ΒΙΒΛΙΟΝ Η΄.

ΤΑ ΤΡΙΑ ΣΤΡΟΓΓΥΛΑ ΣΩΜΑΤΑ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α΄. Καλεῖται κύλινδρος τὸ ςερεὸν τὸ ὁποῖον παράγεται ἀπὸ τὴν περιςροφὴν ἑνὸς ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ, ὁλόγυρα τῆς ἀκινήτου πλευρᾶς ΑΒ. σχ. 250.

Εἰς ταύτην τὴν κίνησιν αἱ πλευραὶ ΑΔ, ΒΓ, πάντοτε μένουσαι κάθετοι ἐπὶ τῆς ΑΒ, γράφουσιν ἴσα κυκλικὰ ἐπίπεδα ΑΘΠ, ΓΗΚ, τὰ ὁποῖα καλοῦνται βάσεις τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἡ πλευρὰ ΓΔ γράφει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειάν του.

Η ἀκίνητος γραμμὴ ΑΒ καλεῖται ἄξων τοῦ κυλίνδρου.

Κάθε τομὴ Κ΄ΛΜ, γινομένη εἰς τὸν κύλινδρον κατὰ κάθετον τοῦ ἄξονος, εἶναι κύκλος ἴσος μὲ ἑκάςην τῶν βάσεων: διότι ἐν ᾧ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ ςρέφεται ὁλόγυρα τῆς ΑΒ, ἡ γραμμὴ ΙΚ΄ κάθετος εἰς τὴν ΑΒ, γράφει κυκλικὸν ἐπίπεδον ἴσον μὲ τὴν βάσιν, καὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἄλλό τι δὲν εἶναι παρὰ ἡ γινομένη τομὴ κατακάθετον τοῦ ἄξονος εἰς τὴν ςιγμὴν Ι.

Κάθε τομὴ ΠΚΘΗ, γινομένη διὰ τοῦ ἄξονος, εἶναι ὀρθογώνιον διπλάσιον τοῦ γεννήτορος ΑΒΓΔ.

Β΄. Καλεῖται κῶνος τὸ παραγόμενον ςερεὸν ἀπὸ τὴν περιςροφὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΣΑΒ, ὁλόγυρα τῆς ἀκινήτου πλευρᾶς ΣΑ. σχ. 251.

Εἰς ταύτην τὴν κίνησιν ἡ πλευρὰ ΑΒ γράφει κυκλικὸν ἐπίπεδον ΒΔΓΕ, τὸ ὁποῖον καλεῖται βάσις τοῦ κώνου, καὶ ἡ ὑποτείνουσα ΣΑ γράφει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειάν του.

Η ϛιγμὴ Σ κλεῖται κορυφὴ τοῦ κώνου, ΣΑ ἄξων ἢ ὕψος, καὶ ΣΒ πλευρὰ ἢ ἀπόϛημα.

Κάθε τομὴ ΘΚ'ΖΙ γινομένη κατακάθετον τοῦ ἄξονος, εἶναι κύκλος· κάθε δὲ τομὴ ΣΔΕ διὰ τοῦ ἄξονος γινομένη εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον διπλάσιον τοῦ γεννήτορος ΣΑΒ.

Γ'. Εὰν ἀπὸ τὸν κῶνον ΣΓΔΒ ἀφαιρεθῇ διὰ τομῆς παραλλήλου τῆς βάσεως, ὁ κῶνος ΣΖΚ'Θ, τὸ ἐναπομένον ϛερεὸν ΓΒΘΖ καλεῖται κολοβὸς κῶνος ἢ κορμὸς κώνου.

Δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι γράφεται ἀπὸ τὴν περιϛροφὴν τοῦ τραπεζίου ΑΒΘΗ, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι Α καὶ Η εἶναι ὀρθαὶ, ὁλόγυρα τῆς πλευρᾶς ΑΗ. Η ἀκίνητος γραμμὴ ΑΗ καλεῖται ἄξων ἢ ὕψος τοῦ κορμοῦ, οἱ κύκλοι ΒΔΓ, ΘΖΚ', εἶναι αἱ βάσεις του, ἡ δὲ ΒΘ ἡ πλευρά του.

Δ'. Δύο κύλινδροι ἢ δύο κῶνοι εἶναι ὅμοιοι ὅταν οἱ ἄξονές των ἦναι μεταξύ των ὡς αἱ διάμετροι τῶν βάσεών των.

Ε'. Εὰν εἰς τὸν κύκλον ΑΓΔ ὅϛις χρησιμεύει ὡς βάσις εἰς ἕνα κύλινδρον, ἐγγραφθῇ πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ ὑψωθῇ ὀρθὸν πρίσμα ἰσοϋψὲς μὲ τὸν κύλινδρον, τὸ πρίσμα λέγεται ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον, ἢ ὁ κύλινδρος περιγεγραμμένος εἰς τὸ πρίσμα. σχ. 252.

Φανερὸν ὅτι ἐπειδὴ αἱ κόψεις ΑΖ, ΒΗ, ΓΘ, κ.τ.λ, τοῦ πρίσματος, εἶναι κάθετοι εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως, περιέχονται εἰς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου· λοιπὸν τὸ πρίσμα καὶ ὁ κύλινδρος ἅπτονται κατὰ ταύτας τὰς κόψεις.

Ϛ'. Παρομοίως, ἐὰν ΑΒΓΔ ἦναι πολύγωνον περιγεγραμμένον εἰς τὴν βάσιν ἑνὸς κυλίνδρου, καὶ ἐπὶ τῆς βάσεως

ΑΒΓΔ κατασκευασθῇ ὀρθὸν πρίσμα ἰσοϋψὲς μὲ τὸν κύλινδρον, τὸ πρίσμα λέγεται περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον, ἢ ὁ κύλινδρος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ πρίσμα. σχ. 253.

Εςωσαν Μ, Ν, κ. τ. λ. αἱ ςιγμαὶ τῆς ἀφῆς τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, κ. τ. λ. καὶ ἂς ὑψωθῶσιν ἀπὸ τὰς ςιγμὰς Μ, Ν, κ. τ. λ. αἱ κάθετοι ΜΧ, ΝΨ, κ. τ. λ. εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως· φανερὸν ὅτι αἱ κάθετοι αὗται θέλουν εἶναι ἐνταυτῷ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου καὶ εἰς τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πρίσματος· λοιπὸν θέλουν εἶναι αἱ γραμμαὶ κατὰ τὰς ὁποίας ἅπτονται.

Σ. Κ. Ο κύλινδρος, ὁ κῶνος, καὶ ἡ σφαῖρα, εἶναι τὰ τρία ςρογγύλα σώματα περὶ τῶν ὁποίων γίνεται λόγος εἰς τὰ ςοιχεῖα.

Προοιμιώδη λήμματα ἐπάνω εἰς τὰς ἐπιφανείας.

Α'.

Μία ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ΟΑΒΓΔ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ κάθε ἄλλην ἐπιφάνειαν ΠΑΒΓΔ, ἥτις περατοῦται εἰς τὴν αὐτὴν περίμετρον ΑΒΓΔ. σχ. 254.

Η πρότασις αὕτη εἶναι τόσον φανερὰ ὥςε ἔπρεπε νὰ συγκαταριθμηθῇ μεταξὺ τῶν ἀξιωμάτων· διότι δυνατὸν νὰ ὑποτεθῇ ὅτι τὸ ἐπίπεδον εἶναι μεταξὺ τῶν ἐπιφανειῶν ὅ,τι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ μεταξὺ τῶν γραμμῶν: ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ἡ σιμοτινωτέρα μεταξὺ δύο δεδομένων σημείων, ὁμοίως τὸ ἐπίπεδον εἶναι ἡ μικροτέρα ἐπιφάνεια μεταξὺ ὅλων ἐκείνων αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον· πλὴν ἐπειδὴ τὰ ἀξιώματα πρέπει νὰ ἀχθῶσιν εἰς τὸν ὅσον τὸ δυνατὸν μικρότερον ἀριθμὸν, ἰδοὺ εἷς συλλογισμὸς ὅςις κἀμμίαν ἀμφιβολίαν δὲν θέλει ἀφήσει ἐπάνω εἰς ταύτην τὴν πρότασιν.

Επειδὴ μία ἐπιφάνεια εἶναι ἔκτασις μῆκος καὶ πλάτος ἔχουσα, ἀδύνατον νὰ νοηθῇ ὅτι μία ἐπιφάνεια εἶναι μεγαλητέρα μιᾶς ἄλλης, χωρὶς αἱ διαστάσεις τῆς πρώτης νὰ ὑπερέχωσι κατά τινας ἐννοίας τὰς τῆς δευτέρας· καὶ ἐὰν ἀκολουθήσῃ ὅτι αἱ διαστάσεις ἐπιφανείας τινὸς καθ' ὅλας τὰς ἐννοίας εἶναι μικρότεραι τῶν διαστάσεων ἄλλης ἐπιφανείας, φανερὸν ὅτι ἡ πρώτη θέλει εἶναι ἡ μικροτέρα τῶν δύο. Τώρα καθ' ὁποιαν ἔννοιαν καὶ ἂν διέλθῃ τὸ ἐπίπεδον ΒΠΔ, τὸ ὁποῖον τὴν μὲν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν θέλει τέμνει κατὰ τὴν ΒΔ, τὴν δὲ ἄλλην ἐπιφάνειαν κατὰ τὴν ΒΠΔ, ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΒΔ πάντοτε θέλει εἶναι μικροτέρα τῆς ΒΠΔ· ἡ ἐπίπεδος λοιπὸν ἐπιφάνεια ΟΑΒΓΔ εἶναι μικροτέρα τῆς περικυκλούσης ἐπιφανείας ΠΑΒΓΔ.

Β'.

Καθε κυρτὴ ἐπιφάνεια ΟΑΒΓΔ εἶναι μικροτέρα ὁποιασδήποτε ἄλλης ἐπιφανείας ἥτις ἐπιστηριζομένη ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιμέτρου ΑΒΓΔ ἤθελε περικυκλόνει τὴν πρώτην. σχ. 255.

Επαναλαμβάνομεν ἐνταῦθα ὅτι διὰ κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἐννοοῦμεν ἐπιφάνειαν ἥτις δὲν δύναται νὰ συναπαντηθῇ ἀπὸ εὐθεῖαν γραμμὴν εἰς περισσότερα ἀπὸ δύο σημεῖα: καὶ ὅμως δυνατὸν εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ ἀκριβῶς νὰ ἐφαρμόζεται κατά τινα ἔννοιαν ἐπὶ μιᾶς κυρτῆς ἐπιφανείας· βλέπομεν τούτου παραδείγματα εἰς τὰς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ κυλίνδρου. Παρατηροῦμεν πρόσετι ὅτι ἡ ὀνομασία κυρτὴ ἐπιφάνεια δὲν περιορίζεται μόνον εἰς τὰς καμπύλας ἐπιφανείας· ἀλλὰ περιλαμβάνει καὶ τὰς πολυεδρικὰς ἐπιφανείας ἢ συνθέτους ἀπὸ πολλὰ ἐπίπεδα, καὶ ὁμοίως τὰς ἐπιφανείας αἱ ὁποῖαι εἶναι μέρος καμπύλαι, καὶ μέρος πολυεδρικαί.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια ΟΑΒΓΔ δὲν ἦναι ἡ μικροτέρα ἀπὸ ὅλας ἐκείνας αἱ ὁποῖαι τὴν περικυκλόνουν, ἔστω μεταξὺ τούτων ΠΑΒΓΔ ἡ μικροτέρα ἐπιφάνεια ἡ ὁποία τὸ πολὺ θέλει εἶναι ἴση μὲ ΟΑΒΓΔ. Δι' ὁποιάσδήποτε στιγμῆς Ο ἄς διέλθῃ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον νὰ ἅπτεται τῆς ἐπιφανείας ΟΑΒΓΔ χωρὶς νὰ τὴν τέμνῃ· τὸ ἐπίπεδον τοῦτο θέλει συναπαντήσει τὴν ἐπιφάνειαν ΠΑΒΓΔ, καὶ τὸ μέρος τὸ ὁποῖον ἀπ' αὐτὴν θέλει ἀφαιρέσει θὰ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον τελειόνει εἰς τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν (λῆμμ. Α'): λοιπὸν, φυλαττομένου τοῦ ὑπολοίπου τῆς ἐπιφανείας ΠΑΒΓΔ, δυνατὸν ἀντὶ τοῦ ἀφαιρεθέντος μέρους νὰ ἀντικαταςαθῇ τὸ ἐπίπεδον, καὶ ἤθελε προκύψει νέα ἐπιφάνεια ἥτις ἤθελε περικυκλόνει τὴν ἐπιφάνειαν ΟΑΒΓΔ, καὶ ἤθελεν εἶναι μικροτέρα τῆς ΠΑΒΓΔ. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, αὕτη εἶναι ἡ μικροτέρα ἀπὸ ὅλας· τοιαύτη λοιπὸν ὑπόθεσις εἶναι ἀδύνατος· ὅθεν ἕπεται ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ΟΑΒΓΔ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ κάθε ἄλλην ἥτις τελειόνουσα εἰς τὴν αὐτὴν περίμετρον ΑΒΓΔ ἤθελε περικυκλόνει τὴν ΟΑΒΓΔ.

Σχόλιον. Διὰ συλλογισμοῦ κατὰ πάντα ὁμοίου ἤθελεν ἀποδειχθῇ.

1.ον ὅτι, ἐὰν μία κυρτὴ ἐπιφάνεια περατουμένη ἀπὸ δύο περιμέτρους ΑΒΓ, ΔΕΖ, περικυκλοῦται ἀπὸ ὁποιανδήποτε ἄλλην ἐπιφάνειαν εἰς τὰς αὐτὰς περιμέτρους περατουμένην, ἡ περικυκλουμένη θέλει εἶναι ἡ μικροτέρα τῶν δύο. σχ. 256.

2.ον ὅτι, ἐὰν μία κυρτὴ ἐπιφάνεια ΑΒ περικυκλοῦται πανταχόθεν ἀπὸ μίαν ἄλλην ΜΝ, εἴτε ἔχουσι σημεῖα, γραμμὰς ἢ ἐπίπεδα κοινὰ, εἴτε δὲν ἔχουσι κἀνὲν κοινὸν σημεῖον, ἡ περικυκλουμένη πάντοτε θέλει εἶναι μικροτέρα τῆς περικυκλούσης.

Διότι μεταξὺ τούτων ἀδύνατον νὰ ὑπάρχῃ κἀμμία ἥτις νὰ ἦναι ἡ μικροτέρα ἀπὸ ὅλας, ἐπειδὴ εἰς ὅλας τὰς περιςάσεις δυνατὸν νὰ ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον ΓΔ ἐφαπτόμενον τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας, τὸ ὁποῖον ἤθελεν εἶναι μικρότερον τῆς ἐπιφανείας ΓΜΔ (λῆμμ. Α') καὶ οὕτως ἡ ἐπιφάνεια ΓΝΔ θὰ ἦτον μικροτέρα τῆς ΜΝ, τὸ ὁποῖον ἐναντιοῦται εἰς τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἡ ΜΝ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ὅλας. Η κυρτὴ λοιπὸν ἐπιφάνεια ΑΒ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὰς ὅσαι τὴν περικυκλόνουν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΠΡΩΤΗ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Η ςερεότης ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του.

Εςω ΓΑ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κυλίνδρου, Υ τὸ ὕψος του· ἄς παραςήσωμεν διὰ ἐπιφ. ΓΑ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΑ· λεγω ὅτι ἡ ςερεότης τοῦ κυλίνδρου θέλει εἶναι ἐπιφ. ΓΑ×Υ. Διότι, ἐὰν ἐπιφ. ΓΑ×Υ δὲν ἦναι τὸ μέτρον τοῦ δεδομένου κυλίνδρου, τὸ γινόμενον τοῦτο θέλει εἶναι τὸ μέτρον ἑνὸς κυλίνδρου μεγαλητέρου ἢ μικροτέρου. Καὶ πρῶτον μὲν ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι τὸ μέτρον ἑνὸς κυλίνδρου μικροτέρου, φερ' εἰπεῖν, τοῦ κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ΓΔ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ Υ τὸ ὕψος. σχ. 258.

Ας περιγραφθῇ εἰς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΔ, κανονικὸν πολύγωνον τὸ ΗΘΙΠ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ μὴ συναπαντοῦν τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας ΓΑ εἶναι ἡ ἀκτὶς (10, 4). Ας ἐννοηθῇ ἀκολούθως ὀρθὸν πρίσμα βάσιν ἔχον τὸ πολύγωνον ΗΘΙΠ, καὶ ὕψος Υ, τὸ ὁποῖον πρίσμα θέλει εἶναι περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον τῆς βάσεως τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΔ. Τούτου τεθέντος, ἡ ςερεότης τοῦ πρίσματος εἶναι ἴση μὲ τὴν βάσιν ΗΘΙΠ, πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ὕψος Υ· ἡ βάσις ΗΘΙΠ εἶναι μικροτέρα τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ΓΑ εἶναι ἡ ἀκτίς: ἡ ςερεότης λοιπὸν τοῦ πρίσματος εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ἐπιφ. ΓΑ×Υ. Αλλὰ ἐπιφ. ΓΑ×Υ εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ ςερεότης τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ πρίσμα κυλίνδρου· λοιπὸν τὸ πρίσμα ἤθελεν εἶναι μικρότερον τοῦ κυλίνδρου·

τώρα, ἐξ ἐναντίας, ὁ κύλινδρος εἶναι μικρότερος τοῦ πρίσματος ὡς περιεχόμενος· ἀδύνατον λοιπὸν ἐπιφ. ΓΑ×Υ νὰ ἦναι τὸ μέτρον τοῦ κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ΓΔ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ Υ τὸ ὕψος· ἤ, μὲ γενικωτέρους ὅρους, τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου ἐπὶ τοῦ ὕψους του δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ μικρότερον κύλινδρον.

Λέγω δεύτερον ὅτι τὸ ἴδιον τοῦτο γινόμενον δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ μεγαλήτερον κύλινδρον: διότι, διὰ νὰ μὴ πολλαπλασιάσωμεν τὰ σχήματα, ἔσω ΓΔ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κυλίνδρου, καὶ ἔσω, εἰ δυνατὸν, ἐπιφ. ΓΔ×Υ τὸ μέτρον μεγαλητέρου κυλίνδρου, φερ' εἰπεῖν, τοῦ κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ΓΑ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ Υ τὸ ὕψος.

Ἐὰν γένῃ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ ὡς εἰς τὴν πρώτην περίστασιν, τὸ περιγεγραμμένον εἰς τὸν δεδομένον κύλινδρον πρίσμα θέλει ἔχει μέτρον ΗΘΙΠ×Υ: τὸ ἐμβαδὸν ΗΘΙΠ εἶναι μεγαλήτερον ἀπὸ ἐπιφ. ΓΔ· λοιπὸν ἡ στερεότης τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος πρίσματος εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ ἐπιφ. ΓΔ×Υ: τὸ πρίσμα λοιπὸν ἤθελεν εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἰσοϋψοῦς κυλίνδρου ὅστις ἔχει βάσιν ἐπιφ. ΓΑ. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, τὸ πρίσμα, ὡς περιεχόμενον, εἶναι μικρότερον τοῦ κυλίνδρου· ἀδύνατον λοιπὸν ἡ βάσις ἑνὸς κυλίνδρου πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τοῦ ὕψους του νὰ ἦναι τὸ μέτρον ἑνὸς μεγαλητέρου κυλίνδρου.

Λοιπὸν τέλος ἡ στερεότης ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του.

Πόρισμα Α΄. Οἱ ἰσοϋψεῖς κύλινδροι εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των, καὶ οἱ κύλινδροι τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των.

Πόρισμα Β΄. Οἱ ὅμοιοι κύλινδροι εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν ὑψῶν, ἢ ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεων·

διότι αἱ βάσεις εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων των· καὶ ἐπειδὴ οἱ κύλινδροι εἶναι ὅμοιοι, αἱ διάμετροι τῶν βάσεων εἶναι ὡς τὰ ὕψη (όρ. 4.) λοιπὸν αἱ βάσεις εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὑψῶν· ὅθεν αἱ βάσεις πολλαπλασιασθεῖσαι ἐπὶ τὰ ὕψη, ἢ οἱ ἴδιοι κύλινδροι, εἶναι ὡς οἱ κῦβοι τῶν ὑψῶν.

Σχόλιον. Εςω Α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου, Υ τὸ ὕψος, ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως θέλει εἶναι πA^2 (12, 4), καὶ ἡ ςερεότης τοῦ κυλίνδρου $\pi A^2 \times Y$ ἢ $\pi A^2 Y$. —

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β′.

ΛΗΜΜΑ.

Η κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρον τῆς βάσεώς του πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Διότι ἡ ἐπιφάνεια αὕτη εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων ΑΖΗΒ, ΒΗΘΓ, ΓΘΙΔ, κ. τ. λ. ἀπὸ τὰ ὁποῖα συγκροτεῖται: τώρα τὰ ὕψη ΑΖ, ΒΗ, ΓΘ, κ.τ.λ. τούτων τῶν ὀρθογωνίων εἶναι ἴσα μὲ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος· αἱ βάσεις των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ κ.τ.λ. ὁμοῦ ληφθεῖσαι ἀποτελοῦν τὴν περίμετρον τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τούτων τῶν ὀρθογωνίων ἢ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρον τῆς βάσεώς του πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ὕψος του. σχ. 252.

Πόρισμα. Αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαι δύο ὀρθῶν πρισμάτων τοῦ αὐτοῦ ὕψους, εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ περίμετροι τῶν βάσεών των.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ′.

ΛΗΜΜΑ.

Η κυρτὴ ἐπειφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι μεγαλητέρα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καθε ἐγγεγραμμένου πρίσματος, ἀλλὰ μικροτέρα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κάθε περιγεγραμμένου.

Διότι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου καὶ ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου πρίσματος ΑΒΓΔΕΖ ἠμποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἔχουσαι τὸ αὐτὸ μῆκος, διότι κάθε τομὴ εἰς τὴν μίαν καὶ εἰς τὴν ἄλλην παραλλήλως τῇ ΑΖ γινομένη, εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΖ· ἐὰν δὲ αἱ ἐπιφάνειαι αὗται τμηθῶσιν ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων τῆς βάσεως ἢ καθέτων εἰς τὴν κόψιν ΑΖ, αἱ προκύπτουσαι τομαὶ θέλουν εἶναι τὰ πλάτη τούτων τῶν ἐπιφανειῶν καὶ ἴσαι, ἡ μέν, μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως, ἡ δέ, μὲ τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ μικροτέραν ταύτης τῆς περιφερείας· ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ἔχει μὲν μῆκος ἴσον μὲ τὴν πρισματικήν, πλάτος δὲ μεγαλήτερον, ἕπεται ὅτι εἶναι μεγαλητέρα. σχ. 252.

Διὰ συλλογισμοῦ κατὰ πάντα ὁμοίου ἤθελεν ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι μικροτέρα τῆς ἐπιφανείας κάθε περιγεγραμμένου πρίσματος ΒΓΔΚ'ΛΘ. σχ. 253.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Η κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του πολλαπλασιασθεῖσαν.

Εστω ΓΑ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κυλίνδρου, Υ τὸ ὕψος του· ἐὰν παραστήσωμεν διὰ περ. ΓΑ τὴν περιφέρειαν ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΑ, λέγω ὅτι περι. ΓΑ × Υ θέλει εἶναι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου· διότι, ἐὰν τοῦτο δὲν ὑπάρχῃ, πρέπει περ. ΓΑ × Υ νὰ ἦναι ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς κυλίνδρου μεγαλητέρου ἢ μικροτέρου· καὶ πρῶτον μὲν ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς κυλίνδρου μικροτέρου, φερ' εἰπεῖν, τοῦ κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ΓΔ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ Υ τὸ ὕψος. σχ. 258.

Ας περιγραφθῆ εἰς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΔ κανονικὸν πολύγωνον τὸ ΗΘΙΠ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ μὴ συναπαντοῦν τὴν περιφέρειαν ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΑ· ἂς ἐννοηθῇ ἀκολούθως ὀρθὸν πρίσμα ὕψος ἔχον Υ, καὶ βάσιν τὸ πολύγωνον ΗΘΙΠ. Η κυρτὴ ἐπιφάνεια τούτου τοῦ πρίσματος θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου ΗΘΙΠ ἐπὶ τοῦ ὕψους Υ πολλαπλασιασθεῖσαν (πρό. 2): ἡ περίμετρος αὕτη εἶναι μικροτέρα τῆς περιφερείας τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΑ· ἡ κυρτὴ λοιπὸν ἐπειφάνεια τοῦ πρίσματος εἶναι μικροτέρα ἀπὸ περι. ΓΑ $\times$ Υ. Αλλὰ περ. ΓΑ $\times$ Υ εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου τῆς βάσεως τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΔ, καὶ ὁ ὁποῖος κύλινδρος εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ πρίσμα· ἡ κυρτὴ λοιπὸν ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ἤθελεν εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κυλίνδρου· ἀλλ' ἐξ ἐναντίας πρέπει νὰ ἦναι μεγαλητέρα (πρό. 3)· ἡ ὑπόθεσις λοιπὸν ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀνεχωρήσαμεν, εἶναι ἄτοπος: λοιπὸν 1.ον ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου ἐπὶ τοῦ ὕψους του πολλαπλασιασθεῖσα δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν μικροτέρου κυλίνδρου.

Λέγω δεύτερον ὅτι τὸ ἴδιον τοῦτο γινόμενον δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ τὴν ἐπιφάνειαν μεγαλητέρου κυλίνδρου. Διότι, διὰ νὰ μὴ ἀλλάξωμεν σχῆμα, ἔςω ΓΔ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κυλίνδρου, καὶ, εἰ δυνατὸν, ἔςω περ. ΓΔ $\times$ Υ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κυλίνδρου ὅςις μὲ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἤθελεν ἔχει βάσιν κύκλον μεγαλήτερον, φερ' εἰπεῖν, τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΑ. Εκτελεσθείσης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς εἰς τὴν πρώτην ὑπόθεσιν, ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος θέλει εἶναι πάντοτε ἴση μὲ τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου ΗΘΙΠ ἐπὶ τοῦ ὕψους Υ πολλαπλασιασθεῖσαν. Αλλ' ἡ περίμετρος αὕτη εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ περ. ΓΔ· ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ πρίσματος ἤθελεν εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ περ. ΓΔ × Υ, τὸ ὁποῖον γινόμενον, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἰδίου ὕψους καὶ τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι ΓΑ. Η ἐπιφάνεια λοιπὸν τοῦ πρίσματος ἤθελεν εἶναι μεγαλητέρα τῆς ἐπιφανείας τούτου τοῦ κυλίνδρου. Αλλὰ καὶ ἐὰν τὸ πρίσμα ἦτον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύλινδρον, ἡ ἐπιφάνειά του ἤθελεν εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ κυλίνδρου (πρό. 3), πολὺ περισσότερον εἶναι μικροτέρα ὅταν τὸ πρίσμα δὲν ἐκτείνεται μέχρι τοῦ κυλίνδρου. Καὶ ἡ δευτέρα ἄρα ὑπόθεσις εἶναι ἀδύνατος· λοιπὸν 2.ον ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου ἐπὶ τὸ ὕψος του πολλαπλασιασθεῖσα δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ τὴν ἐπιφάνειαν μεγαλητέρου κυλίνδρου.

Λοιπὸν τέλος ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεώς του πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ὕψος του.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Η ςερεότης ἑνὸς κώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους του.

Εςω ΣΟ τὸ ὕψος τοῦ δεδομένου κώνου, ΑΟ ἡ ἀκτὶς τῆς βασεως· ἐὰν σημειωθῇ διὰ ἐπιφ. ΑΟ ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως, λέγω ὅτι ἡ ςερεότης τούτου τοῦ κώνου θέλει εἶναι ἴση μὲ ἐπιφ. ΑΟ × ⅓ΣΟ. σχ. 259.

Τῷ ὄντι, ἄς ὑποθέσωμεν 1.ον ὅτι ἐπιφ. ΑΟ × ⅓ΣΟ εἶναι ἡ ςερεότης ἑνὸς μεγαλητέρου κώνου, φερ' εἰπεῖν, τοῦ κώνου τοῦ ὁποίου ΣΟ εἶναι πάντοτε τὸ ὕψος· ἀλλὰ τοῦ ὁποίου ΟΒ, μεγαλητέρα ἀπὸ ΑΟ, εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως.

Εἰς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΑΟ ἄς περιγραφθῇ κανονικὸν πολύγωνον τὸ ΜΝΠΓ τὸ ὁποῖον νὰ μὴ συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι ΟΒ (10, 4)· ἂς ἐννοηθῇ ἀκολούθως πυραμὶς βάσιν ἔχουσα τὸ πολύγωνον καὶ κορυφὴν τὴν ςιγμὴν Σ. Η ςερεότης ταύτης τῆς πυραμίδος (19, θ) εἶναι ἴση μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου ΜΝΠΤ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους ΣΟ. Ἀλλὰ τὸ πολύγωνον εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ὅςις παριςάνεται διὰ ἐπιφ. ΑΟ· λοιπὸν ἡ πυραμὶς εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ ἐπιφ. ΑΟ $\times$ ⅓ ΣΟ, τὸ ὁποῖον γινόμενον, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι τὸ μέτρον τοῦ κώνου τοῦ ὁποίου Σ εἶναι ἡ κορυφὴ καὶ ΟΒ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, ἡ πυραμὶς ὡς περιεχομένη εἶναι μικροτέρα τοῦ κώνου· λοιπὸν 1.ον ἀδύνατον ἡ βάσις ἑνὸς κώνου ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους του πολλαπλασιασθεῖσα νὰ ἦναι τὸ μέτρον μεγαλητέρου κώνου.

– Λέγω 2.ον ὅτι τὸ ἴδιον τοῦτο γινόμενον δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι τὸ μέτρον κώνου μικροτέρου. Διότι, διὰ νὰ μὴ ἀλλάξωμεν σχῆμα, ἔςω ΟΒ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κώνου, καί, εἰ δυνατὸν, ἔςω, ἐπιφ. ΟΒ $\times$ ⅓ ΣΟ ἡ ςερεότης τοῦ κώνου ὅςις ἔχει ὕψος ΣΟ καὶ βάσιν τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ΑΟ εἶναι ἡ ἀκτίς. Γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς ἀνωτέρω, ἡ πυραμὶς ΣΜΝΠΤ θέλει ἔχει μέτρον τὸ ἐμβαδὸν ΜΝΠΤ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ ⅓ ΣΟ. Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν ΜΝΠΤ εἶναι μικρότερον ἀπὸ ἐπιφ. ΟΒ· λοιπὸν ἡ πυραμὶς ἤθελεν ἔχει μέτρον μικρότερον ἀπὸ ἐπιφ. ΟΒ $\times$ ⅓ ΣΟ, καὶ ἐπομένως ἤθελεν εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὸν κῶνον τοῦ ὁποίου ΑΟ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ ΣΟ τὸ ὕψος. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, ἡ πυραμὶς εἶναι μεγαλητέρα τοῦ κώνου, διότι οὗτος περιέχεται· λοιπὸν 2.ον ἀδύνατον ἡ βάσις ἑνὸς κώνου πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους του νὰ ἦναι τὸ μέτρον μικροτέρου κώνου.

Λοιπὸν τέλος ἡ ςερεότης ἑνὸς κώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους του.

Πόρισμα. Κῶνος εἶναι τὸ τριτημόριον κυλίνδρου τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους· ὅθεν ἕπεται.

1.ον Οτι οἱ ἰσοϋψεῖς κῶνοι εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των.

2.ον Οτι οἱ κῶνοι ἴσων βάσεων εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των.

3.ον Οτι οἱ ὅμοιοι κῶνοι εἶναι ὡς οἱ κῦβοι τῶν διαμέτρων τῶν βάσεών των, ἢ ὡς οἱ κῦβοι τῶν ὑψῶν των.

Σχόλιον. Εςω Α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου, Υ τὸ ὕψος του· ἡ ςερεότης τοῦ κώνου θέλει εἶναι $\pi A^2 \times \frac{1}{3} Y$ ἢ $\frac{1}{3}\pi A^2 Y$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ο κολοβὸς κῶνος ΑΔΕΒ, τοῦ ὁποίου ΑΟ, ΔΠ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων καὶ ΠΟ τὸ ὕψος, ἔχει μέτρον $\frac{1}{3}\pi$. $O\Pi.\,(\overline{AO}^2 + \overline{\Delta\Pi}^2 + AO \times \Delta\Pi)$.

Εςω ΤΖΗΘ τριγωνικὴ πυραμὶς τοῦ αὐτοῦ ὕψους μὲ τὸν κῶνον ΣΑΒ, καὶ τῆς ὁποίας ἡ βάσις ΖΗΘ νὰ ἰσοδυναμῇ μὲ τὴν βάσιν τοῦ κώνου. Δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ δύο αὗται βάσεις εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· τότε αἱ κορυφαὶ Σ καὶ Τ ἰσάκις θέλουν ἀπέχει ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον τῶν βάσεων, καὶ τὸ ἐπίπεδον ΕΠΔ προεκβληθὲν θέλει κάμει εἰς τὴν πυραμίδα τὴν τομὴν ΙΚΛ. Λέγω τώρα ὅτι ἡ τομὴ αὕτη ΙΚΛ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν βάσιν ΔΕ· διότι αἱ βάσεις ΑΒ, ΔΕ, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων ΑΟ, ΔΠ (11, 4), ἢ ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὑψῶν ΣΟ, ΣΠ· τὰ τρίγωνα ΖΗΘ, ΙΚΛ, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἰδίων τούτων ὑψῶν (15, 6)· λοιπὸν οἱ κύκλοι ΑΒ, ΔΕ, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ τρίγωνα ΖΗΘ, ΙΚΛ. Αλλὰ, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ τρίγωνον ΖΗΘ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸν κύκλον ΑΒ· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΙΚΛ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸν κύκλον ΔΕ.

Τώρα, ἡ βάσις ΑΒ πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ $\frac{1}{3}$ΣΟ εἶναι ἡ ϛερεότης τοῦ κώνου ΣΑΒ, καὶ ἡ βάσις ΖΗΘ πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ $\frac{1}{3}$ΣΟ εἶναι ἡ τῆς πυραμίδος ΖΗΘ· λοιπὸν, ἐξ αἰτίας τῶν ἰσοδυνάμων βάσεων, ἡ ϛερεότης τῆς πυραμίδος, εἶναι ἴση μὲ τὴν τοῦ κώνου. Διὰ λόγον παρόμοιον, ἡ πυραμὶς ΤΙΚΛ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν κῶνον ΣΔΕ· λοιπὸν ὁ κορμὸς τοῦ κώνου ΑΔΕΒ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν κορμὸν τῆς πυραμίδος ΖΗΘΙΚΛ. Ἀλλ' ἡ βάσις ΖΗΘ, ἰσοδυναμοῦσα μὲ τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΑΟ, ἔχει μέτρον $\pi \times \overline{ΑΟ}^2$· ὁμοίως ἡ βάσις $ΙΚΛ = \pi \times \overline{ΔΠ}^2$, καὶ ἡ μέση ἀνάλογος μεταξὺ $\pi \times \overline{ΑΟ}^2$ καὶ $\pi \times \overline{ΔΠ}^2$ εἶναι $\pi \times ΑΟ \times ΔΠ$· ἡ ϛερεότης λοιπὸν τοῦ κορμοῦ τῆς πυραμίδος, ἢ ἡ ϛερεότης τοῦ κορμοῦ τοῦ κώνου, ἔχει μέτρον

$$\tfrac{1}{3}ΟΠ \times (\pi \times \overline{ΑΟ}^2 + \pi \times \overline{ΔΠ}^2 + \pi \times ΑΟ \times ΔΠ) \quad (20,\ 6),$$

τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ $\frac{1}{3}\pi \times ΟΠ \times (\overline{ΑΟ}^2 + \overline{ΔΠ}^2 + ΑΟ \times ΔΠ)$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Η κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς πλευρᾶς του πολλαπλασιασθεῖσαν.

Ἐϛω ΑΟ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κώνου, Σ ἡ κορυφή του, καὶ ΣΑ ἡ πλευρά του· λέγω ὅτι ἡ ἐπιφανειά του θέλει εἶναι περ. ΑΟ × $\frac{1}{2}$ΣΑ. Διότι ἔϛω, εἰ δυνατὸν, περ. ΑΟ × $\frac{1}{2}$ΣΑ, ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς κώνου ὅϛις κορυφὴν μὲν ἔχει τὴν ςιγμὴν Σ, βάσιν δὲ τὸν γεγραμμένον κύκλον ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα ΟΒ μεγαλητέραν τῆς ΑΟ. σχ. 259.

Ας περιγραφθῇ εἰς τὸν μικρὸν κύκλον κανονικὸν πολύγωνον τὸ ΠΝΠΤ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ μὴ συναπαντοῦν τὴν περιφέρειαν ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ΟΒ· καὶ ἔςω ΣΜΝΠΤ κανονικὴ πυραμὶς, ἥτις βάσιν μὲν ἤθελεν ἔχει τὸ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὴν ςιγμὴν Σ· τὸ τρίγωνον ΣΜΝ ἓν ἀπὸ τὰ συγκροτοῦντα τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος, ἔχει μέτρον τὴν βάσιν του ΜΝ ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως τοῦ ὕψους ΣΑ πολλαπλασιασθεῖσαν, τὸ ὁποῖον ὕψος εἶναι ἐνταῦτῷ ἡ πλευρὰ τοῦ δεδομένου κώνου· ἐπειδὴ τὸ ὕψος τοῦτο εἶναι ἴσον εἰς ὅλα τὰ ἄλλα τρίγωνα ΣΝΠ, ΣΠΚ, κ. τ. λ. ἕπεται ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρον ΠΝΠΤΜ ἐπὶ ½ΣΑ πολλαπλασιασθεῖσαν· ἀλλ' ἡ περίμετρος ΜΝΠΤΜ εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ περ. ΑΟ· ἡ κυρτὴ λοιπὸν ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ περ. ΑΟ × ½ΣΑ, καὶ ἑπομένως μεγαλητέρα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου ὅςις μὲ τὴν αὐτὴν κορυφὴν Σ ἤθελεν ἔχει βάσιν τὸν γεγραμμένον κύκλον ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα ΟΒ. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου εἶναι μεγαλητέρα ἐκείνης τῆς πυραμίδος· διότι ἐὰν ἡ βάσις τῆς πυραμίδος τεθῇ ἐπὶ τῆς βάσεως μιᾶς ἴσης πυραμίδος, καὶ τὸ αὐτὸ γένῃ ὡς πρὸς τὸν κῶνον· ἡ ἐπιφάνεια τῶν δύο κώνων θέλει περικυκλώσει πανταχόθεν τὴν ἐπιφάνειαν τῶν δύο πυραμίδων· ἡ πρώτη λοιπὸν ἐπιφάνεια θέλει εἶναι μεγαλητέρα τῆς δευτέρας (λῆμ. 2)· διὰ τοῦτο ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου εἶναι μεγαλητέρα τῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος ἥτις περιέχεται. Τὸ ἐναντίον ἤθελεν εἶναι συνέπεια τῆς ὑποθέσεώς μας· ἡ ὑπόθεσις λοιπὸν αὐτὴ εἶναι ἀδύνατος· ἄρα 1.ον ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς πλευρᾶς του πολλαπλασιασθεῖσα δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ τὴν ἐπιφάνειαν μεγαλητέρου κώνου.

Λέγω 2.ον ὅτι τὸ ἴδιον γινόμενον δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ τὴν ἐπιφάνειαν μικροτέρου κώνου. Διότι ἔςω ΒΟ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ δεδομένου κώνου, καὶ, εἰ δυνατὸν, ἔςω περ. ΒΟ $\times$ ½ΣΒ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου Σ εἶναι ἡ κορυφὴ, καὶ ΑΟ, μικροτέρα τῆς ΟΒ, ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως.

Γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς ἀνωτέρω, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος ΣΜΝΠΤ πάντοτε θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρον ΜΝΠΤ πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ ½ ΣΛ. Τώρα ἡ περίμετρος ΜΝΠΤ εἶναι μικροτέρα τῆς περ. ΒΟ, ΣΛ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ΣΒ· λοιπὸν διὰ τοὺς δύο τούτους λόγους ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος εἶναι μικροτέρα ἀπὸ περ. ΒΟ $\times$ ½ ΣΒ, τὸ ὁποῖον γινόμενον, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου τοῦ ὁποίου ΑΟ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως· λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος ἤθελεν εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κώνου. Τώρα, ἐξ ἐναντίας, εἶναι μεγαλητέρα· διότι ἐὰν τεθῇ ἡ βάσις τῆς πυραμίδος ἐπὶ τῆς βάσεως μιᾶς ἴσης πυραμίδος καὶ τὸ αὐτὸ γένη ὡς προς τὸν κῶνον, ἡ ἐπιφάνεια τῶν δύο πυραμίδων πανταχόθεν θέλει περιτυλίσσει τὴν τῶν δύο κώνων, καὶ ἑπομένως θέλει εἶναι μεγαλητέρα. Λοιπὸν 2.ον ἀδύνατον ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως δεδομένου κώνου ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς πλευρᾶς του πολλαπλασιάσθεῖσα νὰ μετρῇ τὴν ἐπιφάνειαν μικροτέρου κώνου.

Λοιπὸν τέλος ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς πλευρᾶς του πολλαπλασιασθεῖσαν.

Σχόλιον. Εςω Π ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου, Α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του, ἡ περιφέρεια ταύτης τῆς βάσεως θέλει εἶναι 2πΑ, καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου θέλει ἔχει μέτρον 2πΑ $\times$ ½ Π ἢ πΑΠ.