Η αὐτὴ ἀπόδειξις ὁποῦ καὶ διὰ τὴν ϛʹ πρότασιν τοῦ παραρτήματος εἰς τὸ Δʹ βιβλίον ἐδώκαμεν.

4.τη Τὸ μεγαλήτερον τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν, εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς γωνίας του ἴσας καὶ τὰς πλευράς του ἴσας.

Τοῦτο προκύπτει ἀπὸ τὰ προηγούμενα 1 καὶ 2 πορίσματα.

Σημείωσις. Ὅλαι αἱ προτάσεις περὶ μεγίστου ὅσαι ἀναφέρονται εἰς τὰ σφαιρικὰ πολύγωνα ἐφαρμόζονται εἰς τὰς στερεὰς γωνίας τὰς ὁποίας μετροῦσι ταῦτα τὰ πολύγωνα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΕΙΣ ΤΑ ΒΙΒΛΙΑ Ϛʹ. ΚΑΙ Ζʹ.

ΤΑ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΠΡΩΤΗ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πέντε μόνον κανονικὰ πολύεδρα ὑπάρχουσι.

Διότι κανονικὰ πολύεδρα ὡρίσαμεν ἐκεῖνα τῶν ὁποίων ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι κανονικὰ ἴσα πολύγωνα, καὶ ὅλαι αἱ στερεαὶ γωνίαι ἴσαι μεταξύ των. Αἱ συνθῆκαι αὗται εἰς πολλὰ ὀλίγας περιστάσεις ἔχουν χώραν.

1.ον Ἐὰν αἱ ἕδραι ἦναι ἰσόπλευρα τρίγωνα, δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν κάθε στερεὰν γωνίαν τοῦ πολυέδρου μὲ τρεῖς, ἢ μὲ τέσσαρας, ἢ μὲ πέντε γωνίας τούτων τῶν τριγώνων: ἐντεῦθεν γεννῶνται τρία κανονικὰ σώματα, τὰ ὁποῖα εἶναι, τὸ τετράεδρον, τὸ ὀκτάεδρον, καὶ τὸ εἰκοσάεδρον. Δὲν δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν περισσότερα μὲ ἰσόπλευρα τρίγωνα· διότι ὁ σχηματισμὸς γωνίας ςερεᾶς μὲ ἓξ γωνίας ἰσοπλεύρων τριγώνων, ἐπειδὴ ἰσοδυναμοῦν μὲ τέσσαρας ὀρθὰς, εἶναι ἀδύνατος. (21, 5)

2.ον Ἐὰν αἱ ἕδραι ἦναι τετράγωνα, δυνάμεθα νὰ ἑνώσωμεν τὰς γωνίας των ἀνὰ τρεῖς· καὶ ἐντεῦθεν προκύπτει τὸ ἑξάεδρον ἢ κῦβος.

Τέσσαρες γωνίαι τετραγώνων ἰσοδυναμοῦν μὲ τέσσαρας ὀρθὰς, καὶ δὲν ἠμποροῦν νὰ σχηματίσουν γωνίαν ςερεάν.

3.ον Τέλος ἐὰν αἱ ἕδραι ἦναι κανονικὰ πεντάγωνα, δυνατὸν ἀκόμη νὰ ἑνωθοῦν αἱ γωνίαι των ἀνὰ τρεῖς τρεῖς, καὶ ἐκ τούτου προκύπτει τὸ κανονικὸν δωδεκάεδρον.

Δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάγωμεν περαιτέρω· διότι τρεῖς γωνίαι κανονικῶν ἑξαγώνων ἰσοδυναμοῦν μὲ τέσσαρας ὀρθὰς, καὶ τρεῖς ἑπταγώνων μὲ ἔτι περισσότερον.

Λοιπὸν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχωσι παρὰ μόνον πέντε κανονικὰ πολύεδρα, τρία σχηματιζόμενα μὲ ἰσόπλευρα τρίγωνα, ἓν μὲ τετράγωνα, καὶ ἓν μὲ πεντάγωνα.

Σχόλιον. Εἰς τὴν ἀκόλουθον πρότασιν θέλομεν δείξει ὅτι τὰ πέντε ταῦτα πολύεδρα πραγματικῶς ὑπάρχουν, καὶ ὅτι εἶναι δυνατὸν, γνωςῆς μιᾶς τῶν ἑδρῶν των, νὰ προσδιορισθῶσιν ὅλαι των αἱ διαςάσεις.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β΄.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Δεδομένης μιᾶς τῶν ἑδρῶν κανονικοῦ πολυέδρου, ἢ μόνον τῆς πλευρᾶς του, νὰ κατασκευασθῇ τὸ πολύεδρον.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο παρρησιάζει πέντε τὰ ὁποῖα διαδοχικῶς θέλομεν λύσει.

Κατασκευὴ τοῦ τετραέδρου.

Ἔςω ΑΒΓ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἦναι μία τῶν ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου· εἰς τὴν ςιγμὴν Ο, κέντρου τούτου τοῦ τριγώνου ἂς ὑψωθῇ ΟΣ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ· ἂς περατωθῇ ἡ κάθετος αὕτη εἰς τὴν ςιγμὴν Σ, ὥςε ΛΣ=ΑΒ· ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΣΒ, ΣΓ, καὶ ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓ θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον τετράεδρον. σχ. 243.

Διότι, ἐξ αἰτίας τῶν ἴσων διαςημάτων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, αἱ πλάγιαι ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, ἰσάκις ἀπομακρύνονται τῆς καθέτου ΣΟ καὶ εἶναι ἴσαι. Η μία τούτων ΣΑ=ΑΒ· λοιπὸν αἱ τέσσαρες ἕδραι τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ εἶναι τρίγωνα ἴσα μὲ τὸ δεδομένον ΑΒΓ. Αλλως αἱ ςερεαὶ γωνίαι ταύτης τῆς πυραμίδος εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ἐπειδὴ ἡ κάθε μία σύγκειται ἀπὸ τρία ἴσα ἐπίπεδα· λοιπὸν ἡ πυραμὶς αὕτη εἶναι κανονικὸν τετράεδρον.

Κατασκευὴ τοῦ ἑξαέδρου.

Εςω ΑΒΓΔ δεδομένον τετράγωνον: ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒΓΔ ἂς κατασκευασθῇ ὀρθὸν πρίσμα τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος ΑΕ νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὴν πλευρὰν ΑΒ. Φανερὸν εἶναι ὅτι αἱ ἕδραι του εἶναι τετράγωνα ἴσα, καὶ αἱ ςερεαὶ γωνίαι του εἶναι ἴσαι μεταξύ των ὡς συγκείμεναι ἀπὸ τρεῖς γωνίας ὀρθάς· λοιπὸν τὸ πρίσμα τοῦτο εἶναι κανονικὸν ἑξάεδρον ἢ κύβος. σχ. 244.

Κατασκευὴ τοῦ ὀκταέδρου.

Εςω ΑΜΒ δεδομένον τρίγωνον ἰσόπλευρον· ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἂς γραφθῇ τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ· εἰς τὴν ςιγμὴν Ο κέντρον τούτου τοῦ τετραγώνου ἂς ὑψωθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του ἡ κάθετος ΤΣ, ἥτις ἂς περατωθῇ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη εἰς Τ καὶ Σ, εἰς τρόπον ὥςε ΟΤ=ΟΣ=ΑΟ· ἂς ἐπιζευχθῶσιν ἀκολούθως αἱ ΣΑ, ΣΒ, ΤΑ, κ.τ.λ, θέλει προκύψει τὸ ςερεὸν ΣΑΒΓΔΤ, σύνθετον ἀπὸ δύο τετραγωνικὰς πυραμίδας ΣΑΒΓΔ, ΤΑΒΓΔ, αἱ ὁποῖαι ἐπιςηρίζονται ἐπὶ τῆς κοινῆς βάσεως ΑΒΓΔ· τὸ ςερεὸν τοῦτο θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον κανονικὸν ὀκτάεδρον. σχ. 245.

Τῷ ὄντι, τὸ τρίγωνον ΑΟΣ, καθὼς καὶ τὸ τρίγωνον ΑΟΔ, εἶναι ὀρθογώνιον εἰς Ο. αἱ πλευραὶ ΑΟ, ΟΣ, ΟΔ, εἶναι ἴσαι· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα, διὰ τοῦτο ΑΣ = ΑΔ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύομεν ὅτι τὰ ὅλα τὰ ἄλλα ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΟΤ, ΒΟΣ, ΓΟΤ, κ.τ.λ, εἶναι ἴσα μὲ τὸ τρίγωνον ΑΟΔ· λοιπὸν ὅλαι αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΣ, ΑΤ, κ. τ. λ, εἶναι ἴσαι μεταξύ των, καὶ ἐπομένως τὸ ϛερεὸν ΣΑΒΓΔΤ περιέχεται ὑπὸ ὀκτὼ ἴσων τριγώνων μὲ τὸ δεδομένον ἰσόπλευρον ΑΜΒ. Λέγω περιπλέον ὅτι αἱ ϛερεαὶ γωνίαι τοῦ πολυέδρου εἶναι ἴσαι μεταξύ των: ἡ γωνία Σ, φερ' εἰπεῖν, εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ Β.

Διότι τὸ τρίγωνον ΣΑΓ εἶναι φανερὰ ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΔΑΓ, καὶ οὕτως ἡ γωνία ΑΣΓ εἶναι ὀρθή· λοιπὸν τὸ σχῆμα ΣΑΤΓ εἶναι τετράγωνον ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ. Ἀλλ' ἡ σύγκρισις τῆς πυραμίδος ΒΑΣΓΤ μὲ τὴν πυραμίδα ΣΑΒΓΔ, δεικνύει ὅτι ἡ βάσις ΑΣΓΤ τῆς πρώτης ἠμπορεῖ νὰ τεθῇ ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒΓΔ τῆς δευτέρας· τότε ἐπειδὴ ἡ ϛιγμὴ Ο εἶναι κοινὸν κέντρον, τὸ ὕψος ΟΒ τῆς πρώτης θέλει ἐφαρμόσει μὲ τὸ ὕψος ΟΣ τῆς δευτέρας, καὶ αἱ δύο πυραμίδες θέλουν ταυτισθῇ· λοιπὸν ἡ ϛερεὰ γωνία Σ εἶναι ἴση μὲ τὴν ϛερεὰν γωνίαν Β· τὸ ϛερεὸν ἄρα ΣΑΒΓΔΤ εἶναι κανονικὸν ὀκτάεδρον.

Σχόλιον. Ἐὰν τρεῖς ἴσαι εὐθεῖαι, ΑΓ, ΒΔ, ΣΤ, εἶναι κάθετοι μεταξύ των καὶ τέμνωνται εἰς τὴν ϛιγμὴν τῆς ἡμισείας των, τὰ ἄκρα τούτων τῶν εὐθειῶν θέλουν εἶναι αἱ κορυφαὶ κανονικοῦ ὀκταέδρου.

Κατασευὴ τοῦ δωδεκαέδρου.

Ἔϛω ΑΒΓΔΕ δεδομένον κανονικὸν πεντάγωνον· ἔϛωσαν ΑΒΠ, ΓΒΠ, δύο ἐπίπεδοι γωνίαι ἴσαι μὲ τὴν γωνίαν ΑΒΓ: μὲ ταύτας τὰς ἐπιπέδους γωνίας ἂς σχηματισθῇ ἡ ϛερεὰ γωνία Β, καὶ ἂς προσδιορισθῇ διὰ τῆς ΚΔ' προτάσεως τοῦ

Ε' βιβλίου, ἡ ἀμοιβαία κλίσις δύο τῶν ἐπιπέδων της, τὴν ὁποίαν κλίσιν καλῶ Κ. Ας σχηματισθῶσι παρομοίως εἰς τὰς ςιγμὰς Γ, Δ, Ε, Α γωνίαι ςερεαὶ ἴσαι μὲ τὴν ςερεὰν γωνίαν Β, καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον κείμεναι: τὸ ἐπίπεδον ΓΒΠ θέλει εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἐπίπεδον ΒΓΗ, διότι καὶ τὰ δύο κλίνουν τὴν αὐτὴν ποσότητα Κ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ. Δυνάμεθα λοιπὸν εἰς τὸ ἐπίπεδον ΠΒΓΗ νὰ γράψωμεν τὸ πεντάγωνον ΒΓΗΖΠ ἴσον μὲ τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ. Ἐὰν τὸ αὐτὸ πράξωμεν εἰς ἕκαςον τῶν ἄλλων ἐπιπέδων ΓΔΙ, ΔΕΛ, κ. τ. λ, θέλομεν ἔχει μίαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ΠΖΗΘ, κ. τ. λ. σύνθετον ἀπὸ ἓξ κανονικὰ πεντάγωνα ἴσα καὶ ἕκαςον τῶν ὁποίων κλίνει ἐπὶ τοῦ προσκειμένου του τὴν αὐτὴν ποσότητα Κ. Εςω πζηθ, κ. τ. λ, μία δευτέρα ἐπιφάνεια ἴση μὲ τὴν ΠΖΗΘ, κ. τ. λ. λέγω ὅτι αἱ δύο αὗται ἐπιφάνειαι ἠμποροῦν νὰ ἑνωθοῦν εἰς τρόπον ὥςε νὰ σχηματίσουν μίαν μόνην συνεχῆ κυρτὴν ἐπιφάνειαν. Τῷ ὄντι ἡ γωνία οπζ, παραδείγματος χάριν, ἠμπορεῖ νὰ ἑνωθῇ μὲ τὰς δύο γωνίας ΘΠΒ, ΒΠΖ, ὥςε νὰ γένῃ μία ςερεὰ γωνία Π ἴση τῇ γωνίᾳ Β· καὶ εἰς ταύτην τὴν ἕνωσιν οὐδεμία τροπὴ θέλει προξενηθῇ εἰς τὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων ΒΠΖ, ΒΠΟ, διότι ἡ κλίσις αὕτη εἶναι ὁποία πρέπει νὰ ἦναι διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς ςερεᾶς γωνίας. Αλλ' ἐν ᾧ ἡ ςερεὰ γωνία Π σχηματίζεται, ἡ πλευρὰ πζ θέλει ἐφαρμόσει μὲ τὴν ἴσην της ΠΖ, καὶ εἰς τὴν ςιγμὴν Ζ θέλουν εὑρεθῇ ἑνωμέναι τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι ΠΖΗ, πζε, εζη, αἱ ὁποῖαι θέλουν σχηματίσει γωνίαν ςερεὰν ἴσην μὲ ἑκάςην τῶν ἤδη σχηματισμένων· ἡ ἕνωσις αὕτη θέλει γένῃ χωρὶς τὴν παραμικρὰν τροπὴν οὔτε τῆς γωνίας Π, οὔτε τῆς ἐπιφανείας εζηθ, κ. τ. λ. διότι τὰ ἐπίπεδα ΠΖΗ, εζπ ἤδη ἑνωθέντα εἰς Π, ἔχουν μεταξύ των τὴν ἁρμοδίαν κλίσιν Κ, καθὼς καὶ τὰ ἐπίπεδα εζη, εζπ. Ἐξακολουθοῦντες οὕτω κατὰ διαδοχὴν βλέπομεν ὅτι αἱ δύο ἐπιφάνειαι θέλουν ἐφαρμόσει ἡ μία μὲ τὴν ἄλλην ὥςε νὰ σχηματίσουν μίαν μόνην συνεχῆ ἐπιφάνειαν καὶ εἰς ἑαυτὴν ἐπανερχομένην· ἡ ἐπιφάνεια αὕτη θέλει εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς κανονικοῦ δωδεκαέδρου, ὡς σύνθετος ἀπὸ δώδεκα ἴσα κανονικὰ πεντάγωνα, καὶ ἐπειδὴ ὅλαι του αἱ ςερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των. σχ. 246.

Κατασκευὴ τοῦ εἰκοσαέδρου.

Εςω ΑΒΓ μία τῶν ἑδρῶν του· πρέπει κατὰ πρῶτον νὰ σχηματισθῇ γωνία ςερεὰ μὲ πέντε ἴσα ἐπίπεδα μὲ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ καὶ ἕκαςον τῶν ὁποίων ἰσάκις να κλίνῃ ἐπὶ τοῦ προσκειμένου του. Πρὸς τοῦτο, ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Β΄Γ΄, ἴσης μὲ τὴν ΒΓ, ἄς κατασκευασθῇ τὸ κανονικὸν πεντάγωνον Β΄Γ΄Θ΄Ι΄Δ. εἰς τὸ κέντρον τούτου τοῦ πενταγώνου ἄς ὑψωθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του μία κάθετος, ἥτις ἄς περατωθῇ εἰς Α΄ εἰς τρόπον ὥςε Β΄Α = Β΄Γ΄· ἄς ἐπιζευχθῶσιν αἱ Α΄Γ΄, Α΄Θ΄, Α΄Ι΄, Α΄Δ΄, καὶ ἡ ςερεὰ γωνία Α΄ σχηματισμένη ἀπὸ τὰ πέντε ἐπίπεδα Β΄Α΄Γ΄, Γ΄Α΄Θ΄ κ. τ. λ. θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη ςερεὰ γωνία. Διότι αἱ πλάγιαι Α΄Β΄, Α΄Γ΄, κ.τ.λ. εἶναι ἴσαι, καὶ μία τούτων Α΄Β΄ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν Β΄Γ΄· λοιπὸν ὅλα τὰ τρίγωνα Β΄Α΄Γ΄, Γ΄Α΄Θ΄, κ. τ. λ. εἶναι ἴσα μεταξύ των καὶ μὲ τὸ δεδομένον τρίγωνον ΑΒΓ. σχ. 247.

Αλλως δὲ φανερὸν εἶναι ὅτι ἕκαςον τῶν ἐπιπέδων Β΄Α΄Γ΄, Γ΄Α΄Θ΄, κ.τ.λ. ἰσάκις κλίνει ἐπὶ τοῦ προσκειμένου του· διότι αἱ ςερεαὶ γωνίαι Β΄, Γ΄, κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι μεταξύ των ὡς σχηματισμέναι μὲ δύο γωνίας ἰσοπλεύρων τριγώνων καὶ μίαν κανονικοῦ πενταγώνου. Ας καλέσωμεν Κ τὴν κλίσιν δύο ἐπιπέδων ὅπου εὑρίσκονται αἱ ἴσαι γωνίαι, ἡ ὁποία δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ διὰ τῆς ΚΔ΄ προτάσεως τοῦ Ε΄ βιβλίου· ἡ γωνία Κ θέλει εἶναι ἐνταῦθα ἡ κλίσις ἑκάςου τῶν ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα συγκροτοῦν τὴν ςερεὰν γωνίαν Α΄ ἐπὶ τοῦ προσκειμένου του.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν εἰς τὰς ςιγμὰς Α, Β, Γ, κάμωμεν γωνίας ςερεὰς ἑκάςη τῶν ὁποίων νὰ ἦναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν Α΄, θέλομεν ἔχει μίαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ΔΕΖΗ, κ. τ. λ, σύνθετον ἀπὸ δέκα ἰσόπλευρα τρίγωνα, ἕκαςον τῶν ὁποίων θέλει κλίνει ἐπὶ τοῦ προσκειμένου του τὴν ποσότητα Κ· καὶ αἱ γωνίαι Δ, Ε, Ζ, κ. τ. λ. τῆς περιμέτρου της θέλουν ἑνόνει ἀλληλο διαδόχως τρεῖς καὶ δύο γωνίας γωνίας ἰσοπλεύρων τριγώνων. Ας φαντασθῶμεν μίαν δευτέραν ἐπιφάνειαν ἴσην μὲ τὴν ἐπιφάνειαν ΔΕΖΗ, κ. τ. λ. αἱ δύο αὗται ἐπιφάνειαι ἠμποροῦν ἀμοιβαίως νὰ ἐφαρμόσωσιν, ἑνουμένης ἑκάςης τριπλῆς γωνίας τῆς μιᾶς μὲ μίαν διπλῆν τῆς ἄλλης· καὶ ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν γωνιῶν τούτων ἔχουν ἤδη μεταξύ των τὴν ἀναγκαίαν κλίσιν διὰ τὸν σχηματισμὸν ςερεᾶς πενταπλῆς γωνίας ἴσης μὲ Α, οὐδεμία μεταβολὴ εἰς ταύτην τὴν ἕνωσιν θέλει προξενηθῇ εἰς ἑκάςην ἐπιφάνειαν κατὰ μέρος, καὶ αἱ δύο ὁμοῦ θέλουν σχηματίσει μίαν μόνην συνεχῆ ἐπιφάνειαν, σύνθετον ἀπὸ εἴκοσι ἰσόπλευρα τρίγωνα. Η ἐπιφάνεια αὕτη θέλει εἶναι ἡ τοῦ κανονικοῦ εἰκοσαέδρου, διότι περιπλέον ὅλαι αἱ ςερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ΄.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἑδρῶν κανονικοῦ πολυέδρου.

Η κλίσις αὕτη συνάγεται ἀμέσως ἀπὸ τὴν κατασκευὴν τὴν ὁποίαν ἐδώκαμεν τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων· εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὴν ΚΔ΄ πρότασιν τοῦ Ε΄ βιβλίου, διὰ τῆς ὁποίας, δεδομένων τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν μίαν ςερεὰν γωνίαν, προσδιορίζεται ἡ γωνία τὴν ὁποίαν δύο τούτων τῶν ἐπιπέδων κάμνουν μεταξύ των.

Εἰς τὸ τετράεδρον. Εκάςη ςερεὰ γωνία σχηματίζεται ἀπὸ τρεῖς γωνίας ἰσοπλεύρων τριγώνων· πρέπει λοιπὸν νὰ ζητηθῇ διὰ τοῦ ῥηθέντος προβλήματος ἡ γωνία τὴν ὁποίαν δύο τούτων τῶν ἐπιπέδων κάμνουν μεταξύ των· ἡ γωνία αὕτη θέλει εἶναι ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου. σχ. 243.

Εἰς τὸ ἑξάεδρον. Η γωνία δύο προσκειμένων ἑδρῶν εἶναι ὀρθή. σχ. 244.

Εἰς τὸ ὀκτάεδρον. Ας σχηματισθῇ γωνία ςερεὰ μὲ δύο γωνίας ἰσοπλεύρων τριγώνων καὶ μίαν ὀρθήν· ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων θέλει εἶναι ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἑδρῶν τοῦ ὀκταέδρου. σχ. 245.

Εἰς τὸ δωδεκάεδρον. Εκάςη ςερεὰ γωνία σχηματίζεται μὲ τρεῖς γωνίας κανονικῶν πενταγώνων. Οὕτως ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων δύο τούτων τῶν γωνιῶν θέλει εἶναι ἡ τῶν δύο προσκειμένων ἑδρῶν τοῦ δωδεκαέδρου. σχ. 246.

Εἰς τὸ εἰκοσάεδρον. Ας σχηματισθῇ γωνία ςερεὰ μὲ δύο γωνίας ἰσοπλεύρων τριγώνων καὶ μίαν κανονικοῦ πενταγώνου· ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων θέλει εἶναι ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἑδρῶν τοῦ εἰκοσαέδρου. σχ. 247.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δʹ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Δεδομένης τῆς πλευρᾶς κανονικοῦ πολυέδρου, νὰ εὕρωμεν τὴν ἀκτῖνα τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ ἐκείνην τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ πολύεδρον σφαίρας.

Πρέπει κατὰ πρῶτον νὰ δείξωμεν ὅτι κάθε κανονικὸν πολύεδρον δύναται νὰ ἐγγραφθῇ εἰς τὴν σφαῖραν καὶ νὰ περιγραφθῇ εἰς αὐτήν. σχ. 248.

Ἔξω ΑΒ ἡ κοινὴ πλευρὰ εἰς δύο προσκειμένας ἕδρας· ἔξωσαν Γ καὶ Ε τὰ κέντρα τῶν δύο τούτων ἑδρῶν, καὶ ΓΔ, ΕΔ αἱ ἠγμέναι κάθετοι ἀπὸ ταῦτα τὰ κέντρα ἐπὶ τῆς κοινῆς πλευρᾶς ΑΒ, αἱ ὁποῖαι θέλουν πέσει εἰς τὴν ϛιγμὴν Δ, μέσον ταύτης τῆς πλευρᾶς. Αἱ δύο κάθετοι ΓΔ, ΔΕ, κάμνουν μεταξύ των μίαν γνωϛὴν γωνίαν ἥτις εἶναι ἴση μὲ τὴν κλίσιν δύο προσκειμένων ἑδρῶν, προσδιοριζομένην διὰ τοῦ προλαβόντος προβλήματος. Τώρα ἐὰν, εἰς τὸ ἐπίπεδον ΓΔΕ, κάθετον εἰς ΑΒ, ἀχθῶσιν ἐπὶ τῆς ΓΔ καὶ ΕΔ αἱ ἀπροσδιόριϛοι κάθετοι ΓΟ καὶ ΕΟ, αἱ ὁποῖαι συναπαντῶνται εἰς Ο, λέγω ὅτι ἡ ϛιγμὴ Ο θέλει εἶναι τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας· οὔσης τῆς ἀκτῖνος τῆς πρώτης ΟΓ, καὶ τῆς δευτέρας ΟΑ.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ τὰ ἀποϛήματα ΓΔ, ΔΕ, εἶναι ἴσα, καὶ ἡ ὑποτείνουσα ΔΟ κοινὴ, τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΔΟ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΔΕ (18, 1), καὶ ἡ κάθετος ΟΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν κάθετον ΟΕ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ΑΒ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΓΔΕ, τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ εἶναι κάθετον εἰς ΓΔΕ, (17, 5), ἢ ΓΔΕ εἰς ΑΒΓ· περιπλέον ΓΟ, εἰς τὸ ἐπίπεδον ΓΔΕ, εἶναι κάθετος εἰς ΓΔ, κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων ΓΔΕ, ΑΒΓ· λοιπὸν ΓΟ (18, 5) εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΕΟ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΕ· λοιπὸν αἱ δύο κάθετοι ΓΟ, ΕΟ ἠγμέναι εἰς τὰ ἐπίπεδα δύο προσκειμένων ἑδρῶν ἀπὸ τὰ κέντρα τῶν ἰδίων, συναπαντῶνται εἰς τὴν αὐτὴν ϛιγμὴν καὶ εἶναι ἴσαι. Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ΑΒΓ καὶ ΑΒΕ παριϛάνουν δύο ἄλλας ὁποιασδήποτε προσκειμένας ἕδρας, τὸ ἀπόϛημα ΓΔ πάντοτε θέλει μένει τοῦ ἰδίου μεγέθους, καθὼς καὶ ἡ γωνία ΓΔΟ, ἡμίσεια τῆς ΓΔΕ· λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΔΟ καὶ ἡ πλευρά του ΓΟ θέλουν εἶναι ἴσα δι' ὅλας τὰς ἕδρας τοῦ πολυέδρου· ἐὰν λοιπὸν ἀπὸ τὴν ϛιγμὴν Ο ὡς ἀπὸ κέντρον καὶ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΟΓ γράψωμεν μίαν σφαῖραν, ἡ σφαῖρα αὕτη θέλει ἅπτεται ὅλων τῶν ἑδρῶν τοῦ πολυέδρου εἰς τὰ κέντρα των (διότι τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ, ΑΒΕ, θέλουν εἶναι κάθετα εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος), καὶ ἡ σφαῖρα θέλει εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ πολύεδρον, ἢ τὸ πολύεδρον περιγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν.

Ἂς ἑνωθῶσιν αἱ ΟΑ, ΟΒ· ἐπειδὴ ΓΑ=ΓΒ, αἱ δύο πλάγιαι ΟΑ, ΟΒ, μὲ τὸ νὰ ἀπομακρύνωνται ἰσάκις τῆς καθέτου, θέλουν εἶναι ἴσαι· τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ δύο ὁποιασδήποτε ἄλλας γραμμὰς ἠγμένας ἀπὸ τὸ κέντρον Ο εἰς τὰ ἄκρα τῆς αὐτῆς πλευρᾶς· ὅλαι λοιπὸν αὗται αἱ γραμμαὶ εἶναι ἴσαι μεταξύ των· ἐὰν λοιπὸν ἀπὸ τὴν στιγμὴν Ο ὡς ἀπὸ κέντρον καὶ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ γραφθῇ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια, ἡ ἐπιφάνεια αὕτη θέλει διέλθῃ διὰ τῶν κορυφῶν ὅλων τῶν στερεῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου, καὶ ἡ σφαῖρα θέλει εἶναι περιγεγραμμένη εἰς τὸ πολύεδρον, ἢ τοῦτο ἐγγεγραμμένον εἰς ἐκείνην.

Τούτου τεθέντος, ἡ λύσις τοῦ προτεθέντος προβλήματος δὲν ἔχει κἀμμίαν δυσκολίαν καὶ ἠμπορεῖ νὰ ἐκτελεσθῇ ὡς ἀκολούθως.

Δεδομένης τῆς πλευρᾶς μιᾶς ἕδρας τοῦ πολυέδρου, ἂς γραφθῇ αὕτη ἡ ἕδρα, καὶ ἔσω ΓΔ τὸ ἀπόστημά της. Ἂς ζητηθῇ διὰ τοῦ προλαβόντος προβλήματος ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἑδρῶν τοῦ πολυέδρου, καὶ ἂς γένῃ ἡ γωνία ΓΔΕ ἴση μὲ ταύτην τὴν κλίσιν. Ἂς ληφθῇ ΔΕ ἴση μὲ ΓΔ, ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΓΟ καὶ ΕΟ κάθετοι ἐπὶ ΓΔ καὶ ΕΔ· αἱ δύο αὗται κάθετοι θέλουν συναπαντηθῇ εἰς μίαν στιγμὴν Ο, καὶ ΓΟ θέλει εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας εἰς τὸ πολύεδρον. σχ. 249.

Ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς τῆς ΔΓ ἂς ληφθῇ ΓΑ ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς μίαν ἕδραν τοῦ πολυέδρου, καὶ ΟΑ θέλει εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ αὐτὸ πολύεδρον σφαίρας.

Διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΔΟ, ΓΑΟ, τοῦ σχήματός 249, εἶναι ἴσα μὲ τὰ τρίγωνα τοῦ ἰδίου ὀνόματος εἰς τὸ σχῆμα 248: οὕτως, ἐν ᾧ ΓΔ καὶ ΓΑ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου εἰς μίαν ἕδραν τοῦ πολυέδρου, ΟΓ καὶ ΟΑ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν ἐγγεγραμμένης καὶ περιγεγραμμένης εἰς τὸ αὐτὸ πολύεδρον.

Σχόλιον. Ημποροῦμεν νὰ ἐξάξωμεν ἀπὸ τὰς προηγουμένας προτάσεις πολλὰς συνεπείας.

1.ον Κάθε κανονικὸν πολύεδρον ἡμπορεῖ νὰ μοιρασθῇ εἰς τόσας κανονικὰς πυραμίδας ὅσας ἕδρας ἔχει τὸ πολύεδρον: ἡ κοινὴ κορυφὴ τούτων τῶν πυραμίδων θέλει εἶναι τὸ κέντρον τοῦ πολυέδρου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐνταυτῷ ἐκεῖνο τῶν σφαιρῶν ἐγγεγραμμένης καὶ περιγεγραμμένης.

2.ον Η ςερεότης ἑνὸς κανονικοῦ πολυέδρου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπιφάνειάν του ἐπὶ τὸ τριτημόριον τῆς ἀκτῖνος τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας.

3.ον Δύο κανονικὰ πολύεδρα τοῦ ἰδίου ὀνόματος εἶναι δύο ὅμοια ςερεὰ, καὶ αἱ ὁμόλογοι διαςάσεις των εἶναι ἀνάλογοι· λοιπὸν αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν ἐγγεγραμμένης ἢ περιγεγραμμένης εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ πλευραὶ τούτων τῶν πολυέδρων.

4.ον Εἀν ἐγγραφθῇ κανονικὸν πολύεδρον εἰς μίαν σφαῖραν, τὰ ἠγμένα ἐπίπεδα ἀπὸ τὸ κέντρον κατὰ τὰς διαφόρους πλευρὰς θέλουν μοιράσει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας εἰς τόσα ἴσα καὶ ὅμοια σφαιρικὰ πολύγωνα ὅσας ἕδρας ἔχει τὸ πολύεδρον.