ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Η κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κορμοῦ τοῦ κώνου ΑΔΕΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευράν του ΑΔ ἐπὶ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν περιφερειῶν τῶν δύο του βάσεων ΑΒ, ΔΕ πολλαπλασιασθεῖσαν. σχ. 261.

Εἰς τὸ ἐπίπεδον ΣΑΒ τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ ἄξονος ΣΟ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΣΑ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΑΖ ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ΑΟ· ἂς ἐπιζευχθῇ ΣΖ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΘ παράλληλος τῇ ΑΖ.

Ἐξ αἰτίας τῶν ὁμοίων τριγώνων ΣΑΟ, ΣΔΓ, ἔχομεν $\mathrm{AO} : \Delta\Gamma :: \Sigma\mathrm{A} : \Sigma\Delta$, καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΣΑΖ, ΣΔΘ, ἔχομεν ὡσαύτως $\mathrm{AZ} : \Delta\Theta :: \Sigma\mathrm{A} : \Sigma\Delta$· λοιπὸν $\mathrm{AZ} : \Delta\Theta :: \mathrm{AO} : \Delta\Gamma$, ἢ :: περ. ΑΟ : περ. ΔΓ (11, 4). Ἀλλ' ἐκ τῆς κατασκευῆς ΑΖ = περ. ΑΟ· λοιπὸν ΔΘ = περ. ΔΓ. Τούτου τεθέντος, τὸ τρίγωνον ΣΑΖ, τὸ ὁποῖον ἔχει μέτρον $\mathrm{AZ} \times \frac{1}{2}\Sigma\mathrm{A}$, εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ΣΑΒ, ἥτις ἔχει μέτρον περ. $\mathrm{AO} \times \frac{1}{2}\Sigma\mathrm{A}$. Διὰ λόγον παρόμοιον τὸ τρίγωνον ΣΔΘ εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ΣΔΕ· λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κορμοῦ ΑΔΕΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν τοῦ τραπεζίου ΑΔΘΖ· αὕτη ἔχει μέτρον (7, 3), $\mathrm{A}\Delta \times \left(\frac{\mathrm{AZ} + \Delta\Theta}{2}\right)$· ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ κορμοῦ τοῦ κώνου ΑΔΕΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευράν του ΑΔ πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεών του.

Πόρισμα. Ἀπὸ τὴν στιγμὴν Ι, μέσον τῆς ΑΔ, ἂς ἀχθῇ ἡ ΙΚΛ παράλληλος τῇ ΑΒ, καὶ ἡ ΙΜ παράλληλος τῇ ΑΖ· δεικνύομεν ὡς ἀνωτέρω ὅτι ΙΜ = περ. ΙΚ. Ἀλλὰ τὸ τραπέζιον $\mathrm{A}\Delta\Theta\mathrm{Z} = \mathrm{A}\Delta \times \mathrm{IM} = \mathrm{A}\Delta \times$ περ. ΙΚ. Ημποροῦμεν λοιπὸν ἀκόμη νὰ εἴπωμεν ὅτι *ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς κωνικοῦ κορμοῦ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευράν* του πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τῆς περιφερείας μιᾶς τομῆς γινομένης εἰς ἴσον ἀπόςημα ἀπὸ τὰς δύο βάσεις.

Σχόλιον. Εὰν γραμμή τις ΑΔ, καθ' ὅλην της τὴν ἔκτασιν ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς γραμμῆς ΟΓ καὶ ἐντῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κειμένη, περιςρέφεται ὁλόγυρα τῆς ΟΓ, ἡ γραφομένη ἐπιφάνεια ἀπὸ τὴν ΑΔ θέλει ἔχει μέτρον $ΑΔ \times \frac{(\text{περ. } ΑΟ + \text{περ. } ΔΓ)}{2}$, ἢ $ΑΔ \times$ περ. ΙΚ· ὅπου αἱ γραμμαὶ ΑΟ, ΔΓ, ΙΚ εἶναι κάθετοι ἠγμέναι ἀπὸ τὰ ἄκρα καὶ ἀπὸ τὸ μέσον τῆς γραμμῆς ΑΔ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΟΓ.

Διότι ἐὰν προεκβληθῶσιν αἱ ΑΔ, ΟΓ ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Σ, φανερὸν ὅτι ἡ γραφομένη ἀπὸ τὴν ΑΔ ἐπιφάνειαν εἶναι ἡ τοῦ κολοβοῦ κώνου τῶν βάσεων τοῦ ὁποίου ΟΑ καὶ ΔΓ εἶναι αἱ ἀκτῖνες, ἔχοντος τοῦ ὅλου κώνου κορυφὴν τὴν ςιγμὴν Σ. Λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια αὕτη θέλει ἔχει τὸ εἰρημένον μέτρον.

Τὸ μέτρον τοῦτο ἤθελε πάντοτε ὑπάρχει, καὶ ὅταν ἡ ςιγμὴ Δ ἤθελε πέσει εἰς Σ, ἐκ τοῦ ὁποίου ἤθελε προκύψει κῶνος, καὶ ὡσαύτως ὅταν ἡ γραμμὴ ΑΔ ἤθελεν εἶναι παράλληλος τοῦ ἄξονος, ἐκ τοῦ ὁποίου ἤθελε γεννηθῇ κύλινδρος. Εἰς τὴν πρώτην περίςασιν ἡ ΔΓ ἤθελεν εἶναι μηδὲν, εἰς τὴν δευτέραν ἴση μὲ τὴν ΑΟ καὶ μὲ τὴν ΙΚ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

ΛΗΜΜΑ.

Εςωσαν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, πολλαὶ διαδοχικαὶ πλευραὶ κανονικοῦ πολυγώνου, Ο τὸ κέντρον του, καὶ ΟΙ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου· ὑποτεθέντος ὅτι ἡ μερὶς τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔ, ὅλη ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς διαμέτρου ΖΗ κειμένη, περιςρέφεται ὁλόγυρα ταύτης τῆς διαμέτρου, ἡ γραφομένη ἐπιφάνεια ἀπὸ ΑΒΓΔ θέλει ἔχει μέτρον $ΜΚ \times$ περ. ΟΙ, ὄντος ΜΚ τοῦ ὕψους ταύτης τῆς ἐπιφανείας ἢ τοῦ περιεχομένου μέρους τοῦ ἄξονος μεταξὺ τῶν καθέτων ΑΜ, ΔΚ. σχ. 262.

Επειδὴ ἡ ςιγμὴ Ι εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ, καὶ ΙΚ′ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἠγμένη ἀπὸ τὴν ςιγμὴν Ι, ἡ γραφομένη ἐπιφάνεια ἀπὸ τὴν ΑΒ θέλει ἔχει μέτρον ΑΒ× περ. ΙΚ′ (πρό. 8). Ας ἀχθῇ ἡ ΑΧ παράλληλος τοῦ ἄξονος· τὰ τρίγωνα ΑΒΧ, ΟΙΚ′ ἔχουν τὰς πλευρὰς καθέτους τὴν κάθε μίαν εἰς τὴν κάθε μίαν, δηλαδὴ τὴν ΟΙ εἰς τὴν ΑΒ, τὴν ΙΚ′ εἰς τὴν ΑΧ, καὶ τὴν ΟΚ′ εἰς τὴν ΒΧ· εἶναι λοιπὸν ὅμοια καὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν ΑΒ : ΑΧ ἢ ΜΝ : : ΟΙ : ΙΚ′, ἢ : : περ. ΟΙ : περ. ΙΚ′· λοιπὸν ΑΒ× περ. ΙΚ′=ΜΝ× περ. ΟΙ. Οθεν βλέπομεν ὅτι ἡ γραφομένη ἐπιφάνεια ἀπὸ τὴν ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος της ΜΝ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου πολλαπλασιασθέν· ὡσαύτως ἡ γραφομένη ἐπιφάνεια ἀπὸ ΒΓ,= ΝΠ× περ. ΟΙ, ἡ γραφομένη ἀπὸ ΓΔ,=ΠΚ× περ. ΟΙ. Λοιπὸν ἡ ἀπὸ τὴν μερίδα τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔ γραφομένη ἔχει μέτρον (ΜΝ+ΝΠ+ΠΚ)× περ. ΟΙ, ἢ ΜΚ× περ. ΟΙ· εἶναι λοιπὸν ἴση μὲ τὸ ὕψος της ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου πολλαπλασιασθέν.

Πόρισμα. Εὰν τὸ ὅλον πολύγωνον ἦναι ἀρτιόπλευρον, καὶ ὁ ἄξων ΖΗ διέρχεται διὰ δύο ἀπέναντι κορυφῶν Ζ καὶ Η, ἡ ὅλη γραφομένη ἐπιφάνεια ἀπὸ τὴν περιςροφὴν τοῦ ἡμιπολυγώνου ΖΑΓΗ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὸν ἄξονα ΖΗ πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Ο ἄξων ΖΗ ἐνταῦτῷ θέλει εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι′.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Η ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρον της ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγίςου κύκλου πολλαπλασιασθεῖσαν.

Λέγω 1.ον ὅτι ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας, ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγίςου κύκλου της πολλλαπλασιασθεῖσα, δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ τὴν ἐπιφάνειαν μεγαλητέρας σφαίρας. Διότι ἔςω, εἰ δυνατὸν, ΑΒ × περ. ΑΓ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΔ. σχ. 263.

Εἰς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΑ, ἂς περιγραφθῇ ἀρτιόπλευρον κανονικὸν πολύγωνον τὸ ὁποῖον νὰ μὴ συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν ἥτις ἔχει ἀτῖνα ΓΔ· ἔςωσαν Μ καὶ Σ δύο ἀπέναντι κορυφαὶ τούτου τοῦ πολυγώνου· καὶ ὁλόγυρα τῆς διαμέτρου ΜΣ ἂς περιςραφῇ τὸ ἡμιπολύγωνον ΜΠΣ. Η γραφομένη ἐπιφάνεια θέλει ἔχει μέτρον ΜΣ × περ. ΑΓ (πρό. 9.)· ἀλλὰ ΜΣ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἡ ἀπὸ τὸ πολύγωνον γραφομένη ἐπιφάνεια εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ ΑΒ × περ. ΑΓ, καὶ ἐπομένως μεγαλητέρα ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ἀκτὶς τῆς ὁποίας εἶναι ΓΔ. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι μεγαλητέρα τῆς ἀπὸ τὸ πολύγωνον γραφομένης, ἐπειδὴ ἡ πρώτη περιτυλίσσει πανταχόθεν τὴν δευτέραν. Λοιπὸν 1.ον ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγίςου κύκλου της πολλαπλασιασθεῖσα δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ τὴν ἐπιφάνειαν μεγαλητέρας σφαίρας.

Λέγω 2.ον ὅτι τὸ ἴδιον τοῦτο γινόμενον δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ τὴν ἐπιφάνειαν μικροτέρας σφαίρας. Διότι ἔςω, εἰ δυνατὸν, ΔΕ × περ. ΓΔ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΑ. Γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς εἰς τὴν πρώτην περίςασιν, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ γεννωμένου ςερεοῦ ἀπὸ τὸ πολύγωνον θέλει εἶναι ἴση μὲ ΜΣ × περ. ΑΓ. Αλλὰ ΜΣ εἶναι μικροτέρα τῆς ΔΕ, καὶ περ. ΑΓ μικροτέρα τῆς περ. ΓΔ· λοιπὸν, διὰ τοὺς δύο τούτους λόγους, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἀπὸ τὸ πολύγωνον γραφομένου ςερεοῦ ἤθελεν εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ΔΕ × περ. ΓΔ καὶ ἐπομένως μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι ΑΓ. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, ἡ γραφομένη ἀπὸ τὸ πολύγωνον ἐπιφάνεια, εἶναι μεγαλητέρα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΑ, διότι ἡ πρώτη ἐπιφάνεια περιτυλύσσει τὴν δευτέραν· λοιπὸ 2.ον ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγίςου κύκλου της πολλαπλασιασθεῖσα δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ τὴν ἐπιφάνειαν μικροτέρας σφαίρας.

Η ἐπιφάνεια λοιπὸν τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρόν της ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγίςου κύκλου της πολλαπλασιασθεῖσαν.

Πόρισμα. Η ἐπιφάνεια μεγίςου κύκλου ἔχει μέτρον τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας του ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς ἀκτῖνος ἤ τοῦ τετάρτου τῆς διαμέτρου· ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τῆς σφαίρας εἶναι **τετραπλασία** τῆς **ἐπιφανείας μεγίςου κύκλου.**

Σχόλιον. Αφ' οὗ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐμετρήθη καὶ ἐσυγκρίθη ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας μὲ ἐπιπέδους ἐπιφανείας, εὔκολον νὰ προδιορισθῇ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῶν ἀτράκτων καὶ σφαιρικῶν τριγώνων, τῶν ὁποίων ἀνωτέρω ἐπροσδιορίσθη ὁ λόγος μὲ τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας.

Καὶ πρῶτον μὲν ὁ ἄτρακτος τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι Α, εἶναι πρὸς τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν ὡς ἡ γωνία Α πρὸς τέσσαρας ὀρθὰς (20, 7), ἤ ὡς τὸ τόξον τοῦ μεγίςου κύκλου τὸ ὁποῖον μετρεῖ τὴν γωνίαν Α πρὸς τὴν περιφέρειαν τούτου τοῦ ἰδίου μεγίςου κύκλου. Αλλ' ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ ταύτην τὴν περιφέρειαν πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὴν διάμετρον· ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ ἀτράκτου εἶναι ἴση μὲ τὸ τόξον τὸ ὁποῖον μετρεῖ τὴν γωνίαν τούτου τοῦ ἀτράκτου ἐπὶ τὴν διάμετρον πολλαπλασιασθέν.

Δεύτερον δὲ κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον ἰσοδυναμεῖ μὲ ἄτρακτον τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑπεροχῆς τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν του ἐπάνω εἰς δύο ὀρθὰς (23, 7). Ἔςωσαν λοιπὸν Π, Κ, Ρ τὰ τόξα μεγίςου κύκλου τὰ ὁποῖα μετροῦν τὰς τρεῖς γωνίας τοῦ τριγώνου. Ἔςω Γ ἡ περιφέρεια μεγίςου κύκλου καὶ Δ ἡ διάμετρός του· τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον θέλει ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν ἄτρακτον τοῦ ὁποίου ἡ γωνία ἔχει μέτρον $\frac{\Pi+K+P-\frac{1}{2}\Gamma}{2}$, καὶ ἐπομένως ἡ ἐπιφάνειάτου θέλει εἶναι $\Delta\times\frac{(\Pi+K+P-\frac{1}{2}\Gamma)}{2}$.

Οὕτως, ὅταν τὸ τρίγωνον ἦναι τρισσορθογώνιον, ἕκαςον τῶν τόξων Π, Κ, Ρ, εἶναι ἴσον μὲ $\frac{1}{4}\Gamma$, τὸ ἄθροισμά των μὲ $\frac{3}{4}\Gamma$, ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τούτου ἐπάνω εἰς $\frac{1}{2}\Gamma$, εἶναι $\frac{1}{4}\Gamma$, καὶ τὸ ἥμισυ ταύτης τῆς ὑπεροχῆς $=\frac{1}{8}\Gamma$· ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ τρισσορθογωνίου τριγώνου $=\frac{1}{8}\Gamma\times\Delta$, ἰσοῦται δηλαδὴ μὲ τὸ ὄγδοον μέρος τῆς ὅλης σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

Τὸ μέτρον τῶν πολυγώνων ἕπεται ἀμέσως ἀπὸ τὸ τῶν τριγώνων, ἄλλως δὲ κατὰ πάντα ἐπροσδιορισθη διὰ τῆς πρό. ΚΔ′ βιβλ. Ζ′, διότι ἡ μονὰς τοῦ μέτρου, ἥτις εἶναι τὸ τρισσορθογώνιον τρίγωνον ἐκτιμήθη εἰς ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ′.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἡ ἐπιφάνεια ὁποιασδήποτε σφαιρικῆς ζώνης εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος ταύτης τῆς ζώνης ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγίςου κύκλου πολλαπλασιασθέν.

Ἔςω ΕΖ ὁποιονδήποτε τόξον ἔλασσον ἢ μεῖζον τεταρτημορίου περιφερείας, καὶ ἃς κατεβασθῇ ἡ ΖΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΕΓ· λέγω ὅτι ἡ μὲ μίαν μόνην βάσιν ζώνη, ἡ ἀπὸ τὴν περιςροφὴν τοῦ τόξου ΕΖ ὁλόγυρα τῆς ΕΓ γραφομένη, θέλει ἔχει μέτρον ΕΗ × περ. ΕΓ. σχ. 269.

Διότι ἃς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι ἡ ζώνη αὕτη ἔχει μέτρον μικρότερον, καὶ, εἰ δυνατὸν, ἔςω τὸ μέτρον τοῦτο = ΕΗ × περ. ΓΑ. Ἂς ἐγγραφθῇ εἰς τὸ τόξον ΕΖ μερὶς κανονικοῦ πολογώνου ΕΜΝΟΠΖ αἱ πλευραὶ τῆς ὁποίας νὰ μὴ φθάνουν εἰς τὴν περιφέρειαν τὴν ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα ΓΑ γραφομένην, καὶ ἂς κατεβασθῇ ἡ ΓΙ κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΜ· ἡ ἀπὸ τὸ πολύγωνον ΕΜΖ ὁλόγυρα τῆς ΕΖ στρεφόμενον γραφομένη ἐπιφάνεια ἔχει μέτρον ΕΗ × περ. ΓΙ (πρό. 9). Ἡ ποσότης αὕτη εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ ΕΗ × περ. ΑΓ, τὴν, ἐξ ὑποθέσεως, μετροῦσαν τὴν ἀπὸ τὸ τόξον ΕΖ γραφομένην ζώνην. Ἡ ἀπὸ τὸ πολύγωνον λοιπὸν ΕΜΝΟΠΖ γραφομένη ἐπιφάνεια ἤθελεν εἶναι μεγαλητέρα τῆς ὑπὸ τοῦ περιγεγραμμένου τόξου ΕΖ γραφομένης ἐπιφανείας· τώρα, ἐξ ἐναντίας, ἡ τελευταία αὕτη ἐπιφάνεια ὡς περιτυλίσσουσα τὴν πρώτην πανταχόθεν εἶναι μεγαλητέρα αὐτῆς· λοιπὸν 1.ον τὸ μέτρον κάθε σφαιρικῆς ζώνης μὲ μίαν μόνην βάσιν δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι μικρότερον τοῦ ὕψους ταύτης τῆς ζώνης ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου παλλαπλασιασθέντος.

Λέγω δεύτερον ὅτι τὸ μέτρον τῆς ἰδίας ζώνης δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι μεγαλήτερον τοῦ ὕψους ταύτης τῆς ζώνης ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου πολλαπλασιασθέντος. Διότι ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ λόγος εἶναι περὶ τῆς ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΒ ὁλόγυρα τῆς ΑΓ γραφομένης ζώνης, καὶ ἔσω, εἰ δυνατὸν, ζώνη ΑΒ > ΑΔ × περ. ΑΓ. Ἡ ὅλη τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια ἀπὸ δύο ζώνας ΑΒ, ΒΘ συνισαμένη, ἔχει μέτρον ΑΘ × περ. ΑΓ (πρό. 10), ἢ ΑΔ × περ. ΑΓ + ΔΘ × περ. ΑΓ· ἐὰν λοιπὸν ζώνη ΑΒ > ΑΔ × περ ΑΓ, ἀναγκαίως ζώνη ΒΘ < ΔΘ × περ. ΑΓ· τὸ ὁποῖον ἐναντιοῦται εἰς τὰ ἤδη ἀποδειχθέντα. Λοιπὸν 2.ον τὸ μέτρον μὲ μίαν μόνην βάσιν σφαιρικῆς ζώνης δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι μεγαλήτερον τοῦ ὕψους ταύτης τῆς ζώνης ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγίστου πολλαπλασιασθέντος.

Λοιπὸν τέλος κάθε σφαιρικὴ ζώνη μὲ μίαν μόνην βάσιν ἔχει μέτρον τὸ ὕψος ταύτης τῇ ζώνης ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγίςου κύκλου πολλαπλασιασθέντος.

Ἄς θεωρήσωμεν τώρα ὁποιανδήποτε ζώνην, μὲ δύο βάσεις, ἀπὸ τὴν περιςροφὴν τοῦ τόξου ΖΘ ὁλόγυρα τῆς διαμέτρου ΔΕ γραφομένην, καὶ ἂς κατεβασθῶσιν αἱ κάθετοι ΖΟ, ΘΚ ἐπὶ ταύτης τῆς διαμέτρου. Η ἀπὸ τὸ τόξον ΖΘ γραφομένη ζώνη εἶναι ἡ διαφορὰ δύο ζωνῶν ἀπὸ τὰ τόξα ΔΘ καὶ ΔΖ γραφομένων· αὗται μετροῦνται ὑπὸ ΔΚ $\times$ περ. ΓΔ καὶ ΔΟ $\times$ περ. ΓΔ· ἐκείνη λοιπὸν ἔχει μέτρον (ΔΚ—ΔΟ) $\times$ περ. ΓΔ ἢ ΟΚ $\times$ περ. ΓΔ.

Ὁποιαδήποτε λοιπὸν σφαιρικὴ ζώνη μὲ μίαν ἢ δύο βάσεις, ἔχει μέτρον τὸ ὕψος της ἐπὶ τῆς περιφερείας μεγίςου κύκλου πολλαπλασιασθέν. σχ. 220.

Πόρισμα. Δύο ζῶναι εἰς τὴν αὐτὴν ἢ εἰς ἴσας σφαίρας λαμβανόμεναι, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των, καὶ ὁποιαδήποτε ζώνη εἶναι πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ὡς τὸ ὕψος ταύτης τῆς ζώνης πρὸς τὴν διάμετρον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΒΑΓ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΒΓΕΖ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους ταυτοχρόνως ςρέφωνται ὁλόγυρα τῆς κοινῆς βάσεως ΒΓ, τὸ γραφόμενον ἀπὸ τὴν περιςροφὴν τοῦ τριγώνου ςερεὸν θέλει εἶναι τὸ τρίτον τοῦ γραφομένου ἀπὸ τὴν περιςροφὴν τοῦ ὀρθογωνίου κυλίνδρου. σχ. 264 καὶ 265.

Ἄς κατεβασθῇ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἡ κάθετος ΑΔ· ὁ ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ γραφόμενος κῶνος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον ΑΖΒΔ γραφομένου κυλίνδρου (πρό. 5), ὡσαύτως ὁ ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΔΓ γραφόμενος κῶνος εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον ΑΔΓΕ γραφομένου κυλίνδρου· τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν δύο κώνων ἢ τὸ ἀπὸ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον γραφόμενον ϛερεὸν εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο κυλίδρων ἢ τοῦ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον ΒΓΕΖ γραφομένου κυλίνδρου. σχ. 264.

Ἐὰν ἡ κάθετος ΑΔ πέσῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, τότε τὸ ἀπὸ τὸ ΑΒΓ γραφόμενον ϛερεὸν θέλει εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ γραφομένων κώνων· ἀλλ' ἐνταυτῷ ὁ ἀπὸ ΒΓΕΖ γραφόμενος κύλινδρος θέλει εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ἀπὸ ΑΖΒΔ, ΑΕΓΔ γραφομένων κυλίνδρων. Η ϛερεότης λοιπὸν τοῦ ἀπὸ τὴν περιϛροφὴν τοῦ τριγώνου γραφομένου ϛερεοῦ πάντοτε θέλει εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἀπὸ τὴν περιϛροφὴν τοῦ ὀρθογωνίου τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους γραφομένου κυλίνδρου. σχ. 265.

Σχόλιον. Η ἔκφρασις τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύκλου ὅϛις ἔχει ἀκτῖνα ΑΔ εἶναι $\pi \times \overline{A\Delta}^2$· λοιπὸν $\pi \times \overline{A\Delta}^2 \times B\Gamma$ εἶναι τὸ μέτρον τοῦ γραφομένου κυλίνδρου ἀπὸ ΒΓΕΖ, καὶ $\frac{1}{3}\pi \times \overline{A\Delta}^2 \times B\Gamma$ εἶναι τὸ μέτρον τοῦ γραφομένου ϛερεοῦ ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.
ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Ὑποτεθέντος ὅτι τὸ τρίγωνον ΓΑΒ ϛρέφεται ὁλόγυρα τῆς γραμμῆς ΓΔ, ἠγμένης ὁπωϛδήποτε ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ἀπὸ τὴν κορυφήν του Γ, νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον τοῦ οὕτως γεννωμένου ϛερεοῦ. σχ. 266.

Ἂς προεκβληθῇ ἡ πλευρὰ ΑΒ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὸν ἄξονα ΓΔ εἰς Δ, ἀπὸ τὰς ϛιγμὰς Α καὶ Β ἂς κατεβασθῶσιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος αἱ κάθετοι ΑΜ, ΒΝ.

Τὸ γραφόμενον ϛερεὸν ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΓΑΔ ἔχει μέτρον (πρό. 12) $\frac{1}{3}\pi \times \overline{AM}^2 \times \Gamma\Delta$· τὸ γραφόμενον ϛερεὸν ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΓΒΔ ἔχει μέτρον $\frac{1}{3}\pi \times \overline{BN}^2 \times \Gamma\Delta$· ἡ διαφορὰ λοιπὸν τῶν ςερεῶν τούτων ἤ τὸ ἀπὸ ΑΒΓ γραφόμενον ςερεὸν ἔχει μέτρον $\frac{1}{3}\pi.(\overline{\mathrm{MA}}^2-\overline{\mathrm{BN}}^2)\times\Gamma\Delta$.

Δυνατὸν νὰ δοθῇ εἰς ταύτην τὴν ἔκφρασιν ἄλλη μορφή· ἀπὸ τὴν ςιγμὴν Ι, μέσον τῆς ΑΒ, ἄς ἀχθῇ ἡ ΙΚ′ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ, καὶ διὰ τῆς ςιγμῆς Β ἄς ἀχθῇ ἡ ΒΟ παράλληλος τῇ ΓΔ, θέλει εἶναι $\mathrm{AM}+\mathrm{BN}=2\mathrm{IK}'$ (7, 3) καὶ $\mathrm{AM}-\mathrm{BN}=\mathrm{AO}$· λοιπὸν $(\mathrm{AM}+\mathrm{BN})(\mathrm{AM}-\mathrm{BN})$ ἢ $\overline{\mathrm{AM}}^2-\overline{\mathrm{BN}}^2=2\mathrm{IK}'\times\mathrm{AO}$ (10, 3). Τὸ μέτρον λοιπὸν τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος ςερεοῦ ἐκφράζεται καὶ διὰ $\frac{2}{3}\pi\times\mathrm{IK}'\times\mathrm{AO}\times\Gamma\Delta$. Ἀλλ' ἐὰν κατεβασθῇ ἡ ΓΠ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, τὰ τρίγωνα ΑΒΟ, ΔΓΠ, θέλουν εἶναι ὅμοια, καὶ θέλουν δώσει τὴν ἀναλογίαν $\mathrm{AO}:\Gamma\Pi::\mathrm{AB}:\Gamma\Delta$· ὅθεν προκύπτει $\mathrm{AO}\times\Gamma\Delta=\Gamma\Pi\times\mathrm{AB}$· ἄλλως $\Gamma\Pi\times\mathrm{AB}$ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· οὕτως ἔχομεν $\mathrm{AO}\times\Gamma\Delta=2\mathrm{AB}\Gamma$· τὸ γραφόμενον λοιπὸν ςερεὸν ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει ὁμοίως μέτρον $\frac{4}{3}\pi\times\mathrm{AB}\Gamma\times\mathrm{IK}'$, ἢ, ὅπερ ταὐτὸν, $\mathrm{AB}\Gamma\times\frac{2}{3}$ περ. ΙΚ′ (διότι περ. $\mathrm{IK}'=2\pi.\mathrm{IK}'$). Τὸ γραφόμενον λοιπὸν ςερεὸν ἀπὸ τὴν περιςροφὴν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἔχει μέτρον τὸ ἐμβαδὸν τούτου τοῦ τριγώνου πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τῶν δύο τρίτων τῆς περιφερείας τὴν ὁποίαν γράφει ἡ ςιγμὴ Ι μέσον τῆς βάσεώς του.

Πόρισμα. Ἐὰν ἡ πλευρὰ $\mathrm{A}\Gamma=\Gamma\mathrm{B}$, ἡ γραμμὴ ΓΙ θέλει εἶναι κάθετος εἰς ΑΒ, τὸ ἐμβαδὸν ΑΒΓ θέλει ἰσοῦται μὲ $\mathrm{AB}\times\frac{1}{2}\Gamma\mathrm{I}$, καὶ ἡ ςερεότης $\frac{4}{3}\pi\times\mathrm{AB}\Gamma\times\mathrm{IK}'$ ἀποβαίνει $\frac{2}{3}\pi\times\mathrm{AB}\times\mathrm{IK}'\times\Gamma\mathrm{I}$. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΟ, ΓΙΚ′, εἶναι ὅμοια καὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν $\mathrm{AB}:\mathrm{BO}$ ἢ $\mathrm{MN}::\Gamma\mathrm{I}:\mathrm{IK}'$· λοιπὸν $\mathrm{AB}\times\mathrm{IK}'=\mathrm{MN}\times\Gamma\mathrm{I}$· τὸ γραφόμενον λοιπὸν ςερεὸν ἀπὸ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ θέλει ἔχει μέτρον $\frac{2}{3}\pi\times\overline{\mathrm{MN}}^2\times\Gamma\mathrm{I}$. σχ. 267.

Σχόλιον. Η γενικὴ λύσις φαίνεται ὅτι ὑποθέτει τὴν συναπάντησιν μὲ τὸν ἄξονα τῆς γραμμῆς ΑΒ ὅταν προεκβληθῇ· ἀλλὰ τὰ ἐξαγόμενα ἐπίσης ἤθελον εἶναι ἀληθῆ καὶ ὅταν ἡ ΑΒ ἤθελεν εἶναι παράλληλος τοῦ ἄξονος.

Τῷ ὄντι ὁ γραφόμενος κύλινδρος ἀπὸ ΑΜΝΒ ἔχει μέτρον π.$\overline{ΑΜ}^2$.ΜΝ, ὁ γραφόμενος κῶνος ἀπὸ ΔΓΜ = $\frac{1}{3}$ π.$\overline{ΑΜ}^2$.ΓΜ, καὶ ὁ γραφόμενος κῶνος ἀπὸ ΒΓΝ = $\frac{1}{3}$ π.$\overline{ΑΜ}^2$.ΓΝ. Η πρόσθεσις τῶν δύο πρώτων ςερεῶν καὶ ἡ ἀφαίρεσις ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον τοῦ τρίτου, δίδει διὰ τὴν ςερεότητα τοῦ γραφομένου ςεροῦ ἀπὸ ΑΒΓ, π.$\overline{ΑΜ}^2$.(ΜΝ+$\frac{1}{3}$ΓΜ—$\frac{1}{3}$ΓΝ): καὶ ἐπειδὴ ΓΝ—ΓΜ = ΜΝ, ἡ ἔκφρασις αὕτη ἄγεται εἰς π.$\overline{ΑΜ}^2$.$\frac{2}{3}$ΜΝ ἢ $\frac{2}{3}$π.$\overline{ΓΠ}^2$.ΜΝ, τὸ ὁποῖον συμφωνεῖ μὲ τὰ ἤδη εὑρεθέντα ἐξαγόμενα. σχ. 268.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εςωσαν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, πολλαὶ διαδοχικαὶ πλευραὶ κανονικοῦ πολυγώνου, Ο τὸ κέντρον του, καὶ ΟΙ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου· ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ὁ πολυγωνικὸς τομεὺς ΑΟΔ, ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς διαμέτρου ΖΗ κείμενος, ςρέφεται ὁλόγυρα αὐτῆς, τὸ γραφόμενον ςερεὸν θέλει ἔχει μέτρον $\frac{2}{3}$ π.$\overline{ΟΙ}^2$.ΜΚ, ἔνθα ΜΚ εἶναι τὸ μέρος τοῦ ἄξονος τὸ ὁποῖον περατοῦται ἀπὸ τὰς ἀκρινὰς καθέτους ΑΜ, ΔΚ. σχ. 262.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ τὸ πολύγωνον εἶναι κανονικὸν, ὅλα τὰ τρίγωνα ΑΟΒ, ΒΟΓ, κ. τ. λ. εἶναι ἴσα καὶ ἰσοσκελῆ. Τώρα, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς προλαβούσης προτάσεως, τὸ παραγόμενον ςερεὸν ἀπὸ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΟΒ ἔχει μέτρον $\frac{2}{3}\pi.ΟΙ^{2}.ΜΝ$, τὸ γραφόμενον ϛερεὸν ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΒΟΓ ἔχει μέτρον $\frac{2}{3}\pi.ΟΙ^{2}.ΝΠ$, καὶ τὸ γραφόμενον ϛερεὸν ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΓΟΔ ἔχει μέτρον $\frac{2}{3}\pi.ΟΙ^{2}.ΠΚ$· τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τούτων τῶν ϛερεῶν, ἢ τὸ ὅλον ϛερεὸν τὸ γραφόμενον ἀπὸ τὸν πολυγωνικὸν τομέα ΑΟΔ, θέλει ἔχει μέτρον $\frac{2}{3}\pi.ΟΙ^{2}.(ΜΝ+ΝΠ+ΠΚ)$ ἢ $\frac{2}{3}\pi.ΟΙ^{2}.ΜΚ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Κάθε σφαιρικὸς τομεὺς ἔχει μέτρον τὴν ζώνην τὴν χρησιμεύουσαν εἰς αὐτὸν ὡς βάσιν ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τῆς ἀκτῖνος πολλαπλασιασθεῖσαν, καὶ ἡ ὅλη σφαῖρα ἔχει μέτρον τὴν ἐπιφάνειάν της ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τῆς ἀκτῖνος πολλαπλασιασθεῖσαν.

Εϛω ΑΒΓ ὁ κυκλικὸς τομεὺς ὅϛις, μὲ τὴν περιϛροφήν του ὁλόγυρα τῆς ΑΓ, γράφει τὸν σφαιρικὸν τομέα. Οὔσης τῆς γραφομένης ἀπὸ ΑΒ ζώνης ἴσης μὲ ΑΔ $\times$ περ. ΑΓ ἢ $2\pi.ΑΓ.ΑΔ$ (πρό. 12), λέγω ὅτι ὁ σφαιρικὸς τομεὺς θέλει ἔχει μέτρον ταύτην τὴν ζώνην ἐπὶ $\frac{1}{3}$ΑΓ πολλαπλασιασθεῖσαν, ἢ $\frac{2}{3}\pi.ΑΓ^{2}.ΑΔ$. σχ. 269.

Τῷ ὄντι, ἂς ὑποθέσωμεν 1.ον, εἰ δυνατὸν, ὅτι ἡ ποσότης αὕτη $\frac{2}{3}\pi.ΑΓ^{2}.ΑΔ$ εἶναι τὸ μέτρον μεγαλητέρου σφαιρικοῦ τομέως, φερ' εἰπεῖν, τοῦ γραφομένου ἀπὸ τὸν κυκλικὸν τομέα ΕΓΖ ὅμοιον μὲ τὸν ΑΓΒ.

Ας ἐγγραφθῇ εἰς τὸ τόξον ΕΖ ἡ μερὶς κανονικοῦ πολυγώνου ΕΜΝΖ αἱ πλευραὶ τῆς ὁποίας νὰ μὴ συναπαντοῦν τὸ τόξον ΑΒ. ἂς ἐννοηθῇ ἀκολούθως ὅτι ἐν ᾧ ϛρέφεται ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΕΓΖ, ϛρέφεται καὶ ὁ πολυγωνικὸς

ΕΝΖΓ ὁλόγυρα τῆς ΕΓ. Εςω ΓΙ ἡ ἀκτὶς τοῦ εἰς τὸ πολύγωνον ἐγγεγραμμένου κύκλου, καὶ ἄς κατεβασθῇ ἡ ΖΗ κάθετος ἐπὶ τῆς ΕΓ. Τὸ γραφόμενον ςερεὸν ἀπὸ τὸν πολυγωνικὸν τομέα θέλει ἔχει μέτρον $\frac{2}{3}\pi.\overline{ΓΙ}^{2}.ΕΗ$ (πρό. 14). Τώρα ΓΙ εἶναι μείζων τῆς ΑΓ ἐκ τῆς κατασκευῆς, καὶ ΕΗ μείζων τῆς ΑΔ· διότι, ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΑΒ, ΕΖ, τὰ τρίγωνα ΕΖΗ, ΑΒΔ, ὄντα ὅμοια, δίδουν τὴν ἀναλογίαν ΕΗ : ΑΔ : : ΖΗ : ΒΔ : : ΓΖ : ΓΒ· λοιπὸν ΕΗ $>$ ΑΔ.

Διὰ τοὺς δύο τούτους λόγους $\frac{2}{3}\pi.\overline{ΓΙ}^{2}.ΕΗ$ εἶναι μεῖζον τοῦ $\frac{2}{3}\pi.\overline{ΓΑ}^{2}.ΑΔ$: ἡ πρώτη ἔκφρασις εἶναι τὸ μέτρον τοῦ γραφομένου ςερεοῦ ἀπὸ τὸν πολυγωνικὸν τομέα, ἡ δευτέρα, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι ἡ τοῦ σφαιρικοῦ τομέως τοῦ γραφομένου ἀπὸ τὸν κυκλικὸν ΕΓΖ· λοιπὸν τὸ γραφόμενον ςερεὸν ἀπὸ τὸν πολυγωνικὸν τομέα ἤθελεν εἶναι μεῖζον τοῦ γραφομένου σφαιρικοῦ τομέως ἀπὸ τὸν κυκλικόν. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος ςερεὸν εἶναι μικρότερον τοῦ σφαιρικοῦ τομέως, ὡς περιεχόμενον· ἡ ὑπόθεσις λοιπὸν ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀνεχωρήσαμεν εἶναι ἀδύνατος· λοιπὸν 1.ον ἡ ζώνη ἢ βάσις σφαιρικοῦ τομέως ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τῆς ἀκτῖνος πολλαπλασιασθεῖσα δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ μεγαλήτερον σφαιρικὸν τομέα.

Λέγω 2ον ὅτι τὸ ἴδιον τοῦτο γινόμενον δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ μικρότερον σφαιρικὸν τομέα. Διότι ἔςω ΓΕΖ ὁ κυκλικὸς τομεὺς ὅςις μὲ τὴν περιςροφήν του παράγει τὸν σφαιρικὸν δεδομένον τομέα, καὶ ἄς ὑποτεθῇ, εἰ δυνατὸν ὅτι $\frac{2}{3}\pi.\overline{ΓΕ}^{2}.ΕΗ$ εἶναι τὸ μέτρον μικροτέρου σφαιρικοῦ τομέως, φερ' εἰπεῖν, τοῦ ἀπὸ τὸν κυκλικὸν τομέα ΑΓΒ παραγομένου. Μενούσης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς ἀνωτέρω, τὸ γραφόμενον ϛερεὸν ἀπὸ τὸν πολυγωνικὸν τομέα θέλει ἔχει πάντοτε μέτρον $\frac{2}{3}$π.$\overline{ΓΙ}^2$.ΕΗ. Αλλὰ ΓΙ εἶναι μικροτέρα τῆς ΓΕ· λοιπὸν τὸ ϛερεὸν εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{2}{3}$π.$\overline{ΓΕ}^2$.ΕΗ, μέτρου, ἐξ ὑποθέσεως, τοῦ γραφομένου σφαιρικοῦ τομέως ἀπὸ τὸν κυκλικὸν ΑΓΒ. Τὸ γραφόμενον λοιπὸν ϛερεὸν ἀπὸ τὸν πολυγωνικὸν τομέα ἤθελεν εἶναι μικρότερον τοῦ γραφομένου σφαιρικοῦ τομέως ἀπὸ ΑΓΒ. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, τὸ πέρὶ οὗ ὁ λόγος ϛερεὸν, ὡς περιέχον τὸν σφαιρικὸν τομέα, εἶναι μεγαλήτερον ἀπὸ αὐτόν. Λοιπὸν 2.ον ἀδύνατον ἡ ζώνη σφαιρικοῦ τομέως πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τῆς ἀκτῖνος νὰ ἦναι τὸ μέτρον μικροτέρου σφαιρικοῦ τομέως.

Κάθε λοιπὸν σφαιρικὸς τομεὺς ἔχει μέτρον τὴν ζώνην ἥτις χρησιμεύει εἰς αὐτὸν ὡς βάσις πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τῆς ἀκτῖνος.

Κυκλικὸς τομεὺς ΑΓΒ ἠμπορεῖ νὰ αὐξήσῃ ἕως οὗ νὰ γένῃ ἴσος μὲ τὸ ἡμικύκλιον· τότε ὁ γραφόμενος ἀπὸ τὴν περιϛροφήν του σφαιρικὸς τομεὺς εἶναι ἡ ὅλη σφαῖρα. Η ϛερεότης λοιπὸν τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὴν ἐπιφάνειάν της ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τῆς ἀκτῖνός της πολλαπλασιασθεῖσαν.

Πόρισμα. Επειδὴ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν σφαιρῶν εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων των, αἱ ἐπιφάνειαι αὗται ἐπὶ τῶν ἀκτίνων πολλαπλασιασθεῖσαι εἶναι ὡς οἱ κῦβοι τῶν ἀκτίνων. Λοιπὸν αἱ ϛερεότητες δύο σφαιρῶν εἶναι ὡς οἱ κῦβοι τῶν ἀκτίνων των, ἢ ὡς οἱ κῦβοι τῶν διαμέτρων των.

Σχόλιον. Εϛω Α ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας, ἡ ἐπιφανειά της θέλει εἶναι $4πA^2$, καὶ ἡ ϛερεότης της $4πA^2 \times \frac{1}{3}A$, ἢ $\frac{4}{3}\pi A^3$· ἐὰν κληθῇ Δ ἡ διάμετρος, θέλει εἶναι $A = \frac{1}{2}\Delta$, καὶ $A^3 = \frac{1}{8}\Delta^3$· ἡ ςερεότης λοιπὸν τῆς σφαίρας θέλει ἐκφρασθῇ καὶ διὰ $\frac{4}{3}\pi \times \frac{1}{8}\Delta^3$, ἢ $\frac{1}{6}\pi\Delta^3$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙϚʹ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Η ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι πρὸς τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου (περιλαμβανομένων τῶν βάσεών του) ὡς 2 πρὸς 3. Αἱ ςερεότητες τῶν δύο τούτων σωμάτων εἶναι μεταξύ των εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

Εςω ΜΝΠΚ ὁ μέγιςος κύκλος τῆς σφαίρας, ΑΒΓΔ τὸ περιγεγραμμένον τετράγωνον· ἐὰν ἐνταυτῷ περιςραφῶσι τὸ ἡμικύκλιον ΠΜΚ καὶ τὸ ἡμιτετράγωνον ΠΑΔΚ ὁλόγυρα τῆς διαμέτρου ΠΚ, τὸ μὲν ἡμικύκλιον θέλει γράψει τὴν σφαῖραν, τὸ δὲ ἡμιτετράγωνον τὸν εἰς ταύτην περιγεγραμμένον κύλινδρον. σχ. 270.

Τὸ ὕψος ΑΔ τούτου τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον ΠΚ, ἡ βάσις τοῦ κυλίνδρου ὡς ἔχουσα διάμετρον τὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν ΜΝ, ἰσοῦται μὲ τὸν μέγιςον κύκλον· ἡ κυρτὴ λοιπὸν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια (πρό. 4) εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ μεγίςου κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου του πολλαπλασιασθεῖσα. Τὸ μέτρον τοῦτο εἶναι καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας (πρό. 10)· ὅθεν ἕπεται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου.

Αλλ' ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τέσσαρας μεγίςους κύκλους· ἡ κυρτὴ λοιπὸν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια εἶναι ὡσαύτως ἴση μὲ τέσσαρας μεγίςους κύκλους: ἐὰν προςεθῶσιν αἱ δύο βάσεις ἰσοδυναμοῦσαι μὲ δύο με-