ. (σχ. 49.).

Πόρισμα. Λοιπὸν ἡ μεγαλητέρα εὐθεῖα γραμμὴ ἥτις δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς ἕνα κύκλον εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρόν του.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εὐθεῖα γραμμὴ δὲν δύναται νὰ συναπαντήσῃ περιφέρειαν κύκλου εἰς περισσότερα ἀπὸ δύο σημεῖα.

Διότι ἐὰν τὴν ἐσυναπαντοῦσεν εἰς τρία, τὰ τρία ταῦτα σημεῖα ἰσάκις ἤθελον ἀπέχει τοῦ κέντρου· ἤθελον ὑπάρχει λοιπὸν τρεῖς ἴσαι εὐθεῖαι ἠγμέναι ἐκ τοῦ ἰδίου σημείου ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ὅπερ ἀδύνατον (πρό. 16. βιβλ. 1.).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, τὰ ἴσα τόξα ὑποτείνονται ἀπὸ ἴσας χορδὰς, καὶ ἀντιςρόφως αἱ ἴσαι χορδαὶ ἴσα τόξα ὑποτείνουσι.

Ἐὰν ἡ ἀκτὶς ΑΓ ἦναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα ΕΟ, καὶ τὸ τόξον ΑΜΔ ἴσον μὲ τὸ τόξον ΕΝΗ, λέγω ὅτι ἡ χορδὴ ΑΔ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν χορδὴν ΕΗ. (σχ. 50.)

Διότι οὔσης τῆς διαμέτρου ΑΒ ἴσης μὲ τὴν διάμετρον ΕΖ, ἐὰν τὸ ἡμικύκλιον ΑΜΔΒ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἡμικυκλίου ΕΝΗΖ, θέλει ἐφαρμόσει ἐντελῶς μὲ αὐτὸ, καὶ ἡ καμπύλη γραμμὴ ΑΜΔΒ μὲ τὴν καμπύλην ΕΝΗΖ. Ἀλλὰ τὸ μέρος ΑΜΔ ὑποτίθεται ἴσον μὲ τὸ μέρος ΕΝΗ· λοιπὸν τὸ σημεῖον Δ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ Η· λοιπὸν ἡ χορδὴ ΑΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΕΗ.

Ἀντιςρόφως, ὑποτιθεμένης πάντοτε τῆς ἀκτῖνος ΑΓ = ΕΟ, ἐὰν ἡ χορδὴ ΑΔ = ΕΗ, λέγω ὅτι τὸ τόξον ΑΜΔ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τόξον ΕΝΗ.

Διότι ἐπιζευχθεισῶν τῶν ἀκτίνων ΓΔ, ΟΗ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΔ, ΕΟΗ, θέλουν ἔχει τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, δηλαδὴ, ΑΓ = ΕΟ, ΓΔ = ΟΗ, καὶ ΑΔ = ΕΗ· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα (11, 1)· ἀκολούθως ἡ γωνία ΑΓΔ = ΕΟΗ. Ἀλλ' ἐὰν τὸ ἡμικύκλιον ΑΔΒ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἴσου του ΕΗΖ, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΓΔ = ΕΟΗ, φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ ἀκτὶς ΓΔ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΟΗ, καὶ τὸ σημεῖον Δ ἐπὶ τοῦ σημείου Η· λοιπὸν τὸ τόξον ΑΜΔ εἶναι ἴσον μὲ τόξον ΕΝΗ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, τὸ μεγαλήτερον τόξον ὑποτείνεται ἀπὸ τὴν μεγαλητέραν χορδὴν, καὶ ἀντιςρόφως, ἐὰν ὅμως τὰ τόξα περὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος ἦναι μικρότερα ἡμιπεριφερείας.

Διότι ἔςω, τὸ τόξον ΑΘ (σχ. 50) μεῖζον τοῦ ΑΔ, καὶ ἀχθήτωσαν αἱ χορδαὶ ΑΔ, ΑΘ, καὶ αἱ ἀκτῖνες ΓΔ, ΓΘ· αἱ δύο πλευραὶ ΑΓ, ΓΘ τοῦ τριγώνου ΑΓΘ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς δύο πλευρὰς ΑΓ, ΓΔ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ: ἡ γωνία ΑΓΘ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΑΓΔ· λοιπὸν (10, 1) ἡ τρίτη πλευρὰ ΑΘ εἶναι μεγαλητέρα τῆς τρίτης ΑΔ· λοιπὸν ἡ χορδὴ ἡ ὑποτείνουσα τὸ μεγαλήτερον τόξον εἶναι ἡ μεγαλητέρα.

Ἀντιςρόφως, ἐὰν ἡ χορδὴ ΑΘ ὑποτεθῇ μεγαλητέρα τῆς ΑΔ, θέλομεν συνάξει ἐκ τῶν ἰδίων τριγώνων ὅτι ἡ γωνία ΑΓΘ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΑΓΔ, καὶ οὕτως τὸ τόξον ΑΘ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ΑΔ.

Σχόλιον. Υποθέτομεν ὅτι τὰ τόξα περὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἶναι μικρότερα τῆς ἡμιπεριφερείας. Ἐὰν τὰ τόξα ἦσαν μεγαλήτερα, ἤθελεν ὑπάρχει ἡ ἐναντία ἰδιότης· τοῦ τόξου αὐξανομένου, ἡ χορδὴ ἤθελε σμικρύνει, καὶ ἀντιςρόφως· οὕτως ἐν ᾧ τὸ τόξον ΑΚΒΔ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ΑΚΒΘ, ἡ χορδὴ ΑΔ τοῦ πρώτου εἶναι μικροτέρα τῆς χορδῆς ΑΘ τοῦ δευτέρου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Η ἀκτὶς ΓΗ (σχ. 51), κάθετος ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΒ διαιρεῖ ταύτην τὴν χορδὴν καὶ τὸ ὑποτεινόμενον τόξον ΑΗΒ, εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ας ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΓΑ, ΓΒ· αἱ ἀκτῖνες αὗται, ὡς πρὸς τὴν κάθετον ΓΔ, εἶναι δύο ἴσαι πλάγιαι· λοιπὸν ἰσάκις ἀπομακρύνονται τῆς καθέτου (16, 1), ὅθεν ΑΔ = ΔΒ.

Δεύτερον, ἐπειδὴ ΑΔ = ΔΒ, ΓΗ εἶναι κάθετος ὑψωμένη εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ· λοιπὸν (17, 1) κάθε σημεῖον ταύτης τῆς καθέτου ἰσάκις πρέπει νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα Α καὶ Β. Μεταξὺ τούτων εἶναι καὶ τὸ Η· λοιπὸν τὸ διάστημα ΑΗ = ΒΗ· ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι τὸ τόξον ΑΗ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τόξον ΒΗ (πρό. 4.)· λοιπὸν ἡ ἀκτὶς ΓΗ, κάθετος εἰς τὴν χορδὴν ΑΒ, διαιρεῖ τὸ ὑποτεινόμενον τόξον ἀπὸ αὐτὴν εἰς δύο ἴσα μέρη.

Σχόλιον. Τὸ κέντρον Γ, τὸ μέσον Δ τῆς χορδῆς ΑΒ, καὶ τὸ μέσον Η τοῦ ὑποτεινομένου ἀπὸ αὐτὴν τόξου, εἶναι τρία σημεῖα εὑρισκόμενα ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καθέτου εἰς τὴν χορδήν. Τώρα ἐπειδὴ διὰ τὴν προσδιόρισιν τῆς θέσεως μιᾶς εὐθείας, ἀρκοῦσι δύο σημεῖα· ἕπεται ὅτι κάθε εὐθεῖα διερχομένη ἀπὸ δύο τῶν εἰρημένων σημείων, διέρχεται καὶ ἐκ τοῦ τρίτου, καὶ εἶναι κάθετος εἰς τὴν χορδήν.

Επεται ὡσαύτως ὅτι ἡ ὑψωμένη κάθετος εἰς τὸ μέσον μιᾶς χορδῆς διέρχεται ἐκ τοῦ κέντρου καὶ τοῦ μέσου τοῦ ὑποτεινομένου ἀπὸ τὴν χορδὴν τόξου.

Διότι ἡ κάθετος ἄλλο τι δὲν εἶναι παρὰ ἐκείνη ἥτις ἤθελε κατεβασθῆ ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ τῆς ἰδίας χορδῆς, ἐπειδὴ καὶ αἱ δύο διέρχονται ἐκ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εκ τριῶν μὴ ἐπ' εὐθείας δεδομένων στιγμῶν Α, Β, Γ, πάντοτε εἶναι δυνατὸν νὰ διέλθῃ περιφέρεια κύκλου, καὶ δὲν εἶναι δυνατὸν παρὰ μία μόνη νὰ διέλθῃ.

Ας ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἂς τμηθῶσι δίχα ὑπὸ τῶν καθέτων ΔΕ, ΖΗ· λέγω κατὰ πρῶτον ὅτι αἱ κάθετοι αὗται συναπαντῶνται εἰς ἓν σημεῖον Ο.

Εὰν αἱ γραμμαὶ ΔΕ, ΖΗ δὲν ἦναι παράλληλοι, ἀναγκαίως τέμνονται. Ας ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι παράλληλοι· ἡ γραμμὴ ΑΒ, κάθετος εἰς τὴν ΔΕ, ἤθελεν εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὴν ΖΗ (24, 1), καὶ ἡ γωνία Κ' ἤθελεν εἶναι ὀρθή· ἀλλὰ ΒΚ' προεκβολὴ τῆς ΒΔ εἶναι διαφορετικὴ τῆς ΒΖ, διότι τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ δὲν εἶναι ἐπ' εὐθείας· λοιπὸν ἤθελον ὑπάρχει δύο κάθετοι ΒΖ, ΒΚ' ἠγμέναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ τῆς ἰδίας γραμμῆς, ὅπερ ἀδύνατον (15, 1)· λοιπὸν αἱ γραμμαὶ ΔΕ, ΖΗ τέμνονται πάντοτε εἰς ἓν σημεῖον Ο.

Τώρα τὸ σημεῖον Ο, ἐπειδὴ ἀνήκει εἰς τὴν κάθετον ΔΕ, ἰσάκις ἀπέχει τῶν δύο σημείων Α καὶ Β (17, 1) τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἐπειδὴ ἀνήκει καὶ εἰς τὴν κάθετον ΖΗ, ἰσάκις ἀπέχει τῶν δύο σημείων Β καὶ Γ. Τὰ τρία λοιπὸν διαστήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, εἶναι ἴσα. Η γραφομένη λοιπὸν περιφέρεια ἐκ τοῦ Ο ὡς κέντρου μὲ τὴν ἀκτῖνα ΟΒ θέλει διέλθη ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα Α,Β,Γ.

Εκ τούτου ἀπεδείχθη ὅτι πάντοτε εἶναι δυνατὸν νὰ διέλθῃ περιφέρεια κύκλου ἐκ τριῶν δεδομένων στιγμῶν, μὴ ἐπ' εὐθείας· λέγω περιπλέον ὅτι μία μόνη δύναται νὰ διέλθῃ.

Διότι ἐὰν ὑπῆρχε μία δευτέρα περιφέρεια ἥτις νὰ διήρχετο ἀπὸ τὰ τρία δεδομένα σημεῖα Α, Β, Γ, τὸ κέντρον της δὲν ἠμποροῦσε νὰ εὑρίσκεται ἐκτὸς τῆς γραμμῆς ΔΕ (17, 1), ἐπειδὴ τότε ἀνισάκις ἤθελεν ἀπέχει τοῦ Α καὶ Β· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον δὲν ἠμποροῦσε νὰ εὑρίσκεται ἐκτὸς τῆς γραμμῆς ΖΗ· λοιπὸν ἤθελεν εὑρίσκεται εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἐπὶ τῶν δύο γραμμῶν ΔΕ, ΖΗ. Αλλὰ δύο εὐθεῖαι εἰς ἓν μόνον σημεῖον τέμνονται· λοιπὸν μία μόνη περιφέρεια ὑπάρχει ἥτις δύναται νὰ διέλθῃ ἀπὸ τὰς τρεῖς δεδομένας στιγμάς.

Πόρισμα. Δύο περιφέρειαι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ τέμνωνται εἰς περισσότερα τῶν δύο σημείων· ἐπειδὴ ἐὰν εἶχον τρία κοινά, ἤθελον ἔχει τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ δὲν ἤθελον σχηματίζει παρὰ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ἴσαι χορδαὶ ἰσάκις ἀπέχουσι τοῦ κέντρου· καὶ ἐκ δύο ἀνίσων, ἡ μικροτέρα ἀπέχει περισσότερον.

1.ον Εςω ἡ χορδὴ ΑΒ=ΔΕ, Ας τμηθῶσι δίχα αἱ χορδαὶ αὗται ὑπὸ τῶν καθέτων ΓΖ, ΓΗ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΓΑ, ΓΔ, (σχ. 53). Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΑΖ, ΔΓΗ, ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας ΓΑ, ΓΔ ἴσας· περιπλέον ἡ πλευρὰ ΑΖ ἥμισυ τῆς ΑΒ, εἶναι ἴση μὲ τὴν ΔΗ, ἥμισυ τῆς ΔΕ· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα (18. 1), καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ ΓΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν τρίτην ΓΗ· ὅθεν 1.ον αἱ δύο ἴσαι χορδαὶ ΑΒ, ΔΕ, ἰσάκις ἀπέχουσι τοῦ κέντρου.

2.ον Εςω ἡ χορδὴ ΑΘ μεγαλητέρα τῆς ΔΕ, τὸ τόξον ΑΚΘ θέλει εἶναι μεῖζον τοῦ ΔΜΕ (πρό. 5); ἂς ληφθῇ ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΚΘ τὸ μέρος ΑΝΒ=ΔΜΕ, ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ χορδὴ ΑΒ, καὶ ἂς κατεβασθῇ ἡ ΓΖ κάθετος εἰς ταύτην τὴν χορδὴν, καὶ ΓΙ, κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΘ· φανερὸν εἶναι ὅτι ΓΖ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΓΟ, καὶ ΓΟ μεγαλητέρα τῆς ΓΙ (16, 1)· λοιπὸν πολὺ περισσότερον ΓΖ > ΓΙ. Ἀλλὰ ΓΖ=ΓΗ, ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΔΕ εἶναι ἴσαι· λοιπὸν ἔχομεν ΓΗ > ΓΙ· ἕπεται λοιπὸν ὅτι ἐκ δύο ἀνίσων χορδῶν ἡ μικροτέρα ἀπέχει περισσότερον τοῦ κέντρου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Η κάθετος ΒΔ, ἠγμένη εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΓΑ εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὴν περιφέρειαν. σχ. 54.

Διότι κάθε πλαγία ΓΕ εἶναι μεγαλητέρα τῆς καθέτου ΓΑ (16, 1)· λοιπὸν τὸ σημεῖον Ε εἶναι ἐκτὸς τοῦ κύκλου· διὰ τοῦτο ἡ ΒΔ ἄλλο κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν πεφέρειαν δὲν ἔχει εἰ μὴ τὸ Α· λοιπὸν ΒΔ εἶναι ἐφαπτομένη (όρ. 8.)

Σχόλιον. Ἀπὸ δεδομένου σημείου Α μία μόνη ἐφαπτομένη ΑΔ εἰς τὴν περιφέρειαν δύναται νὰ ἀχθῇ· διότι ἐὰν ἦτον δυνατὸν νὰ ἀχθῇ μία ἄλλη, αὕτη δὲν ἤθελεν εἶναι πλέον κάθετος εἰς τὴν ἀκτῖνα ΓΑ· λοιπὸν ὡς πρὸς τὴν νέαν ταύτην ἐφαπτομένην, ἡ ἀκτὶς ΓΑ ἤθελεν εἶναι πλαγία, καὶ ἡ κάθετος, ἠγμένη ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ ταύτης τῆς ἐφαπτομένης, ἤθελεν εἶναι μικροτέρα τῆς ΓΑ· λοιπὸν ἡ ἐφαπτομένη αὕτη ἤθελεν εἰσέρχεται εἰς τὸν κύκλον, καὶ ἤθελεν εἶναι διατέμνουσα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο παράλληλοι ΑΒ, ΔΕ, χωρίζουσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας τόξα ἴσα ΜΝ, ΠΚ. σχ. 55.

Τρεῖς περιστάσεις δυνατὸν νὰ ἀκολουθήσουν.

1.ον Ἐὰν αἱ δύο παράλληλοι ἦναι διατέμνουσαι, ἂς ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΓΘ κάθετος εἰς τὴν χορδὴν ΜΠ, εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὴν παράλληλόν της ΝΚ (24, 1)· λοιπὸν τὸ σημεῖον Θ θέλει εἶναι ἐνταυτῷ τὸ μέσον τοῦ τόξου ΜΘΠ καὶ τοῦ τόξου ΝΘΚ (πρ. 6.) λοιπὸν θέλομεν ἔχει τὸ τόξον ΜΘ=ΘΠ, καὶ τὸ τόξον ΝΘ=ΘΚ: ἐκ τούτου ἔπεται ΜΘ—ΝΘ=ΘΠ—ΘΚ, τουτέστι ΜΝ=ΠΚ.

2.ον Ἐὰν ἐκ τῶν δύο παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ, ἡ μία ἦναι διατέμνουσα, καὶ ἡ ἄλλη ἐφαπτομένη· εἰς τὴν στιγμὴν τῆς ἀφῆς Θ ἂς ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΓΘ· αὕτη θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὴν ἐφαπτομένην ΔΕ (πρ. 9.) καὶ εἰς τὴν παράλληλόν της ΜΠ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ΓΘ εἶναι κάθετος εἰς τὴν χορδὴν ΜΠ, τὸ σημεῖον Θ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΜΘΠ· λοιπὸν τὰ τόξα ΜΘ, ΘΠ περιεχόμενα μεταξὺ τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ εἶναι ἴσα.

3.ον Τέλος ἐὰν αἱ δύο παράλληλοι ΔΕ, ΙΛ ἦναι ἐφαπτόμεναι, ἡ μὲν εἰς Θ, ἡ δὲ εἰς Κ', ἂς ἀχθῇ ἡ διατέμνουσα παράλληλος ΑΒ, θέλομεν ἔχει, ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων ΜΘ=ΘΠ καὶ ΜΚ'=Κ'Π· λοιπὸν τὸ ὅλον τόξον ΘΜΚ'=ΘΠΚ', καὶ περιπλέον βλέπομεν ὅτι ἕκαστον τούτων τῶν τόξων εἶναι ἡμιπεριφέρεια.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν δύο περιφέρειαι τέμνωνται εἰς δύο σημεῖα, ἡ διερχομένη γραμμὴ ἀπὸ τὰ κέντρα των θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὴν χορδὴν ἥτις ἑνόνει τὰ σημεῖα τῆς κοινῆς τομῆς, καὶ θέλει τὴν διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη. σχ. 57 καὶ 58.

Διότι ἡ γραμμὴ ΑΒ, ἡ ἑνόνουσα τὰ σημεῖα τῆς κοινῆς τομῆς, εἶναι κοινὴ χορδὴ εἰς τοὺς δύο κύκλους. Τώρα ἐὰν εἰς τὸ μέσον ταύτης τῆς χορδῆς ὑψωθῇ μία κάθετος, αὐτὴ πρέπει νὰ διέλθῃ ἀπὸ καθὲν τῶν δύο κέντρων Γ καὶ Δ. (πρὸ. 6.) Ἀλλ' ἐκ δύο δεδομένων σημείων μία μόνη εὐθεῖα δύναται νὰ ἀχθῇ· λοιπὸν ἡ διερχομένη εὐθεῖα ἀπὸ τὰ κέντρα, θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς κοινῆς χορδῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων δύο κύκλων ἦναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἡ μεγαλητέρα ἀκτὶς ἦναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῆς μικροτέρας καὶ τοῦ ἀποστήματος τῶν κέντρων, αἱ δύο περιφέρειαι θέλει τέμνονται. σχ. 57 καὶ 58.

Διότι διὰ νὰ ἔχῃ χώραν ἡ κοινὴ τομή, πρέπει τὸ τρίγωνον ΓΑΔ νὰ ὑπάρχῃ· πρέπει λοιπὸν ὄχι μόνον ΓΔ νὰ ἦναι $<$ ΑΓ + ΑΔ σχ. 57. ἀλλὰ ἀκόμη καὶ ἡ μεγαλητέρα ἀκτὶς ΑΔ νὰ ἦναι $<$ ΑΓ + ΓΔ. σχ. 58. Τώρα ὁσάκις τὸ τρίγωνον ΓΑΔ ἠμπορεῖ νὰ κατασκευασθῇ, φανερὸν εἶναι ὅτι αἱ γραμμέναι περιφέρειαι ἐκ τῶν κέντρων Γ καὶ Δ, θέλει τέμνονται εἰς Α καὶ Β.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν τὸ ἀπόστημα ΓΔ τῶν κέντρων δύο κύκλων ἦναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων των ΓΑ, ΑΔ, οἱ δύο κύκλοι θέλει ἅπτονται ἐξωτερικῶς.

Φανερὸν εἶναι ὅτι θέλουν ἔχει τὸ σημεῖον Α κοινόν· καὶ τοῦτο μόνον· διότι διὰ νὰ ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα, ἔπρεπε τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων νὰ ἦναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων (πρὸ. 12.)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν τὸ ἀπόστημα ΓΔ τῶν κέντρων δύο κύκλων ἦναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων των ΓΑ, ΑΔ, οἱ δύο κύκλοι θέλει ἅπτονται ἐσωτερικῶς. σχ. 60.

Φανερὸν εἶναι ὅτι ἔχουν τὸ σημεῖον Α κοινόν· καὶ τοῦτο μόνον· διότι διὰ νὰ ἔχουν ἓν ἄλλο, ἔπρεπε ἡ μεγαλητέρα ἀκτὶς ΑΔ νὰ ἦναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῆς ἀκτῖνος ΑΓ καὶ τοῦ ἀποστήματος τῶν κέντρων ΓΔ (πρό. 12.) τὸ ὁποῖον δὲν ὑπάρχει.

Πόρισμα. Λοιπὸν ἐὰν δύο κύκλοι ἅπτωνται, εἴτε ἐσωτερικῶς, εἴτε ἐξωτερικῶς, τὰ κέντρα καὶ τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς εἶναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Σχόλιον. Ὅλοι οἱ κύκλοι οἵτινες ἔχουν τὰ κέντρα των ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΔ, καὶ διέρχονται ἐκ τῆς στιγμῆς Α, ἅπτονται μεταξύ των, καὶ δὲν ἔχουν ἄλλο κοινὸν σημεῖον παρὰ τὸ Α. Ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ σημείου Α ἀχθῇ

ΑΕ κάθετος εἰς τὴν ΓΔ, ἡ εὐθεῖα ΑΕ θέλει εἶναι κοινὴ ἐφαπτομένη εἰς ὅλους τούτους τοὺς κύκλους. σχ. 59 καὶ 60.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ΄.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, αἱ ἴσαι γωνίαι ΑΓΒ, ΔΓΕ, τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ εἶναι εἰς τὸ κέντρον, χωρίζουσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας τόξα ἴσα ΑΒ, ΔΕ.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν τὰ τόξα ΑΒ, ΔΕ, ἦναι ἴσα, αἱ γωνίαι ΑΓΒ, ΔΓΕ, θέλουν εἶναι παρομοίως ἴσαι. σχ. 61.

Διότι 1.ον ἐὰν ἡ γωνία ΑΓΒ ἦναι ἴση τῇ ΔΓΕ, ἡ μία δύναται νὰ τεθῇ ἐπὶ τῆς ἄλλης· καὶ ἐπειδὴ αἱ πλευραί των εἶναι ἴσαι, φανερὸν εἶναι ὅτι τὸ σημεῖον Α θέλει πέσει εἰς Δ, καὶ τὸ σημεῖον Β εἰς Ε. Ἀλλὰ τότε τὸ τόξον ΑΒ πρέπει ὁμοίως νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΕ· διότι ἐὰν τὰ δύο τόξα δὲν ἐταυτίζοντο, ἤθελον ὑπάρχει εἰς τὸ ἓν ἢ εἰς τὸ ἄλλο σημεῖα ἀνισάκις ἀπέχοντα ἀπὸ τὸ κέντρον, ὅπερ ἀδύνατον· λοιπὸν τὸ τόξον ΑΒ = ΔΕ,

2.ον Ἐὰν ὑποτεθῇ ΑΒ = ΔΕ, λέγω ὅτι ἡ γωνία ΑΓΒ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΔΓΕ· διότι ἐὰν αἱ γωνίαι αὗται δὲν ἦναι ἴσαι, ἔστω ΑΓΒ ἡ μεγαλητέρα, καὶ ἂς ληφθῇ ΑΓΙ = ΔΓΕ· θέλομεν ἔχει, ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων, ΑΙ = ΔΕ: ἀλλὰ, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ τόξον ΑΒ = ΔΕ· λοιπὸν ἠθέλαμεν ἔχει ΑΙ = ΑΒ, ἢ τὸ μέρος ἴσον τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἀδύνατον· λοιπὸν ἡ γωνία ΑΓΒ = ΔΓΕ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ις΄.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, ἐὰν δύο γωνίαι εἰς τὸ κέντρον ΑΓΒ, ΔΓΕ ἦναι μεταξύ των ὡς δύο ἀκέραιοι ἀριθμοὶ, τὰ περιεχόμενα τόξα μεταξὺ τῶν πλευρῶν των ΑΒ, ΔΕ, θέλουν εἶναι μεταξύ των ὡς αὐ-

αὐτοὶ ἀριθμοί, καὶ θέλομεν ἔχει ταύτην τὴν ἀναλογίαν· γωνία ΑΓΒ : γωνίαν ΔΓΕ : : τόξον ΑΒ : τόξον ΔΕ. σχ. 62.

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΓΒ, ΔΓΕ, εἶναι μεταξύ των ὡς 7 πρὸς 4, ἢ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτό, ὅτι ἡ γωνία Μ κοινὸν μέτρον τῶν δύο γωνιῶν, περιέχεται εἰς μὲν τὴν γωνίαν ΑΓΒ ἑπτάκις, εἰς δὲ τὴν ΔΓΕ τετράκις. Ἐπειδὴ αἱ μερικαὶ γωνίαι ΑΓμ, μΓν, νΓΠ, κ. τ. λ, ΔΓχ, χΓψ, κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι μεταξύ των, τὰ μερικὰ τόξα Αμ, μν, νπ, κ. τ. λ, Δχ, χψ κ.τ.λ. εἶναι παρομοίως ἴσα μεταξύ των. (Πρὸ. 15.) Λοιπὸν τὸ ὅλον τόξον ΑΒ θέλει εἶναι εἰς τὸ ὅλον τόξον ΔΕ ὡς 7 πρὸς 4. Τώρα φανερὸν εἶναι ὅτι ὁ αὐτὸς συλλογισμὸς ἔχει χώραν, ὅταν ἀντὶ 7 καὶ 4 λάβωμεν ὁποιουσδήποτε ἄλλους ἀριθμούς· λοιπὸν ἐὰν ὁ λόγος τῶν γωνιῶν ΑΓΒ, ΔΓΕ δύναται νὰ ἐκφρασθῇ δι᾽ ἀκεραίων ἀριθμῶν, τὰ τόξα ΑΒ, ΔΕ θέλουν εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ γωνίαι ΑΓΒ, ΔΓΕ.

Σχόλιον. Ἀντιστρόφως, ἐὰν τὰ τόξα ΑΒ, ΔΕ ἦσαν μεταξύ των ὡς δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί, αἱ γωνίαι ΑΓΒ, ΔΓΕ, ἤθελον εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ αὐτοὶ ἀριθμοί, καὶ πάντοτε ἠθέλαμεν ἔχει ΑΓΒ : ΔΓΕ : : ΑΒ : ΔΕ· διότι ἐπειδὴ τὰ μερικὰ τόξα Αμ, μν, κ. τ. λ, Δχ, χψ, κ. τ. λ. εἶναι ἴσα, αἱ μερικαὶ γωνίαι ΑΓμ, μΓν, κ. τ. λ. εἶναι παρομοίως ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ὁποιονδήποτε λόγον ἔχωσι αἱ δύο γωνίαι ΑΓΒ, ΑΓΔ, πάντοτε θέλουν εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τόξα ΑΒ, ΑΔ, τὰ περιεχόμενα μεταξὺ τῶν πλευρῶν των καὶ γεγραμμένα ἐκ τῶν κορυφῶν των ὡς ἐκ κέντρων μὲ ἴσας ἀκτῖνας.

Ας υποθέσωμεν την μικροτέραν γωνίαν εντός της μεγαλητέρας: εάν η εκφωνηθείσα αναλογία δεν υπάρχη, η γωνία ΑΓΒ, θέλει είναι εις την γωνίαν ΑΓΔ ως το τόξον ΑΒ εις εν τόξον μεγαλήτερον ή μικρότερον του ΑΔ. Ας υποθέσωμεν τούτο το τόξον μεγαλήτερον, και άς το παραστήσωμεν διά ΑΟ, ούτω θέλομέν έχει.

γωνία ΑΓΒ: γωνίαν ΑΓΔ:: τόξον ΑΒ: τόξον ΑΟ.

Ας εννοήσωμεν τώρα το τόξον ΑΒ διηρημένον εις μέρη ίσα έκαστον των οποίων να ήναι μικρότερον του ΔΟ· θέλει υπάρχει τουλάχιστον εν σημείον διαιρέσεως μεταξύ Δ και Ο: έστω Ι τούτο το σημείον, άς επιζευχθή ΓΙ. Τα τόξα ΑΒ, ΑΙ θέλουν είναι μεταξύ των ως δύο ακέραιοι αριθμοί, και κατά το προλαβόν θεώρημα θέλομεν έχει:

γωνία ΑΓΒ: γωνίαν ΑΓΙ:: τόξον ΑΒ: τόξον ΑΙ.

Συγκρίνοντες τας δύο ταύτας αναλογίας, βλέπομεν ότι οι ηγούμενοι είναι οι αυτοί· λοιπόν οι επόμενοι σχηματίζουν αναλογίαν. και έχομεν

γωνία ΑΓΔ: γωνίαν ΑΓΙ:: τόξον ΑΟ: τόξον ΑΙ.

Αλλά το τόξον ΑΟ είναι μεγαλήτερον του τόξου ΑΙ: έπρεπε λοιπόν διά να υπάρχη η αναλογία, η γωνία ΑΓΔ να ήναι μεγαλητέρα της γωνίας ΑΓΙ· αλλ' εξ εναντίας είναι μικροτέρα· λοιπόν είναι αδύνατον η γωνία ΑΓΒ να ήναι πρός την γωνίαν ΑΓΔ ως το τόξον ΑΒ πρός εν τόξον μεγαλήτερον του ΑΔ.

Δι' ομοίου συλλογισμού ήθέλαμεν αποδείξει ότι ο τέταρτος όρος της Αναλογίας δεν δύναται να ήναι μικρότερος του ΑΔ· λοιπόν είναι ίσος με ΑΔ· επομένως έχομεν την αναλογίαν:

Γωνία ΑΓΒ: γωνίαν ΑΓΔ:: τόξον ΑΒ: τόξον ΑΔ.

Πόρισμα. Επειδή η γωνία εις το κέντρον του κύκλου και το περιεχόμενον τόξον μεταξύ των πλευρών της ἔχουν τοιαύτην σχέσιν, ὥςε ὅταν ἡ γωνία αὐξάνη ἢ σμικρύνη, νὰ αὐξάνη ἢ νὰ σμικρύνη τὸ τόξον κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον, δικαίως ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν μίαν τούτων τῶν ποσοτήτων ὡς μέτρον τῆς ἄλλης: διὰ τοῦτο εἰς τὸ ἑξῆς λαμβάνομεν τὸ τόξον AB ὡς μέτρον τῆς γωνίας ΑΓΒ. Πρέπει μόνον νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι εἰς τὴν πρὸς ἀλλήλας σύγκρισιν τῶν γωνιῶν, τὰ τόξα τὰ ὁποῖα μετροῦσιν αὐτὰς, πρέπει νὰ ἦναι γεγραμμένα μὲ ἴσας ἀκτῖνας· διότι τοῦτο ὑποθέτουσιν αἱ προηγούμεναι προτάσεις.

Σχόλιον. Α΄. Φαίνεται φυσικώτερον νὰ μετρῆται μία ποσότης διὰ μιᾶς ἄλλης τοῦ ἰδίου εἴδους, καὶ κατ' αὐτὴν τὴν ἀρχὴν ἔπρεπε νὰ ἀναφερθῶσιν ὅλαι αἱ γωνίαι εἰς τὴν ὀρθήν: διὰ τοῦτο λαμβανομένης τῆς ὀρθῆς γωνίας ὡς μονάδος τοῦ μέτρου, ἡ ὀξεῖα γωνία ἤθελεν ἐκφρασθῆ δι' ἀριθμοῦ περιεχομένου μεταξὺ ο καὶ 1, καὶ ἡ ἀμβλεῖα δι' ἀριθμοῦ μεταξὺ 1 καὶ 2. Ἀλλ' ὁ τρόπος οὗτος τοῦ ἐκφράζειν τὰς γωνίας δὲν ἤθελεν εἶναι ὁ ἐπιτηδειότερος εἰς τὴν χρῆσιν. Εὑρέθη ἁπλούςερον νὰ μετρῶνται αἱ γωνίαι διὰ τόξων κύκλων, διὰ τὴν εὐκολίαν τοῦ κατασκευάζειν τόξα ἴσα μὲ δεδομένα, καὶ δι' ἄλλους πολλοὺς λόγους. Τέλος, ἐὰν καὶ τὸ μέτρον τῶν γωνιῶν διὰ τῶν τόξων κύκλου ἦναι τρόπον τινα ἔμμεσον, μὲ εὐκολίαν ὅμως διὰ μέσου αὐτῶν συνάγομεν τὸ ἄμεσον καὶ ἀπόλυτον· διότι ἐὰν συγκρίνωμεν τὸ τόξον τὸ ὁποῖον μετρεῖ μίαν γωνίαν μὲ τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας, θέλομεν ἔχει τὸν λόγον τῆς δεδομένης γωνίας πρὸς τὴν ὀρθὴν, καὶ τοῦτο εἶναι τὸ ἀπόλυτον μέτρον.

Σχόλιον. Β΄. Ὅ,τι ἀπεδείχθη εἰς τὰς τρεῖς προηγουμένας προτάσεις διὰ τὴν σύγκρισιν τῶν γωνιῶν μὲ τὰ τόξα, ὑπάρχει ἐπίσης διὰ τὴν σύγκρισιν τῶν τομέων μὲ τὰ τόξα: διότι οἱ τομεῖς εἶναι ἴσοι ὅταν αἱ γωνίαι ἦναι ἴσαι, καὶ ἐν γένει εἶναι ἀνάλογοι μὲ τὰς γωνίας· λοιπὸν δύο τομεῖς ΑΓΒ, ΑΓΔ, εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τόξα ΑΒ, ΑΔ, βάσεις τῶν ἰδίων τομέων.

Εκ τούτου βλέπομεν ὅτι τὰ τόξα τοῦ κύκλου τὰ ὁποῖα μετροῦν τὰς γωνίας, ἠμποροῦν ὁμοίως νὰ χρησιμεύσουν ὡς μέτρον τῶν διαφόρων τομέων τοῦ ἰδίου κύκλου ἢ ἴσων κύκλων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Η ἐγγεγραμμένη γωνία ΒΑΔ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΔ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν της. σχ. 64. καὶ 65.

Ας ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς γωνίας ΒΑΔ· ἄγομεν τὴν διάμετρον ΑΕ καὶ τὰς ἀκτῖνας ΓΒ, ΓΔ. Η ἐκτὸς γωνία ΒΓΕ, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς ΓΑΒ, ΑΒΓ, (πρ. 19, 1): ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΒΑΓ εἶναι ἰσοσκελὲς, ἡ γωνία ΓΑΒ=ΑΒΓ· λοιπὸν ἡ γωνία ΒΓΕ εἶναι διπλασία τῆς ΒΑΓ. Η γωνία ΒΓΕ, ὡς γωνία εἰς τὸ κέντρον, ἔχει διὰ μέτρον τὸ τόξον ΒΕ: λοιπὸν ἡ γωνία ΒΑΓ θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ΒΕ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ γωνία ΓΑΔ θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΔ· λοιπὸν ΒΑΓ + ΓΑΔ ἢ ΒΑΔ θέλει μετρεῖται ἀπὸ τὸ ἥμισυ τοῦ ΒΕ + ΕΔ ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΒΔ. σχ. 64.

Ας ὑποθέσωμεν δεύτερον ὅτι τὸ κέντρον Γ εὑρίσκεται ἐκτὸς τῆς γωνίας ΒΑΔ, τότε ἐὰν ἄξωμεν τὴν διάμετρον ΑΕ, ἡ γωνία ΒΑΕ θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ΒΕ, ἡ γωνία ΔΑΕ τὸ ἥμισυ τοῦ ΔΕ· λοιπὸν ἡ διαφορὰ τῶν ΒΑΔ θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ΒΕ μεῖον τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΔ, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΒΔ. σχ. 65.

Λοιπὸν κάθε ἐγγεγραμμένη γωνία ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ περιεχομένου τόξου μεταξὺ τῶν πλευρῶν της.

Πόρισμα. Α'. Ολαι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα καθὼς ΒΑΓ, ΒΔΓ κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι, ὡς ἔχουσαι διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ἰδίου τόξου ΒΟΓ. σχ. 66.

Β'. κάθε γωνία ΒΑΔ ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ ἡμικύκλιον εἶναι γωνία ὀρθή, ὡς ἔχουσα διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς ἡμιπεριφερείας ΒΟΔ, ἢ τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας σχ. 67.

Διὰ νὰ δείξωμεν τὸ αὐτὸ μὲ ἄλλον τρόπον, ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ἀκτὶς ΑΓ· τὸ τρίγωνον ΒΑΓ εἶναι ἰσοσκελὲς, ὅθεν ἡ γωνία ΒΑΓ=ΑΒΓ· τὸ τρίγωνον ΓΑΔ εἶναι παρομοίως ἰσοσκελὲς· λοιπὸν ἡ γωνία ΓΑΔ=ΑΔΓ· ἀπομένως ΒΑΓ+ΓΑΔ ἢ ΒΑΔ=ΑΒΔ+ΑΔΒ. Ἀλλ' ὅταν αἱ δύο γωνίαι Β καὶ Δ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ κάμνουν ὁμοῦ τὴν τρίτην ΒΑΔ, φανερὸν εἶναι ὅτι αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο φοραῖς τὴν γωνίαν ΒΑΔ· αὐταὶ δὲ ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο ὀρθάς· λοιπὸν ἡ γωνία ΒΑΔ εἶναι ὀρθή.

Γ'. Κάθε γωνία ΒΑΓ ἐγγεγραμμένη εἰς τμῆμα μεῖζον τοῦ ἡμικυκλίου, εἶναι γωνία ὀξεῖα· διότι ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΟΓ ἐλάσσονος ἡμιπεριφερείας. σχ. 66.

Καὶ κάθε γωνία ΒΟΓ ἐγγεγραμμένη εἰς τμῆμα ἔλασσον τοῦ ἡμικυκλίου, εἶναι γωνία ἀμβλεῖα· διότι ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΑΓ μείζονος ἡμιπεριφερείας.

Δ'. Αἱ ἀπέναντι γωνίαι Α καὶ Γ ἐγγεγραμμένου τινὸς τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο ὀρθάς· διότι ἡ γωνία ΒΑΔ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΓΔ, ἡ γωνία ΒΓΔ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΒΑΔ· λοιπὸν αἱ δύο γωνίαι ΒΑΔ, ΒΓΔ, ὁμοῦ λαμβανόμεναι, ἔχουν διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας· λοιπὸν τὸ ἄθροισμά των ἰσοδυναμεῖ μὲ δύο ὀρθάς. σχ. 68.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Η σχηματιζομένη γωνία ΒΑΓ ἀπὸ μίαν ἐφαπτομένην καὶ ἀπὸ μίαν χορδὴν, ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΜΔΓ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν της. σχ. 69.

Εἰς τὴν ϛιγμὴν τῆς ἀφῆς Α ἂς ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΑΔ· ἡ γωνία ΒΑΔ εἶναι ὀρθὴ, (πρ. 9) καὶ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΜΔ, ἡ γωνία ΔΑΓ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ΔΓ· λοιπὸν ΒΑΔ + ΔΑΓ ἢ ΒΑΓ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΜΔ, πλέον τὸ ἥμισυ τοῦ ΔΓ, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ὅλου τόξου ΑΜΔΓ.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ γωνία ΓΑΕ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΓ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν της.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΑ

ΕΙΣ ΤΑ ΔΥΟ ΠΡΩΤΑ ΒΙΒΛΙΑ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΡΩΤΟΝ.

Νὰ διαιρέσωμεν τὴν δεδομένην εὐθεῖαν ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη. σχ. 70.

Εκ τῶν σημείων Α καὶ Β, ὡς ἐκ κέντρων, μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα ἀλλὰ μεγαλητέραν τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ, ἂς γραφθῶσι δύο τόξα, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς Δ. Τὸ σημεῖον Δ ἰσάκις θέλει ἀπέχει τῶν σημείων Α καὶ Β: ἂς σημειωθῇ παρομοίως ἄνω ἢ κάτω τῆς γραμμῆς ΑΒ ἐν