ἢ $\frac{4}{3}\pi A^3$· ἐὰν κληθῇ Δ ἡ διάμετρος, θέλει εἶναι $A = \frac{1}{2}\Delta$, καὶ $A^3 = \frac{1}{8}\Delta^3$· ἡ στερεότης λοιπὸν τῆς σφαίρας θέλει ἐκφρασθῇ καὶ διὰ $\frac{4}{3}\pi \times \frac{1}{8}\Delta^3$, ἢ $\frac{1}{6}\pi\Delta^3$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ις΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Η ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι πρὸς τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου (περιλαμβανομένων τῶν βάσεών του) ὡς 2 πρὸς 3. Αἱ στερεότητες τῶν δύο τούτων σωμάτων εἶναι μεταξύ των εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

Εςω ΜΝΠΚ ὁ μέγιςος κύκλος τῆς σφαίρας, ΑΒΓΔ τὸ περιγεγραμμένον τετράγωνον· ἐὰν ἐνταὐτῷ περιςραφῶσι τὸ ἡμικύκλιον ΠΜΚ καὶ τὸ ἡμιτετράγωνον ΠΑΔΚ ὁλόγυρα τῆς διαμέτρου ΠΚ, τὸ μὲν ἡμικύκλιον θέλει γράψει τὴν σφαῖραν, τὸ δὲ ἡμιτετράγωνον τὸν εἰς ταύτην περιγεγραμμένον κύλινδρον. σχ. 270.

Τὸ ὕψος ΑΔ τούτου τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον ΠΚ, ἡ βάσις τοῦ κυλίνδρου ὡς ἔχουσα διάμετρον τὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν ΜΝ, ἰσοῦται μὲ τὸν μέγιςον κύκλον· ἡ κυρτὴ λοιπὸν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια (πρό. 4) εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ μεγίςου κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου του πολλαπλασιασθεῖσα. Τὸ μέτρον τοῦτο εἶναι καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας (πρό. 10)· ὅθεν ἕπεται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου.

Αλλ' ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τέσσαρας μεγίςους κύκλους· ἡ κυρτὴ λοιπὸν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια εἶναι ὡσαύτως ἴση μὲ τέσσαρας μεγίςους κύκλους: ἐὰν προςεθῶσιν αἱ δύο βάσεις ἰσοδυναμοῦσαι μὲ δύο μεγίςους κύκλους, ἡ ὅλη τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου ἐπιφάνεια θέλει εἶναι ἴση μὲ ἕξ μεγίςους κύκλους· ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τῆς σφαίρας εἶναι πρὸς τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου ὡς 4 πρὸς 6, ἢ ὡς 2 πρὸς 3. Ἰδοὺ ἀποδεδειγμένον τὸ πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ δευτέρου, ἄς παρατηρηθῆ ὅτι ἐπειδὴ ἡ βάσις τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου εἶναι ἴση μὲ μέγιςον κύκλον καὶ τὸ ὕψος του μὲ τὴν διάμετρον, ἡ ςερεότης του εἶναι ἴση μὲ τὸν μέγιςον κύκλον πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τὴν διάμετρον (πρό. 1). Ἀλλ' ἡ ςερεότης τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τέσσαρας μεγίςους κύκλους πολλαπλασιασθέντας ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τῆς ἀκτῖνος (πρό. 16), ἢ μὲ ἕνα μέγιςον κύκλον πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τῶν $\frac{4}{3}$ τῆς ἀκτῖνος, ἢ τῶν $\frac{2}{3}$ τῆς διαμέτρου. Η σφαῖρα λοιπὸν εἶναι πρὸς τὸν περιγεγραμμένον κύλινδρον ὡς 2 πρὸς 3, καὶ ἐπομένως αἱ ςερεότητες τῶν δύο τούτων σωμάτων εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ ἐπιφάνειαί των.

Σχόλιον. Ἐὰν φαντασθῶμεν πολύεδρον τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι νὰ ἅπτωνται τῆς σφαίρας, τὸ πολύεδρον τοῦτο ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῆ ὡς συνιςάμενον ἀπὸ πυραμίδας, αἱ ὁποῖαι ὅλαι ἔχουν διὰ κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, καὶ βάσεις τὰς διαφόρους ἕδρας τοῦ πολυέδρου. Τώρα εἶναι φανερὸν ὅτι ὅλαι αὗται αἱ πυραμίδες θέλουν ἔχει κοινὸν ὕψος τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, εἰς τρόπον ὥςε κάθε πυραμὶς θέλει ἰσοῦται μὲ τὴν ἕδραν τοῦ πολυέδρου ἥτις χρησιμεύει εἰς αὐτὴν ὡς βάσις, πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τῆς ἀκτῖνος: Τὸ ὅλον λοιπὸν πολύεδρον θέλει ἰσοῦται μὲ τὴν ἐπιφάνειάν του ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τῆς ἀκτῖνος τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας πολλαπλασιασθεῖσαν.

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι αἱ ςερεότητες τῶν εἰς τὴν σφαῖραν περιγεγραμμένων πολυέδρων εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ ἐπιφάνειαί τῶν. Οὕτως ἡ ἰδιότης τὴν ὁποίαν ἀπεδείξαμεν διὰ τὸν περιγεγραμμένον κύλινδρον εἶναι κοινὴ εἰς ἀναρίθμητα ἄλλα σώματα.

Δυνατὸν νὰ σημειωθῇ ἐπίσης ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν περιγεγραμμένων εἰς τὸν κύκλον πολυγώνων εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ περίμετροί των.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ΄.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Ὑποτεθέντος ὅτι τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΒΜΔ ςρέφεται ὁλόγυρα μιᾶς διαμέτρου ἐκτὸς αὐτοῦ, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ γεννωμένου ςερεοῦ. σχ. 271

Ἂς κατεβασθῶσιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος αἱ κάθετοι ΒΕ, ΔΖ· ἀπὸ τὸ κέντρον Γ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΙ κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΒΔ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΓΒ, ΓΔ.

Τὸ γραφόμενον ςερεὸν ἀπὸ τὸν τομέα ΒΓΑ $=\frac{2}{3}\pi.\overline{\text{ΓΒ}}^2.\text{ΑΕ}$. (πρό. 15)· τὸ γραφόμενον ςερεὸν ἀπὸ τὸν τομέα ΔΓΑ $=\frac{2}{3}\pi.\overline{\text{ΓΒ}}^2.\text{ΑΖ}$· ἡ διαφορὰ λοιπὸν τῶν δύο τούτων ςερεῶν, ἢ τὸ γραφόμενον ςερεὸν ἀπὸ τὸν τομέα ΔΓΒ $=\frac{2}{3}\pi.\overline{\text{ΓΒ}}^2.(\text{ΑΖ}-\text{ΑΕ})=\frac{2}{3}\pi.\overline{\text{ΓΒ}}^2.\text{ΕΖ}$. Ἀλλὰ τὸ γραφόμενον ςερὸν ἀπὸ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΔΓΒ ἔχει μέτρον $\frac{2}{3}\pi.\overline{\text{ΓΙ}}^2.\text{ΕΖ}$ (πρό. 14)· τό γραφόμενον λοιπὸν ςερεὸν ἀπὸ τὸ τμῆμα ΒΜΔ $=\frac{2}{3}\pi.\text{ΕΖ}.(\overline{\text{ΓΒ}}^2-\overline{\text{ΓΙ}}^2)$. Τώρα εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΒΙ ἔχομεν $\overline{\text{ΓΒ}}^2-\overline{\text{ΓΙ}}^2=\overline{\text{ΒΙ}}^2=\frac{1}{4}\overline{\text{ΒΔ}}^2$. Τὸ γραφόμενον λοιπὸν ςερεὸν ἀπὸ τὸ τμῆμα ΒΜΔ θέλει ἔχει μέτρον $\frac{2}{3}\pi\,\text{ΕΖ}.\frac{1}{4}\overline{\text{ΒΔ}}^2$, ἢ $\frac{1}{6}\pi.\overline{\text{ΒΔ}}^2.\text{ΕΖ}$.

Σχόλιον. Τὸ γραφόμενον ςερεὸν ἀπὸ τὸ τμῆμα ΒΜΔ εἶναι πρὸς τὴν σφαῖραν ἥτις ἔχει διάμετρον ΒΔ, ὡς $\frac{1}{6}\pi.\overline{\text{ΒΔ}}^2.\text{ΕΖ}$ πρὸς $\frac{1}{6}\pi.\overline{\text{ΒΔ}}^3$, ἤ :: ΕΖ : ΒΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Κάθε τμῆμα σφαίρας, περιεχόμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, ἔχει μέτρον τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεών του πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τοῦ ὕψους του, πλέον ἡ ςερεότης τῆς σφαίρας ἥτις ἔχει τὸ ἴδιον τοῦτο ὕψος διάμετρον. σχ. 271.

Εςωσαν ΒΕ, ΔΖ, αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων τοῦ τμήματος, ΕΖ τὸ ὕψος του, εἰς τρόπον ὥςε τὸ τμῆμα νὰ παράγεται ἀπὸ τὴν περιςροφὴν τοῦ κυκλικοῦ χωρίου ΒΜΔΖΕ ὁλόγυρα τοῦ ἄξονος ΖΕ. Τὸ γραφόμενον ςερεὸν ἀπὸ τὸ τμῆμα ΒΜΔ (πρό. 17) $= \frac{1}{6}\pi.\overline{\text{ΒΔ}}^2.\text{ΕΖ}$, ὁ γραφόμενος κορμὸς τοῦ κώνου ἀπὸ τὸ τραπέζιον ΔΒΖΕ (πρό. 6) $= \frac{1}{3}\pi.\text{ΕΖ}.(\overline{\text{ΒΕ}}^2 + \overline{\text{ΔΖ}}^2 + \text{ΒΕ}.\text{ΔΖ})$. Τὸ τμῆμα λοιπὸν τῆς σφαίρας τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων ςερεῶν $= \frac{1}{6}\pi.\text{ΕΖ}.(2\overline{\text{ΒΕ}}^2 + 2\overline{\text{ΔΖ}}^2 + 2\text{ΒΕ ΒΖ} + \overline{\text{ΒΔ}}^2)$. Ἀλλά, ἀχθείσης τῆς ΒΟ παραλλήλου τῇ ΕΖ, θέλει εἶναι $\text{ΔΟ} = \text{ΔΖ} - \text{ΒΕ}$, $\overline{\text{ΔΟ}}^2 = \overline{\text{ΔΖ}}^2 - 2\text{ΔΖ}.\text{ΒΕ} + \overline{\text{ΒΕ}}^2$ (9, 3), καὶ ἑπομένως $\overline{\text{ΒΔ}}^2 = \overline{\text{ΒΟ}}^2 + \overline{\text{ΔΟ}}^2 = \overline{\text{ΕΖ}}^2 + \overline{\text{ΔΖ}}^2 - 2\text{ΔΖ} \times \text{ΒΕ} + \overline{\text{ΒΕ}}^2$. Θέτοντες ταύτην τὴν τιμὴν ἀντὶ τοῦ $\overline{\text{ΒΔ}}^2$ εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ τμήματος, καὶ ἐκτελοῦντες πᾶσαν ἀναγωγήν, θέλομεν ἔχει διὰ τὴν ςερεότητα τοῦ τμήματος,

$$\frac{1}{6}\pi.\text{ΕΖ}.(3\overline{\text{ΒΕ}}^2 + 3\overline{\text{ΔΖ}}^2 + \overline{\text{ΕΖ}}^2).$$

Εκφρασις ἥτις ἀναλύεται εἰς δύο μέρη· τὸ μὲν $\frac{1}{6}\pi.EZ.(3BE^2+3\Delta Z^2)$, ἢ $EZ.\left(\frac{\pi.BE^2+\pi.\Delta Z^2}{2}\right)$ εἶναι τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεων πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τοῦ ὕψους· τὸ δὲ $\frac{1}{6}\pi.EZ^3$ παριστάνει τὴν σφαῖραν τῆς ὁποίας ΕΖ εἶναι ἡ διάμετρος (πρό. 15. σχολ.): λοιπὸν κάθε τμῆμα σφαίρας, κτλ.

Πόρισμα. Ἐὰν μία τῶν βάσεων ἦναι μηδὲν, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος τμῆμα ἀποβαίνει σφαιρικὸν τμῆμα μὲ μίαν μόνην βάσιν· λοιπὸν κάθε σφαιρικὸν τμῆμα μὲ μίαν μόνην βάσιν ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους, πλέον ἡ σφαῖρα τῆς ὁποίας τοῦτο τὸ ὕψος εἶναι ἡ διάμετρος.

Γενικὸν σχόλιον.

Εςω Α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου, Υ τὸ ὕψός του, ἡ ςερεότης τοῦ κυλίνδρου θέλει εἶναι $\pi A^2 \times Y$ ἢ $\pi A^2 Y$.

Εςω Α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου, Υ τὸ ὕψός του, ἡ ςερεότης τοῦ κώνου θέλει εἶναι $\pi A^2.\frac{1}{3}Y$, ἢ $\frac{1}{3}\pi A^2 Y$.

Εςωσαν Α καὶ Β αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων ἑνὸς κολοβοῦ κώνου, Υ τὸ ὕψός του; ἡ ςερεότης του θέλει εἶναι $\frac{1}{3}\pi Y(A^2+B^2+AB)$.

Εςω Α ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας· ἡ ςερεότης της θέλει εἶναι $\frac{4}{3}\pi A^3$.

Εςω Α ἡ ἀκτὶς σφαιρικοῦ τομέως, Υ τὸ ὕψος τῆς ζώνης ἥτις χρησιμεύει εἰς αὐτὸν ὡς βάσις· ἡ ςερεότης του θέλει εἶναι $\frac{2}{3}\pi A^2 Y$.

Ἔςωσαν Π καὶ Κ αἱ δύο βάσεις ἑνὸς σφαιρικοῦ τμήματος, Υ τὸ ὕψος του, ἡ ςερεότης τούτου τοῦ τμήματος θέλει εἶναι $\left(\frac{\Pi+K}{2}\right).Y + \frac{1}{6}\pi Y^3$.

Ἐὰν τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ἔχῃ μίαν βάσιν Π, ἐπειδὴ ἡ ἄλλη εἶναι μηδὲν, ἡ ςερεότης του θέλει εἶναι $\frac{1}{2}\Pi Y + \frac{1}{6}\pi Y^3$.

ΤΕΛΟΣ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.