καὶ ἀντιςρόφως, ἐκ δύο γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου ἡ μεγαλητέρα εἶναι ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλητέρας πλευρᾶς.

1.ον Εςω ἡ γωνία Γ > Β, λέγω ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΒ ἀπέναντι τῆς γωνίας Γ εἶναι μεγαλητέρα τῆς πλευρᾶς ΑΓ ἀπέναντι τῆς γωνίας Β. σχ. 30.

Ας γένῃ ἡ γωνία ΒΓΔ = Β. Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΔΓ ἔχομεν πρ. 13. ΒΔ = ΔΓ. ἀλλ' ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΓ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ΑΔ + ΔΓ; καὶ ΑΔ + ΔΓ = ΑΔ + ΔΒ = ΑΒ· λοιπὸν ΑΒ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΑΓ.

2.ον Εςω ἡ πλευρὰ ΑΒ > ΑΓ, λέγω ὅτι ἡ γωνία Γ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς ΑΒ θέλει εἶναι μεγαλητέρα τῆς γωνίας Β ἀπέναντι τῆς ΑΓ. Διότι ἐὰν εἴχαμεν Γ < Β, ἤθελεν ἀκολουθήσει, ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων, ΑΒ < ΑΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Εὰν δὲ Γ = Β, ἠθέλαμεν ἔχει πρ. 13. ΑΒ = ΑΓ, τὸ ὁποῖον ἀκόμη ἐναντιοῦται εἰς τὴν ὑπόθεσιν· λοιπὸν ἡ γωνία Γ πρέπει νὰ ἦναι μείζων τῆς Β.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εξ ἑνὸς δεδομένου σημείου Α ἐκτὸς μιᾶς εὐθείας ΔΕ, μία μόνη κάθετος εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῇ εἰς ταύτην τὴν εὐθεῖαν. σχ. 31.

Διότι ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῶσι δύο ΑΒ καὶ ΑΓ· ἃς προεκβάλλωμεν μίαν τούτων τὴν ΑΒ ποσότητά τινα ΒΖ = ΑΒ, καὶ ἃς ἐπιζεύξωμεν ΖΓ.

Τὸ τρίγωνον ΓΒΖ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ: ἐπειδὴ ἡ γωνία ΓΒΖ εἶναι ὀρθὴ καθὼς καὶ ἡ ΓΒΑ, ἡ πλευρὰ ΓΒ εἶναι κοινή, ἡ δὲ ΒΖ = ΑΒ· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα πρ. 6. καὶ ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ΒΓΖ = ΒΓΑ. Η γωνία ΒΓΑ εἶναι ὀρθὴ ἐξ ὑποθέσεως· λοιπὸν ἡ γωνία ΒΓΖ εἶναι ἐπίσης ὀρθή. Αλλ' ἐὰν αἱ προσκείμεναι γωνίαι ὁμοῦ ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο ὀρθὰς, πρέπει ἡ γραμμὴ ΑΓΖ νὰ ἦναι εὐθεῖα πρ. 4. Ὅθεν ἕπεται ὅτι μεταξὺ δύο σημείων Α καὶ Ζ, ἤθελεν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι ΑΒΖ, ΑΓΖ· τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον ἀξ. 4. λοιπὸν εἶναι παρομοίως ἀδύνατον νὰ ἀχθῶσι δύο κάθετοι ἐξ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ τῆς ἰδίας εὐθείας γραμμῆς.

Σχόλιον. Ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Γ δεδομένον ἐπὶ τῆς γραμμῆς ΑΒ, εἶναι ἐπίσης ἀδύνατον νὰ ὑψωθῶσι δύο κάθετοι εἰς ταύτην τὴν γραμμήν· διότι ἐὰν ΓΔ καὶ ΓΕ ἦσαν αἱ δύο αὗται κάθετοι, ἡ γωνία ΔΓΒ ἤθελεν εἶναι ὀρθὴ καθὼς καὶ ἡ ΒΓΕ, καὶ τὸ μέρος ἤθελεν εἶναι ἴσον τῷ ὅλῳ. σχ. 17.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν ἐξ ἑνὸς σημείου Α κειμένου ἐκτὸς εὐθείας τινος ΔΕ ἄξωμεν τὴν κάθετον ΑΒ ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας, καὶ διαφόρους πλαγίας ΑΕ, ΑΓ, ΑΔ κ. τ. λ, εἰς διάφορα σημεῖα ταύτης τῆς εὐθείας. σχ. 31.

1.ον Ἡ κάθετος ΑΒ θέλει εἶναι μικροτέρα κάθε πλαγίας.

2.ον Αἱ δύο πλάγιαι ΑΓ, ΑΕ, ἠγμέναι ἀπὸ τὸ ἓν καὶ τὸ ἄλλο μέρος τῆς καθέτου εἰς ἴσα διαστήματα ΒΓ, ΒΕ θέλουν εἶναι ἴσαι.

3.ον Ἀπὸ δύο πλαγίας ΑΓ καὶ ΑΔ, ἢ ΑΕ καὶ ΑΔ ἠγμένας κατ' ἀρέσκειαν, ἡ ἀπομακρυνομένη περισσότερον τῆς καθέτου θέλει εἶναι ἡ μεγαλητέρα.

Ἂς προεκβληθῇ ἡ κάθετος ΑΒ ποσότητα τινὰ ΒΖ$=$ΑΒ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσι ΖΓ, ΖΔ.

1.ον Τὸ τρίγωνον ΒΓΖ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΒΓΑ, ἐπειδὴ ἡ ὀρθὴ γωνία ΓΒΖ$=$ΓΒΑ, ἡ πλευρὰ ΓΒ εἶναι κοινή, ἡ δὲ ΒΖ$=$ΒΑ. Λοιπὸν πρ. 6. ἡ τρίτη

ΓΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν τρίτην ΑΓ. Τώρα, ΑΒΖ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΓΖ γραμμῆς κεκλασμένης· λοιπὸν ΑΒ ἥμισυ τῆς ΑΒΖ εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΓ ἡμίσεως τῆς ΑΓΖ· λοιπὸν 1.ον ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα κάθε πλαγίας.

2.ον Ἐὰν ὑποτεθῇ ΒΕ = ΒΓ, ἐπειδὴ ἐκτὸς ὅπου ΑΒ εἶναι κοινὴ καὶ ἡ γωνία ΑΒΕ = ΑΒΓ, ἕπεται ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρ. 6. λοιπὸν αἱ πλευραὶ ΑΕ, ΑΓ εἶναι ἴσαι· λοιπὸν 2.ον δύο πλάγιαι ἰσάκις ἀπομακρυνόμεναι τῆς καθέτου εἶναι ἴσαι.

3.ον Εἰς τὸ τρίγωνον ΔΖΑ τὸ ἄθροισμα τῶν γραμμῶν ΑΓ, ΓΖ, εἶναι μικρότερον. πρ. 9. τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν ΑΔ, ΔΖ· λοιπὸν ΑΓ, ἥμισυ τῆς γραμμῆς ΑΓΖ εἶναι μικροτέρα τῆς ΑΔ ἡμίσεως τῆς ΑΔΖ· λοιπὸν 3.ον αἱ πλάγιαι αἵτινες περισσότερον ἀπομακρύνονται τῆς καθέτου εἶναι μεγαλήτεραι.

Πόρισμα Α΄. Η κάθετος μετρεῖ τὴν ἀληθινὴν ἀπόστασιν ἑνὸς σημείου ἀπὸ μίαν γραμμήν, ὡς μικροτέρα κάθε πλαγίας.

Πόρισμα Β΄. Ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῶσιν εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν τρεῖς ἴσαι εὐθεῖαι· διότι ἐὰν τοῦτο ἦτον δυνατὸν, ἤθελον ὑπάρχει ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου δύο ἴσαι πλάγιαι, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Γ, μέσου τῆς εὐθείας ΑΒ, ὑψωθῇ ἡ κάθετος ΕΖ ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας. 1.ον κάθε σημεῖον τῆς καθέτου ἰσάκις θέλει ἀπέχει τῶν δύο ἄκρων τῆς ΑΒ. 2.ον κάθε δὲ σημεῖον ἐκτὸς τῆς καθέτου ἀνισάκις θέλει ἀπέχει τῶν αὐτῶν ἄκρων Α καὶ Β. σχ. 32, Διότι, 1.ον ἐπειδὴ ὑποτίθεται ΑΓ=ΓΒ αἱ δύο πλάγιαι ΑΔ,ΔΒ ἰσάκις ἀπομακρύνονται τῆς καθέτου· λοιπὸν εἶναι ἴσαι. Τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰς πλαγίας ΑΕ, ΕΒ, ΑΖ, ΖΒ, κ. τ. λ. λοιπὸν 1ον κάθε σημεῖον τῆς καθέτου ἰσάκις ἀπέχει τῶν ἄκρων Α καὶ Β.

2.ον Εσω Ι ἓν σημεῖον ἐκτὸς τῆς καθέτου. Εὰν ἐπιζευχθῶσι ΙΑ,ΙΒ, ἡ μία τῶν γραμμῶν τούτων θέλει τέμνει τὴν κάθετον εἰς Δ, ὅθεν ἄγοντες τὴν ΔΒ, θέλομεν ἔχει ΔΒ=ΔΑ. Αλλ' ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΙΒ εἶναι μικροτέρα τῆς κεκλασμένης ΙΔ + ΔΒ, καὶ ΙΔ + ΔΒ = ΙΔ + ΔΑ = ΙΑ· λοιπὸν ΙΒ < ΙΑ· λοιπὸν 2.ον κάθε σημεῖον ἐκτὸς τῆς καθέτου ἀνισάκις ἀπέχει τῶν ἄκρων Α καὶ Β.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο τρίγωνα ὀρθογώνια εἶναι ἴσα ὅταν ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην.

Εσω ἡ ὑποτείνουσα ΑΓ=ΔΖ, καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ=ΔΕ· λέγω ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔΕΖ. σχ. 33.

Η ἰσότης ἤθελεν εἶναι φανερὰ ἐὰν ἡ τρίτη πλευρὰ ΒΓ ἦτον ἴση μὲ τὴν τρίτην πλευρὰν ΕΖ. Ας ὑποθέσωμεν, ἐὰν δυνατὸν, ὅτι αἱ πλευραὶ αὗται δὲν εἶναι ἴσαι, καὶ ἔσω ΒΓ ἡ μεγαλητέρα. Ας ληφθῇ ΒΗ=ΕΖ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ΑΗ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΗ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΔΕΖ· διότι ἡ ὀρθὴ γωνία Β εἶναι ἴση μὲ τὴν ὀρθὴν Ε, ἡ πλευρὰ ΑΒ=ΔΕ, καὶ ἡ ΒΗ=ΕΖ· λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἴσα πρ. 6. καὶ ἐπομένως ΑΗ=ΔΖ· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ΔΖ=ΑΓ· λοιπὸν ΑΗ=ΑΓ. Αλλ' ἡ πλαγία ΑΓ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἦναι ἴση τῇ ΑΗ πρ. 16. ὡς περισσότερον ἀπομακρυνομένη τῆς καθέτου ΑΒ· λοιπὸν εἶναι ἀδύνατον ἡ ΒΓ νὰ διαφέρῃ τῆς ΕΖ· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΔΕΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ΄.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς κάθε τρίγωνον, τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.

Ἔςω ΑΒΓ τὸ προτιθέμενον τρίγωνον εἰς τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν (1) ὅτι ΑΒ εἶναι ἡ μεγαλητέρα, ἡ δὲ ΒΓ ἡ μικροτέρα πλευρὰ, καὶ οὕτως ΑΓΒ εἶναι ἡ μεγαλητέρα γωνία ἡ δὲ ΒΑΓ ἡ μικροτέρα πρ. 14. σχ. 35.

Ἐκ τῆς ςιγμῆς Α καὶ τῆς ςιγμῆς Ι μέσου τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΒΓ, ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΙ ἥτις ἂς προεκβληθῇ εἰς Γ΄ ὥςε ΑΓ΄=ΑΒ· παρομοίως ἂς προεκβληθῇ ΑΒ εἰς Β΄ ὥςε ΑΒ΄ νὰ ἦναι διπλασία τῆς ΑΙ.

Ἐὰν σημειωθῶσι διὰ Α, Β, Γ, αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, καὶ παρομοίως διὰ Α΄, Β΄, Γ΄ αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου ΑΒ΄Γ΄, λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν γωνίαν Γ΄=Β+Γ, καὶ τὴν γωνίαν Α=Α΄+Β΄, ὅθεν ἕπεται Α+Β+Γ=Α΄+Β΄+Γ΄, τουτέςιν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι τὸ αὐτὸ εἰς τὰ δύο τρίγωνα.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἂς γένῃ ΑΚ΄=ΑΙ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ Γ΄Κ΄, θέλομεν ἔχει τὸ τρίγωνον Γ΄ΑΚ΄ ἴσον μὲ τὸ ΒΑΙ. Διότι εἰς τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα, ἡ κοινὴ γωνία Α περιέχεται μεταξὺ πλευρῶν ἴσων, ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, δηλαδή: ΑΓ΄=ΑΒ, καὶ ΑΚ΄=ΑΙ. Λοιπὸν ἡ τρίτη πλευρὰ Γ΄Κ΄ εἶναι ἴση μὲ τὴν τρίτην ΒΙ· λοιπὸν ὡσαύτως ἡ γωνία ΑΓ΄Κ΄=ΑΒΓ καὶ ἡ γωνία ΑΚ΄Γ΄=ΑΙΒ.

Λέγω τώρα ὅτι τὸ τρίγωνον Β΄Γ΄Κ΄ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΑΓΙ, διότι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν ΑΚ΄Γ΄+Γ΄Κ΄Β΄ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς πρ. 2. καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ΑΙΓ+ΑΙΒ. Ἐὰν

---

(1) Η ὑπόθεσις αὕτη δὲν ἀποκλείει τὴν περίςασιν καθ᾿ ἣν ἡ μέση πλευρὰ ΑΓ ἤθελεν εἶναι ἴση μὲ μίαν τῶν ἄκρων ΑΒ ἢ ΒΓ.

καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη ἀφαιρεθῶσιν αἱ ἴσαι γωνίαι $AK'\Gamma'$, AIB μένει ἡ γωνία $\Gamma'K'B' = AI\Gamma$. Αἱ πλευραὶ ὁποῦ περιέχουσι τὰς ἴσας ταύτας γωνίας εἶναι ἴσαι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, δηλαδὴ $\Gamma'K' = IB = \Gamma I$, καὶ $K'B' = AK' = AI$, ἐπειδὴ ὑπετέθη $AB' = 2AI = 2AK'$. Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα $B'\Gamma'K'$, $A\Gamma I$ εἶναι ἴσα πρ. 6. ἀκολούθως ἡ πλευρὰ $\Gamma'B' = A\Gamma$, ἡ γωνία $B'\Gamma'K' = A\Gamma B$, καὶ ἡ γωνία $K'B'\Gamma' = \Gamma AI$.

Ἐκ τούτου ἕπεται 1.ον ὅτι ἡ γωνία $A\Gamma'B'$ σημειωθεῖσα διὰ Γ' σύγκειται ἀπὸ δύο ἴσας γωνίας μὲ τὰς γωνίας B καὶ Γ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, καὶ οὕτως ἔχομεν $\Gamma' = B + \Gamma$. 2.ον ὅτι ἡ γωνία A τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ σύγκειται ἐκ τῆς γωνίας A' ἢ $\Gamma'AB'$ ἥτις ἀνήκει εἰς τὸ τρίγωνον $AB'\Gamma'$ καὶ τῆς γωνίας ΓAI ἴσης μὲ τὴν γωνίαν B' τοῦ ἰδίου τριγώνου, δηλαδὴ $A = A' + B'$· λοιπὸν $A + B + \Gamma = A' + B' + \Gamma'$. Ἀπὸ ἄλλο μέρος ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως $A\Gamma < AB$ καὶ ἑπομένως $\Gamma'B' < A\Gamma'$, βλέπομεν ὅτι εἰς τὸ τρίγωνον $A\Gamma'B'$ ἡ γωνία εἰς A, σημειωθεῖσα διὰ A', εἶναι μικροτέρα τῆς B', καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εἶναι ἴσον μὲ τὴν γωνίαν A τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία $A' < \frac{1}{2}A$.

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὴν αὐτὴν κατασκευὴν εἰς τὸ τρίγωνον $AB'\Gamma'$, διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἓν τρίτον τρίγωνον $A\Gamma''B''$, τοῦ ὁποίου τὰς γωνίας σημειόνομεν διὰ A'', B'', Γ'', θέλομεν ἔχει παρομοίως τὰς δύο ἰσότητας $\Gamma'' = \Gamma' + B'$, $A' = A'' + B''$, ὅθεν ἕπεται $A' + B' + \Gamma' = A'' + B'' + \Gamma''$. Οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι τὸ ἴδιον εἰς ταῦτα τὰ τρία τρίγωνα· εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν θέλομεν ἔχει τὴν γωνίαν $A'' < \frac{1}{2}A'$, καὶ ἑπομένως $A'' < \frac{1}{4}A$.

Ἐξακολουθοῦντες ἀπροσδιορίστως τὴν σειρὰν τῶν τριγώνων $A\Gamma'B'$, $A\Gamma''B''$, κ. τ. λ. θέλομεν φθάσει εἰς ἓν τρίγωνον $\alpha\beta\gamma$ εἰς τὸ ὁποῖον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν θέλει εἶναι τὸ ἴδιον ὡς εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ τὸ ὁποῖον θέλει ἔχει τὴν γωνίαν α μικροτέραν ὁποιουδήποτε ὅρου τῆς κατιούσης προόδου $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{4}A$, $\frac{1}{8}A$, κ.τλ.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ὑποθέσωμεν ταύτην τὴν σειρὰν τῶν τριγώνων προεκτεινομένην ἕως ὅπου ἡ γωνία α νὰ ἦναι μικροτέρα πάσης δεδομένης.

Καὶ ἐὰν διὰ μέσου τοῦ τριγώνου αβγ κατασκευάσωμεν τὸ ἀκόλουθον τρίγωνον α'β'γ', τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν $\alpha' + \beta'$ τούτου θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὴν γωνίαν α, καὶ ἐπομένως μικρότερον πάσης δεδομένης γωνίας. Ἐκ τοῦ ὁποίου βλέπομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου α'β'γ' ἄγεται σχεδὸν εἰς τὴν μόνην γωνίαν γ'.

Διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ ἀκριβὲς μέτρον τούτου τοῦ ἀθροίσματος, ἂς προεκβάλλωμεν τὴν πλευρὰν α'γ' πρὸς τὸ δ', καὶ ἂς καλέσωμεν χ' τὴν ἐκτὸς γωνίαν β'γ'δ'· ἡ γωνία χ', μετὰ τῆς γωνίας γ' τοῦ τριγώνου α'β'γ', κάμνει ἄθροισμα ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. πρ. 2. Οὕτως σημειόνοντες τὴν ὀρθὴν γωνίαν διὰ Ο, θέλομεν ἔχει $\gamma' = 2O - \chi'$· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου α'γ'β' θέλει εἶναι.

$$2O + \alpha' + \beta' - \chi'$$

Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν ὅτι αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου α'β'γ' μεταβάλλονται, εἰς τρόπον ὥστε διὰ τῆς μεταβολῆς ταύτης νὰ παριστάνῃ τὰ τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἐκ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς γεννῶνται καὶ πλησιάζουν μᾶλλον ἐπὶ μᾶλλον πρὸς τὸ ὅριον ὅπου αἱ γωνίαι α' καὶ β' ἤθελον εἶναι μηδέν. Εἰς τὸ ὅριον τοῦτο, ταυτιζομένης τῆς εὐθείας α'γ'δ' μὲ τὴν α'β' τὰ τρία σημεῖα α', γ', β' θέλουν εἶναι ἀπ' εὐθείας· τότε αἱ γωνίαι β' καὶ χ' μηδενίζονται εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ὅπου καὶ ἡ α', καὶ ἡ ποσότης $2O + \alpha' + \beta' - \chi'$ μέτρον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου α΄γ΄ϐ΄, ἄγεται εἰς 2O; λοιπὸν εἰς κάθε τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.

Πόρισμα Α΄. Γνωρίζοντες δύο γωνίας ἑνὸς τριγώνου ἢ μόνον τὸ ἄθροισμά των, προσδιορίζομεν τὴν τρίτην ἀφαιροῦντες τὸ ἄθροισμα τούτων τῶν γωνιῶν ἀπὸ δύο ὀρθάς.

Β΄. Εὰν δύο γωνίαι ἑνὸς τριγώνου ἦναι ἴσαι μὲ τὰς δύο γωνίας ἑνὸς ἄλλου, ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, ἡ τρίτη τοῦ ἑνὸς θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν τρίτην τοῦ ἄλλου, καὶ τὰ δύο τρίγωνα θέλουν εἶναι ἰσογώνια μεταξύ των.

Γ΄. Εν τρίγωνον δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ παρὰ μίαν μόνην ὀρθὴν γωνίαν· ἐπειδὴ ἐὰν εἶχε δύο, ἡ τρίτη ἔπρεπε νὰ ἦναι μηδέν· πολὺ περισσότερον δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ παρὰ μίαν μόνην ἀμβλεῖαν γωνίαν.

Δ΄. Εἰς ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὀξειῶν γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ μίαν ὀρθήν.

Ε΄. Εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον κάθε γωνία εἶναι τὸ τρίτον δύο ὀρθῶν ἢ τὰ δύο τρίτα μιᾶς ὀρθῆς. Λοιπὸν ἐὰν ἡ ὀρθὴ γωνία ἐκφρασθῇ διὰ Ι, ἡ γωνία τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου θέλει ἐκφρασθῇ διὰ ⅔.

ϛ΄. Εἰς κάθε τρίγωνον ΑΒΓ ἐὰν προεκϐληθῇ ἡ πλευρὰ ΑΒ πρὸς τὸ Δ, ἡ ἐκτὸς γωνία ΓΒΔ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι Α καὶ Γ· διότι ἐὰν προστεθῇ εἰς τὸ ἓν καὶ τὸ ἄλλο μέρος ΑΒΓ, τὰ δύο ἀθροίσματα θέλουν εἶναι ἴσα μὲ δύο ὀρθάς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ΄.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἐντὸς γωνιῶν ἑνὸς πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τοσάκις δύο ὀρθὰς ὅσαι μονάδες περιέχονται εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν μεῖον δύο.

Εσω ΑΒΓΔ κ. τ. λ. τὸ προτεθὲν πολύγωνον· ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς αὐτῆς γωνίας Α, ἀχθῶσιν εἰς ὅλας τὰς κορυφὰς τῶν ἀπέναντι γωνιῶν, αἱ διαγώνιοι ΑΓ,ΑΔ,ΑΕ, κ. τ. λ. εὐκόλως βλέπομεν ὅτι τὸ πολύγωνον θέλει μοιρασθῇ εἰς πέντε τρίγωνα, ἐὰν ἔχῃ ἑπτὰ πλευράς· εἰς ἕξ, ἐὰν ὀκτώ· καὶ ἐν γένει εἰς τόσα τρίγωνα ὅσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον μεῖον δύο· διότι τὰ τρίγωνα ταῦτα δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἔχοντα διὰ κορυφὴν κοινὴν τὴν στιγμὴν Α, καὶ διὰ βάσεις τὰς διαφόρους πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, ἐκτὸς τῶν δύο ὅπου σχηματίζουν τὴν γωνίαν Α. Βλέπομεν εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ὅλων τούτων τῶν τριγώνων δὲν διαφέρει παντάπασιν τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου· λοιπὸν τὸ τελευταῖον τοῦτο ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ τοσάκις δύο ὀρθὰς ὅσα εἶναι τὰ τρίγωνα, τουτέστιν, ὅσαι μονάδες περιέχονται εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου μεῖον δύο. σχ. 42.

Πόρισμα Α'. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς πολλαπλασιαζομένας ἐπὶ 4—2, τὸ ὁποῖον κάμνει τέσσαρας ὀρθάς. Λοιπὸν ἐὰν ὅλαι αἱ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ἦναι ἴσαι, ἑκάστη τούτων θέλει εἶναι ὀρθή. Τοῦτο βεβαιόνει τὸν Η' ὁρισμὸν ὅπου ὑπετέθη ὅτι αἱ τέσσαρες γωνίαι ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι ὀρθαί, ὅταν ἦναι ὀρθογώνιον ἢ τετράγωνον.

Β'. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς πενταγώνου εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς πολλαπλασιαζομένας ἐπὶ 5—2, δηλαδὴ μὲ 6 ὀρθάς. Οταν λοιπὸν τὸ πεντάγωνον ἦναι ἰσογώνιον, ὅταν δηλαδὴ ἔχῃ τὰς γωνίας του ἴσας μεταξύ των, ἑκάστη τούτων εἶναι ἴση μὲ τὸ πέμπτον ἓξ ὀρθῶν, ἢ μὲ τὰ $\frac{5}{6}$ μιᾶς ὀρθῆς.

Γ'. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ ἑξαγώνου εἶναι 2× (6—2) ἢ 8 ὀρθαὶ γωνίαι· λοιπὸν εἰς τὸ ἰσογώνιον, κάθε γωνία εἶναι τὰ $\frac{8}{6}$ ἢ $\frac{4}{3}$ τῆς ὀρθῆς.

Σχόλιον. Εὰν ἠθέλαμεν νὰ ἐφαρμόσωμεν ταύτην τὴν πρότασιν εἰς ἓν πολύγωνον τὸ ὁποῖον ἤθελεν ἔχει μίαν ἢ περισσοτέρας γωνίας εἰσεχούσας (angles rentrants), ἔπρεπε νὰ θεωρήσωμεν κάθε γωνίαν εἰσέχουσαν μεγαλητέραν δύο ὀρθῶν. Ἀλλὰ πρὸς ἀποφυγὴν κάθε περιπλοκῆς, ἐνταῦθα καὶ εἰς τὰ ἀκόλουθα δὲν θέλομεν θεωρεῖ παρὰ τὰ πολύγωνα μὲ γωνίας ἐξεχούσας (angles saillants), τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν πολύγωνα κυρτὰ (polygons convexes). Κάθε κυρτὸν πολύγωνον εἶναι τοιοῦτον, ὥςε μία εὐθεῖα γραμμὴ, ἠγμένη ὁπωςδήποτε, δὲν συναπαντᾷ τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου παρὰ εἰς δύο σημεῖα. σχ. 43.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, κάθετοι ἐπὶ μιᾶς τρίτης ΖΗ, εἶναι παράλληλοι, τουτέςιν ὅσον καὶ ἂν προεκβληθῶσι δὲν δύνανται νὰ συναπαντηθοῦν. σχ. 36.

Ἐπειδὴ ἐὰν ἐσυναπαντῶντο εἰς σημεῖόν τι Ο, ἤθελον ὑπάρχει δύο κάθετοι ΟΖ, ΟΗ ἠγμέναι ἐκ τῆς ἰδίας ςιγμῆς Ο ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΖΗ, ὅπερ ἀδύνατον. πρ. 15.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ κάμνουν μὲ μίαν τρίτην ΕΖ, δύο ἐντὸς γωνίας ΒΕΖ, ΔΖΕ, τὸ ἄθροισμα τῶν ὁποίων νὰ ἦναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς, αἱ γραμμαὶ ΑΒ, ΓΔ, θέλουν εἶναι παράλληλοι. σχ. 36.

Ἐὰν αἱ γωνίαι ΒΕΖ, ΔΖΕ, ἦσαν ἴσαι, ἤθελον εἶναι ὀρθαὶ καὶ αἱ δύο, καὶ ἠθέλαμεν πέσει εἰς τὴν περίςασιν τῆς προλαβούσης περοτάσεως. Ἂς ὑποθέσωμεν λοιπὸν ὅτι εἶναι ἄνισοι, καὶ ἐκ τῆς ςιγμῆς Ζ, κορυφῆς τῆς μεγαλητέρας ἂς κατεβάσωμεν τὴν κάθετον ΖΗ ἐπὶ τῆς ΑΒ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΕΖΗ, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὀξειῶν γωνιῶν ΖΕΗ + ΕΖΗ εἶναι ἴσον μὲ μίαν ὀρθήν. πρ. 19. πόρ. 4. Ἐὰν τοῦτο τὸ ἄθροισμα ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ ΒΕΖ + ΔΖΕ ἴσον ἐξ ὑποθέσεως μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας, μένει ἡ γωνία ΔΖΗ ἴση μὲ μίαν ὀρθήν. Λοιπὸν αἱ δύο γραμμαὶ ΑΒ, ΓΔ εἶναι κάθετοι εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΖΗ· λοιπὸν εἶναι παράλληλοι. πρ. 21.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, κάμνουν μὲ μίαν τρίτην ΕΖ δύο ἐντὸς γωνίας ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος, τὸ ἄθροισμα τῶν ὁποίων νὰ ἦναι μικρότερον ἢ μεγαλήτερον δύο ὀρθῶν, αἱ γραμμαὶ ΑΒ, ΓΔ, ἱκανῶς προεκβαλλόμεναι, πρέπει νὰ συναπαντηθοῦν. σχ. 37.

Ἔςω 1.ον Τὸ ἄθροισμα ΒΕΖ + ΕΖΔ μικρότερον δύο ὀρθῶν, ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΗ εἰς τρόπον ὥςε ἡ γωνία ΕΖΗ = ΑΕΖ, θέλομεν ἔχει τὸ ἄθροισμα ΒΕΖ + ΕΖΗ ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ΒΕΖ + ΑΕΖ καὶ ἑπομένως ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς, καὶ ἐπειδὴ ΒΕΖ + ΕΖΔ εἶναι μικρότερον δύο ὀρθῶν, ἡ εὐθεῖα ΔΖ περιέχεται εἰς τὴν γωνίαν ΕΖΗ.

Ἐκ τῆς ςιγμῆς Ζ ἂς ἀχθῇ ἡ πλαγία ΖΜ ἥτις συναπαντᾷ ΑΒ εἰς Μ, ἡ γωνία ΑΜΖ θέλει εἶναι ἴση τῇ ΗΖΜ, ἐπειδὴ ἐὰν προςεθῇ καὶ εἰς τὰ δύο μέρη ἡ αὐτὴ ποσότης ΕΖΜ + ΖΕΜ, ἕκαςον τῶν δύο ἀθροισμάτων ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς. Ἂς ληφθῇ ἀκολούθως ΜΝ = ΖΜ καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ΖΝ: ἡ γωνία ΑΜΖ, ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΖΜΝ, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι ΜΖΝ, ΜΝΖ, πρ. 19. πρ. 6. αὗται δὲ εἶναι μεταξύ των ἴσαι ὡς ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν, ΜΝ, ΖΜ· λοιπὸν ἡ γωνία ΑΜΖ ἢ ἴση της ΜΖΗ εἶναι διπλασία τῆς ΜΖΝ· λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΖΝ διαιρεῖ δίχα τὴν γωνίαν ΗΖΜ καὶ συναπαντᾷ τὴν ΑΒ εἰς ἓν σημεῖον Ν μακρὰν τῆς Μ, ΜΝ = ΖΜ.

Ἐκ τῆς ἰδίας ἀποδείξεως ἕπεται ὅτι ἐὰν λάβωμεν ΝΠ = ΖΝ, θέλομεν προσδιορίσει ἐπὶ τῆς ΑΒ τὴν στιγμὴν Π ὅπου συναπαντᾷ αὐτὴν ἡ ΖΠ ποιοῦσα τὴν γωνίαν ΗΖΠ ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας ΗΖΝ, ἢ μὲ τὸ τέταρτον τῆς ΗΖΜ.

Ἠμποροῦμεν λοιπὸν νὰ λάβωμεν διαδοχικῶς τὸ ἥμισυ, τὸ τέταρτον, τὸ ὄγδοον, κ. τ. λ. τῆς γωνίας ΗΖΜ, καὶ αἱ γραμμαὶ αἵτινες ἐκτελοῦν ταύτας τὰς διαιρέσεις θέλουν συναπαντᾷ τὴν γραμμὴν ΑΒ εἰς σημεῖα μᾶλλον ἐπὶ μᾶλλον ἀπομακρυνόμενα, ἀλλ' εὐκόλως προσδιοριζόμενα, ἐπειδὴ ΜΝ = ΖΜ, ΝΠ = ΖΝ, ΠΚ = ΠΖ, κ. τ. λ. Ἠμποροῦμεν παρομοίως νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι κάθε διάστημα μιᾶς τούτων τῶν στιγμῶν τῆς κοινῆς τομῆς ἀπὸ τὴν σταθερὰν Ζ, δὲν εἶναι ὅλως διόλου διπλάσιον τοῦ διαστήματος τῆς προηγουμένης στιγμῆς τῆς κοινῆς τομῆς, διότι ΖΝ παραδείγματος χάριν εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ΖΜ + ΜΝ ἢ 2ΖΜ· ὡσαύτως ἔχομεν ΖΠ < 2ΖΝ, ΖΚ < 2ΖΠ, κ.τ.λ.

Ἀλλ' ἐξακολουθοῦντες τὴν ὑποδιαίρεσιν τῆς γωνίας ΗΖΜ κατὰ λόγον διπλάσιον, θέλομεν φθάσει εἰς μίαν γωνίαν ΗΖΩ μικροτέραν τῆς δεδομένης ΗΖΔ, καὶ ἀκόμη θέλει εἶναι ἀληθὲς ὅτι ΖΩ προεκβαλλομένη συναπαντᾷ τὴν ΑΒ εἰς προσδιορισμένον σημεῖον· λοιπὸν πολὺ περισσότερον ἡ εὐθεῖα ΖΔ περιεχομένη εἰς τὴν γωνίαν ΕΖΩ, θέλει συναπαντήσει ΑΒ.

Ἂς ὑποθέσωμεν 2.ον ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς γωνιῶν ΑΕΖ + ΓΖΕ εἶναι μεγαλήτερον δύο ὀρθῶν, ἐὰν προεκβληθῇ ΑΕ πρὸς τὸ Β καὶ ΓΖ πρὸς τὸ Δ, τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων γωνιῶν ΑΕΖ, ΒΕΖ, ΓΖΕ, ΕΖΔ, θέλει εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρας ὀρθάς. Λοιπὸν ἐὰν ἀπὸ τοῦτο τὸ ἄθροισμα ἀφαιρεθῇ ΑΕΖ + ΓΖΕ μεῖζον δύο ὀρθῶν, μένει τὸ ἄθροισμα ΒΕΖ + ΕΖΔ μικρότερον δύο ὀρθῶν. Λοιπὸν κατὰ τὴν πρώτην περίστασιν αἱ γραμμαὶ ΕΒ, ΖΔ, ἱκανῶς προσκβαλλόμεναι, πρέπει νὰ συναπαντηθῶσιν.

Πόρισμα. Ἀπὸ δεδομένου σημείου Ζ μία μόνη παράλληλος τῆς δηδομένης γραμμῆς ΑΒ εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῇ· διότι ἐὰν φέρωμεν τὴν ΖΕ κατ᾽ ἀρέσκειαν, μία μόνη γραμμὴ ὑπάρχει ἡ ΖΗ ἥτις νὰ κάμῃ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ΒΕΖ + ΕΖΗ ἴσον μὲ δύο ὀρθάς· κάθε ἄλλη εὐθεῖα ΖΔ ἤθελε κάμει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ΒΕΖ + ΕΖΔ μικρότερον ἢ μεγαλήτερον δύο ὀρθῶν· ἑπομένως ἤθελε συναπαντᾷ τὴν ΑΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν δύο παράλληλοι γραμμαὶ ΑΒ, ΓΔ συναπαντηθῶσιν ἀπὸ μίαν διατέμουσαν ΕΖ, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς γωνιῶν ΑΗΟ, ΗΟΓ, θέλει εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. σχ. 38.

Ἐπειδὴ ἐὰν ἦτον μεγαλήτερον ἢ μικρότερον, αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ ἤθελον συναπαντῶνται ἀπὸ τὸ ἓν ἢ τὸ ἄλλο μέρος πρ. 23 καὶ δὲν ἤθελον εἶναι παράλληλοι.

Πόρισμα. Α΄. Ἐὰν ἡ γωνία ΗΟΓ ἦναι ὀρθή, ἡ γωνία ΑΗΟ θέλει εἶναι παρομοίως· λοιπὸν κάθε γραμμὴ κάθετος εἰς μίαν τῶν παραλλήλων εἶναι κάθετος εἰς τὴν ἄλλην.

Πόρισμα Β΄. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα ΑΗΟ + ΗΟΓ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, καὶ τὸ ἄθροισμα ΗΟΔ + ΗΟΓ εἶναι ἐπίσης ἴσον μὲ δύο ὀρθάς· ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ ἓν καὶ τὸ ἄλλο μέρος ΗΟΓ, θέλομεν ἔχει τὴν γωνίαν ΑΗΟ = ΗΟΔ. Ἀπὸ ἄλλο μέρος ΑΗΟ = ΒΗΕ, καὶ ΗΟΔ = ΓΟΖ πρ. 5. Λοιπὸν αἱ τέσσαρες ὀξεῖαι γωνίαι ΑΗΟ, ΒΗΕ, ΗΟΔ, ΓΟΖ, εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰς τέσσαρας ἀμβλείας ΑΗΕ, ΒΗΟ, ΗΟΓ, ΔΟΖ. Περιπλέον δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἐὰν προςεθῇ μία τῶν τεσσάρων ὀξειῶν γωνιῶν εἰς μίαν τῶν τεσσάρων ἀμβλειῶν, τὸ ἄθροισμα πάντοτε θέλει ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς.

Σχόλιον. Αἱ γωνίαι περὶ τῶν ὁποίων ὡμιλήσαμεν, συγκρινόμεναι ἀνὰ δύο, λαμβάνουσι διάφορα ὀνόματα. Ἐκαλέσαμεν τὰς γωνίας ΑΗΟ, ΗΟΓ, ἐντὸς ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος· αἱ γωνίαι ΒΗΟ, ΗΟΔ, καλοῦνται Εναλλὰξ ἐντὸς, ἢ ἁπλῶς Εναλλὰξ, οὕτως ὀνομάζονται καὶ αἱ γωνίαι ΒΗΟ, ΗΟΓ. Τέλος καλοῦνται ἐντὸς-ἐκτὸς αἱ γωνίαι ΕΗΒ, ΗΟΔ, ἢ ΕΗΑ, ΗΟΓ, καὶ ἐναλλὰξ-ἐκτὸς αἱ γωνίαι ΕΗΒ, ΓΟΖ, ἢ ΑΗΕ, ΔΟΖ. Τούτου τεθέντος δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὰς ἀκολούθους προτάσεις ὡς ἀποδεδειγμένας.

1.ον Αἱ ἐντὸς γωνίαι ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος, ὁμοῦ λαμβανόμεναι, ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο ὀρθάς.

2.ον Αἱ ἐναλλὰξ-ἐντὸς γωνίαι εἶναι ἴσαι, καθὼς καὶ αἱ ἐντὸς-ἐκτὸς, καὶ αἱ ἐναλλὰξ-ἐκτὸς.

Αντιςρόφως ἐὰν εἰς τὴν δευτέραν ταύτην περίςασιν, δύο γωνίαι τοῦ αὐτοῦ ὀνόματος εἶναι ἴσαι, δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι αἱ γραμμαὶ εἰς τὰς ὁποίας ἀναφέρονται εἶναι παράλληλοι. Εςω π. χ. ἡ γωνία ΑΗΟ = ΗΟΔ· ἐπειδὴ ΗΟΓ + ΗΟΔ, εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς, θέλομεν ἔχει παρομοίως ΑΗΟ + ΗΟΓ ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς, λοιπὸν, πρ. 22. αἱ γραμμαὶ ΑΗ, ΓΟ εἶναι παράλληλοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο γραμμαὶ ΑΒ, ΓΔ, παράλληλοι μιᾶς τρίτης ΕΖ, εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι. σχ. 39.

Ας ἀχθῇ ἡ διατέμνουσα ΠΚΡ κάθετος εἰς τὴν ΕΖ. Επειδὴ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῆς ΕΖ, ἡ διατέμνουσα ΠΡ θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΑΒ πρ. 24. πόρ. 1.

παρομοίως ἐπειδὴ ΓΔ εἶναι παράλληλος τῆς ΕΖ, ἡ διατέμνουσα ΠΡ θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΓΔ. Λοιπὸν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι κάθετοι εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΠΚ· διὰ τοῦτο εἶναι παράλληλοι. πρ. 21.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚϚ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο παράλληλοι ἰσάκις ἀπέχουσιν εἰς ὅλην των τὴν ἔκτασιν.

Δεδομένων τῶν δύο παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ, ἐὰν ἐκ δύο σημείων λαμβανομένων κατ' ἀρέσκειαν, ὑψωθῶσιν ἐπὶ τῆς ΑΒ αἱ δύο κάθετοι ΕΗ, ΖΘ, αἱ εὐθεῖαι ΕΗ, ΖΘ θέλουν εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν κάθετοι εἰς τὴν ΓΔ πρ. 24. λέγω περιπλέον ὅτι θέλουν εἶναι καὶ ἴσαι μεταξύ των. σχ. 40.

Επειδὴ ἐπιζευχθείσης τῆς ΗΖ, αἱ γωνίαι ΗΖΕ, ΖΗΘ, θεωρούμεναι ὡς πρὸς τὰς παραλλήλους ΑΒ, ΓΔ, εἶναι ἴσαι ὡς ἐναλλάξ ἐντός. σχο. πρ. 24. παρομοίως ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΕΗ, ΖΘ εἶναι κάθετοι εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ, καὶ ἑπομένως παράλληλοι μεταξύ των, αἱ γωνίαι ΕΗΖ, ΗΖΘ, θεωρούμεναι ὡς πρὸς τὰς παραλλήλους ΗΕ, ΖΘ, εἶναι ἴσαι ὡς ἐναλλὰξ ἐντός. Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΕΖΗ, ΖΗΘ, ἔχουν μίαν κοινὴν πλευρὰν ΖΗ προσκειμένην εἰς δύο γωνίας ἴσας, ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν. λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἴσα πρ. 7. λοιπὸν ἡ πλευρὰ ΕΗ ἥτις μετρεῖ τὴν ἀπόστασιν τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ ἀπὸ τὴν στιγμὴν Ε, εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν ΖΘ ἥτις μετρεῖ τὴν ἀπόστασιν τῶν ἰδίων παραλλήλων ἀπὸ τὴν στιγμὴν Ζ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἀν δύο γωνίαι ΒΑΓ, ΔΕΖ, ἔχουν τὰς πλευρὰς των παραλλήλους, τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ διευθυνομένας κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν, αἱ δύο αὗται γωνίαι θέλουν εἶναι ἴσαι. σχ. 41.

Ας προεκβληθῇ, ἐὰν ἀνάγκη τὸ καλέσῃ, ἡ ΔΕ ἕως ὅπου νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΑΓ εἰς Η· ἡ γωνία ΔΕΖ εἶναι ἴση τῇ ΔΗΓ, ἐπειδὴ ΕΖ εἶναι παράλληλος τῆς ΓΗ. πρ. 24. ἡ γωνία ΔΗΓ εἶναι ἴση τῇ ΒΑΓ, ἐπειδὴ ΔΗ εἶναι παράλληλος τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἡ γωνία ΔΕΖ εἶναι ἴση τῇ ΒΑΓ.

Σχόλιον. Εἰς ταύτην τὴν πρότασιν ἐκτὸς τοῦ παραλληλισμοῦ ὑποθέσαμεν τὴν ΕΖ πλευρὰν διευθυνομένην κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν ὅπου καὶ ἡ ΑΓ, καὶ τὴν ΕΔ διευθυνομένην κατὰ τὴν ἔννοιαν ὅπου καὶ ἡ ΑΒ: ὁ λόγος εἶναι ὅτι ἐὰν προεκβληθῇ ΖΕ πρὸς τὸ Θ, ἡ γωνία ΔΕΘ ἤθελεν ἔχει τὰς πλευράς της παραλλήλους ἐκείνων τῆς γωνίας ΒΑΓ, ἀλλὰ δὲν ἤθελεν εἶναι ἴση. Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν, ἡ γωνία ΔΕΘ καὶ ΒΑΓ ἤθελον κάμνει ὁμοῦ δύο ὀρθὰς γωνίας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι, καθὼς καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι.

Ας ἐπιζευχθῇ ἡ διαγώνιος ΒΔ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΒ, ΔΒΓ, ἔχουν τὴν κοινὴν πλευρὰν ΒΔ· περιπλέον ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ, ἡ γωνία ΑΔΒ=ΔΒΓ, πρ. 24. καὶ ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ ἡ γωνία ΑΒΔ=ΒΔΓ· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΔΒ, ΔΒΓ, εἶναι ἴσα πρ. 7. λοιπὸν ἡ πλευρὰ ΑΒ ἀπέναντι τῆς γωνίας ΑΔΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΔΓ ἀπέναντι τῆς ἴσης γωνίας ΔΒΓ: καὶ παρομοίως ἡ τρίτη πλευρὰ ΑΔ εἶναι ἴση τῇ τρίτῃ ΒΓ· λοιπὸν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι: σχ. 44.

Δεύτερον, ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν ἰδίων τριγώνων ἕπεται ὅτι ἡ γωνία Α εἶναι ἴση τῇ Γ, καὶ ἡ γωνία ΑΔΓ, σύνθετος ἀπὸ τὰς δύο γωνίας ΑΔΒ, ΒΔΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΑΒΓ, σύνθετον ἀπὸ τὰς δύο γωνίας ΔΒΓ, ΑΒΔ, λοιπὸν αἱ ἀπέναντι γωνίαι ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι.

Πόρισμα. Λοιπὸν δύο παράλληλοι ΑΒ, ΓΔ περιεχόμεναι μεταξὺ δύο ἄλλων παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ, εἶναι ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΘʹ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν εἰς ἓν τετράπλευρον ΑΒΓΔ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ἦναι ἴσαι, εἰς τρόπον ὥστε ΑΒ = ΓΔ, καὶ ΑΔ = ΒΓ, αἱ ἴσαι πλευραὶ θέλουν εἶναι παράλληλοι, καὶ τὸ σχῆμα θέλει εἶναι παραλληλόγραμμον. (σχ. 44.).

Διότι, ἐπιζευχθείσης τῆς διαγωνίου ΒΔ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΔΓ ἔχουν τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας τὴν καθὲ μίαν μὲ τὴν καθὲ μίαν· λοιπὸν εἶναι ἴσα· διὰ τοῦτο ἡ γωνία ΑΔΒ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΔΒΓ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς ΓΔ· λοιπὸν ἡ πλευρὰ ΑΔ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΓ (πρό. 24.). Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ΑΒ εἶναι παράλληλος τῆς ΓΔ· λοιπὸν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Λʹ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν δύο ἀπέναντι πλευραὶ ΑΒ, ΓΔ, τετραπλεύρου τινὸς ἦναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ θέλουν εἶναι παρομοίως ἴσαι καὶ παράλληλοι, καὶ τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ θέλει εἶναι παραλληλόγραμμον (σχ. 44.).

Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ διαγώνιος ΒΔ· ἐπειδὴ ΑΒ εἶναι παράλληλος τῆς ΓΔ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΑΒΔ, ΒΔΓ εἶναι ἴσαι (πρ. 24.): ἀπὸ ἄλλο μέρος ΑΒ = ΔΓ, ἡ πλευρὰ ΔΒ εἶναι κοινή, λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΒΔΓ (πρ. 6.)· ἐπομένως ἡ πλευρὰ ΑΔ = ΒΓ, ἡ γωνία ΑΔΒ = ΔΒΓ, διὰ τοῦτο ΑΔ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΓ· λοιπὸν τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Αἱ δύο διαγώνιοι ΑΓ, ΔΒ, ἑνὸς παραλληλογράμμου τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη. σχ. 45.

Διότι, συγκρίνοντες τὸ τρίγωνον ΑΔΟ μὲ τὸ τρίγωνον ΓΟΒ, εὑρίσκομεν τὴν πλευρὰν ΑΔ = ΓΒ, τὴν γωνίαν ΑΔΟ = ΓΒΟ (πρό. 24.)· καὶ τὴν γωνίαν ΔΑΟ = ΟΓΒ· λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἴσα (πρ. 7)· λοιπὸν ΑΟ ἀπέναντι τῆς γωνίας ΑΔΟ, εἶναι ἴση τῇ ΟΓ, ἀπέναντι τῆς γωνίας ΟΒΓ· διὰ τοῦτο καὶ ΔΟ = ΟΒ.

Σχόλιον. Ἐπειδὴ εἰς τὸ ῥομβοειδὲς, αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι, τὰ τρίγωνα ΑΟΒ, ΟΒΓ ἔχουν τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσα· ὅθεν ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ΑΟΒ = ΒΟΓ, καὶ οὕτως αἱ δύο διαγώνιοι τοῦ ῥομβοειδοῦς τέμνονται ἀμοιβαίως κατ' ὀρθὰς γωνίας.