ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εςω Σ ὁ ἀριθμὸς τῶν ςερεῶν γωνιῶν ἑνὸς πολυέδρου, Θ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν του, Α ὁ ἀριθμὸς τῶν κόψεών του· λέγω ὅτι πάντοτε θέλει εἶναι $\Sigma + \Theta = A + 2$.

Ἂς ληφθῇ ἐντὸς τοῦ πολυέδρου μία ςιγμὴ ἐκ τῆς ὁποίας ἂς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι γραμμαὶ εἰς τὰς κορυφὰς ὅλων τῶν ςερεῶν γωνιῶν του· ἂς ἐννοηθῇ ἀκολούθως ὅτι ἀπὸ τὴν αὐτὴν ςιγμὴν ὡς ἀπὸ κέντρον γράφεται σφαιρικὴ ἐπιφάνεια ἥτις νὰ συναπαντᾶται ἀπὸ ὅλας ταύτας τὰς γραμμὰς εἰς τόσας ςιγμάς· ἂς ἑνωθῶσι ταῦτα τὰ σημεῖα διὰ τόξων μεγίςων κύκλων, ὥςε νὰ σχηματισθῶσιν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας πολύγωνα ἀντιςοιχοῦντα εἰς τὰς ἕδρας τοῦ πολυέδρου καὶ ἰσάριθμα μὲ αὐτάς. Εςω ΑΒΓΔΕ ἓν τούτων τῶν πολυγώνων (σχ. 240) καὶ ν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του· ἡ ἐπιφάνειά του θέλει εἶναι $\sigma - 2\nu + 4$· ὅπου σ παριςάνει τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε. Ἐὰν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐκτιμηθῇ ἡ ἐπιφάνεια ἑκάςου τῶν ἄλλων σφαιρικῶν πολυγώνων, καὶ προςεθῶσιν ὅλαι ὁμοῦ, θέλει συναχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμά των, ἢ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας παριςανομένη διὰ 8, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν τῶν πολυγώνων, μεῖον δύο φοραῖς ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν των, πλέον 4 τοσάκις λαμβανόμενον ὅσας ἕδρας ἔχει τὸ πολύεδρον. Τώρα, ἐπειδὴ ὅλαι αἱ γωνίαι αἱ ὁποῖαι συνέρχονται ὁλόγυρα τῆς ἰδίας ςιγμῆς Α ἰσοδυναμοῦν μὲ τέσσαρας ὀρθὰς, ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν τῶν πολυγώνων εἶναι ἴσον μὲ 4 τοσάκις λαμβανόμενον ὅσαι εἶναι αἱ ςερεαὶ γωνίαι· εἶναι λοιπὸν ἴσον μὲ 4Σ. Ἀκολούθως τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ. κ. τ. λ. εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κόψεων ἢ $= 4A$, ἐπειδὴ ἡ αὐτὴ κόψις χρησιμεύει ὡς πλευρὰ εἰς δύο ἕδρας· λοιπὸν θέλει εἶναι $8 = 4\Sigma - 4\mathrm{A} + 4\Theta$· ἤ, διαιρεθέντων τῶν δύο μελῶν διὰ 4, $2 = \Sigma - \mathrm{A} + \Theta$· λοιπὸν $\Sigma + \Theta = \mathrm{A} + 2$.

Πόρισμα. Εντεῦθεν ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὰς ςερεὰς γωνίας ἑνὸς πολυέδρου εἶναι ἴσον μὲ τοσάκις τέσσαρας ὀρθὰς, ὅσαι μονάδες περιέχονται εἰς $\Sigma - 2$, ὄντος Σ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ςερεῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου.

Διότι, ἐὰν θεωρήσωμεν μίαν ἕδραν τῆς ὁποίας ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν εἶναι ν, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ταύτης τῆς ἕδρας θέλει εἶναι $2\nu - 4$ ὀρθαὶ γωνίαι (25, 1). Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν 2ν, ἢ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν ὅλων τῶν ἑδρῶν, $= 4\mathrm{A}$, καὶ 4 τοσάκις λαμβανόμενον ὅσαι εἶναι αἱ ἕδραι, $= 4\Theta$· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ὅλων τῶν ἑδρῶν $= 4\mathrm{A} - 4\Theta$. Τώρα, κατὰ τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα, $\mathrm{A} - \Theta = \Sigma - 2$, καὶ ἑπομένως $4\mathrm{A} - 4\Theta = 4(\Sigma - 2)$. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν κ. τ. λ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚϚ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Απὸ ὅλα τὰ σχηματιζόμενα σφαιρικὰ τρίγωνα μὲ δύο δεδομένας πλευρὰς ΓΒ, ΓΑ, καὶ μίαν τρίτην κατ᾽ἀρέσκειαν, τὸ μεγαλήτερον ΑΒΓ εἶναι ἐκεῖνο εἰς τὸ ὁποῖον ἡ περιεχομένη ἀπὸ τὰς δεδομένας πλευρὰς γωνία Γ, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν Α καὶ Β. σχ. 272 καὶ 273.

Ας προεκβληθῶσιν αἱ δύο πλευραὶ ΑΓ, ΑΒ, ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Δ· θέλει προκύψει σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ ΒΓΔ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ γωνία ΔΒΓ θέλει εἶναι ὁμοίως ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν ΒΔΓ, ΒΕΔ:

διότι ΒΓΔ + ΒΓΑ ἐπειδὴ ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὰς, ὡς καὶ ΓΒΑ + ΓΒΔ, ἔχομεν ΒΓΔ + ΒΓΑ = ΓΒΑ + ΓΒΔ· προσθέσει καὶ εἰς τὰ δύο μέρη τῆς ΒΔΓ = ΒΑΓ, προκύπτει ΒΓΔ + ΒΓΑ + ΒΔΓ = ΓΒΑ + ΓΒΔ + ΒΑΓ. Τώρα, ἐξ ὑποθέσεως, ΒΓΑ = ΓΒΑ + ΒΑΓ· λοιπὸν ΓΒΔ = ΒΓΔ + ΒΔΓ.

Ἂς ἀχθῇ τὸ τόξον ΒΙ ὥςε νὰ κάμνῃ τὴν γωνίαν ΓΒΙ = ΒΓΔ, καὶ ἐπομένως ΙΒΔ = ΒΔΓ· τὰ δύο τρίγωνα ΙΒΓ, ΙΒΔ, θέλουν εἶναι ἰσοσκελῆ, καὶ θέλει εἶναι ΙΓ = ΙΒ = ΙΔ. Λοιπὸν ἡ ςιγμὴ Ι μέσον τῆς ΔΓ, ἰσάκις ἀπέχει ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα Β, Γ, Δ: διὰ λόγον παρόμοιον ἡ ςιγμὴ Ο, μέσον τῆς ΑΒ, ἰσάκις θέλει ἀπέχει ἀπὸ τὰς τρεῖς ςιγμὰς Α, Β, Γ.

Ἔςω τώρα ΓΑ′ = ΓΑ καὶ ἡ γωνία ΒΓΑ′ > ΒΓΑ· ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἡ Α′Β, καὶ προεκβληθῶσι τὰ τόξα Α′Γ, Α′Β, ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Δ′, τὸ τόξον Δ′ΓΑ′ θέλει εἶναι ἡμιπεριφέρεια καθὼς καὶ ΔΓΑ· λοιπὸν ἐπειδὴ ΓΑ′ = ΓΑ, θέλει εἶναι καὶ ΓΔ′ = ΓΔ. Ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον ΓΙΔ′, ἔχομεν ΓΙ + ΙΔ′ > ΓΔ′· λοιπὸν ΙΔ′ > ΓΔ − ΓΙ, ἢ ΙΔ′ > ΙΔ. σχ. 272.

Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΓΙΒ ἂς διαιρεθῇ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς Ι εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τοῦ τόξου ΕΙΖ τὸ ὁποῖον θέλει εἶναι κάθετον εἰς τὸ ἥμισυ τοῦ ΒΓ. Ἐὰν ληφθῇ μία ςιγμὴ Λ μεταξὺ Ι καὶ Ε, τὸ διάςημα ΒΛ, ἴσον μὲ ΛΓ, θέλει εἶναι μικρότερον τοῦ ΒΙ· διότι δυνατὸν νὰ ἀποδειχθῇ, ὡς εἰς τὴν Θ′ πρότασιν τοῦ Α′ Βιβλίου, ὅτι ΒΛ + ΛΓ < ΒΙ + ΙΓ· λοιπὸν μὲ τὰ τὴν διαίρεσιν τῶν δύο μερῶν διὰ δύο θέλει εἶναι ΒΛ < ΒΙ. Ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον Δ′ΛΓ ἔχομεν Δ′Λ > Δ′Γ − ΓΛ, καὶ πολὺ περισσότερον Δ′Λ > ΔΓ − ΓΙ, ἢ Δ′Λ > ΔΙ, ἢ Δ′Λ > ΒΙ· λοιπὸν Δ′Λ > ΒΛ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἐὰν ἐπὶ τοῦ τόξου ΕΙΖ ζητηθῇ μία ςιγμὴ ἰσάκις ἀπέχουσα τῶν τριῶν σημείων Β, Γ, Δ′, ἡ ςιγμὴ αὔτη δὲν ἠμπορεῖ νὰ εὑρεθῇ παρὰ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τοῦ τόξου ΕΙ πρὸς τὸ Ζ. Εςω Ι' ἡ ζητουμένη ςιγμὴ, εἰς τρόπον ὥςε $Δ'Ι' = ΒΙ' = ΓΙ'$· ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα $Ι'ΓΒ$, $Ι'ΓΔ'$, $ΙΒΔ'$, εἶναι ἰσοσκελῆ, θέλομεν ἔχει τὰς ἴσας γωνίας $Ι'ΒΓ = Ι'ΓΒ$, $Ι'ΒΔ' = Ι'Δ'Β$, $Ι'ΓΔ' = Ι'Δ'Γ$. Αλλ' αἱ γωνίαι $Δ'ΒΓ + ΓΒΔ'$ κάμνουν δύο ὀρθὰς, καθὼς καὶ $Δ'ΓΒ + ΒΓΔ'$· λοιπὸν

$$Δ'ΒΙ' + Ι'ΒΓ + ΓΒΔ' = 2,$$

$$ΒΓΙ' - Ι'ΓΔ' + ΒΓΔ' = 2.$$

Προσθέτοντες τὰ δύο ἀθροίσματα καὶ παρατηροῦντες ὅτι $Ι'ΒΓ = ΒΓΙ'$ καὶ $Δ'ΒΙ' - Ι'ΓΔ' = ΒΔ'Ι' - Ι'Δ'Γ = ΓΔ'Β = ΓΔ'Β$, θέλομεν ἔχει

$$2Ι'ΒΓ + ΓΔ'Β + ΓΒΔ' + ΒΓΔ' = 4.$$

Λοιπὸν $ΓΔ'Β + ΓΒΔ' + ΒΓΔ' - 2$ (μέτρον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου $Δ'ΒΓ$) $= 2 - 2Ι'ΒΓ$· εἰς τρόπον ὥςε ἐμβαδὸν $Δ'ΒΓ = 2 - 2$ γωνία $Ι'ΒΓ$· ὁμοίως εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐμβαδὸν $ΑΒΓ = 2 - 2$ γωνία ΙΒΓ. Τώρα, ἀπεδείχθη ὅτι ἡ γωνία Ι'ΒΓ εἶναι μείζων τῆς ΙΒΓ (1)· λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν Δ'ΒΓ εἶναι μικρότερον τοῦ ΑΒΓ.

Η αὐτὴ ἀπόδειξις καὶ ἡ αὐτὴ συνέπεια ἤθελον ἔχει χώραν ἐὰν λαμβάνοντες πάντοτε τὸ τόξον $ΓΔ' = ΓΔ$, ἐκάμναμεν τὴν γωνίαν $ΒΓΔ' < ΒΓΔ$· λοιπὸν ΑΒΓ εἶναι τὸ μεγαλήτερον τρίγωνον μεταξὺ ὅλων ἐκείνων τὰ ὁποῖα ἔχουν δεδομένας τὰς δύο πλευρὰς καὶ τὴν τρίτην κατ' ἀρέσκειαν. σχ. 273.

Σχόλιον Α'. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ μεγαλήτερον μεταξὺ ὅλων ἐκείνων τὰ ὁποῖα ἔχουν δύο δεδομένας πλευρὰς

---

(1) Διότι ἐὰν ἦτον ἴση τότε ἡ ςιγμὴ Ι' ἔπρεπε νὰ πέσῃ εἰς Ι καὶ ἡ ἀπέχουσα ςιγμὴ ἰσάκις ἀπὸ Δ', Β, Γ ἤθελεν εἶναι ἡ Ι τὸ ὁποῖον ἀπεδείχθη ἀδύνατον· ἐὰν δὲ μικροτέρα, ἡ ςιγμὴ Ι' ἔπρεπε νὰ ἦναι μεταξὺ Ι καὶ Ε τὸ ὁποῖον εἶναι ἐπίσης ἀδύνατον· λοιπὸν ἐπειδὴ ἡ ζητουμένη ςιγμὴ Ι' οὔτε εἰς Ι οὔτε μεταξὺ Ι καὶ Ε, εὑρίσκεται, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία $Ι'ΒΓ > ΙΒΓ$. Ο. Μ.

ΓΑ, ΓΒ, ἠμπορεῖ νὰ ἐγγραφθῇ εἰς ἡμικύκλιον τοῦ ὁποίου ἡ χορδὴ τῆς τρίτης πλευρᾶς ΑΒ θέλει εἶναι ἡ διάμετρος. Διότι ἐὰν Ο ἦναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ, εἴδομεν ὅτι τὰ διαστήματα ΟΓ, ΟΒ εἶναι ἴσα· ἡ περιφέρεια λοιπὸν τοῦ μικροῦ κύκλου τοῦ ἐκ τῆς στιγμῆς Ο ὡς ἐκ πόλου καὶ μὲ διάστημα ΟΒ γραφομένου διέρχεται διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ. Περιπλέον ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΒ εἶναι διάμετρος τούτου τοῦ μικροῦ κύκλου· διότι τὸ κέντρον τὸ ὁποῖον ἐνταυτῷ πρέπει νὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ μικροῦ κύκλου καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τόξου τοῦ μεγίστου κύκλου ΒΟΑ (πρό. 1, πόρ. 4), ἀναγκαίως πρέπει νὰ εὑρίσκεται εἰς τὴν κοινὴν τομὴν τούτων τῶν δύο ἐπιπέδων ἥτις εἶναι ἡ εὐθεῖα ΒΑ, καὶ οὕτω ΒΑ εἶναι διάμετρος. σχ. 241.

Β΄. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐπειδὴ ἡ γωνία Γ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων Α καὶ Β, ἀκολουθεῖ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εἶναι διπλάσιον τῆς γωνίας Γ. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι πάντοτε μεγαλήτερον δύο ὀρθῶν (19)· λοιπὸν ἡ γωνία Γ εἶναι μεγαλητέρα ὀρθῆς.

Γ΄. Ἐὰν προεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ ΓΒ, ΓΑ ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Ε, τὸ τρίγωνον ΒΑΕ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τέταρτον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Διότι ἡ γωνία Ε = Γ = ΑΒΓ + ΓΑΒ· λοιπὸν αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου ΒΑΕ γωνίαι ἰσοδυναμοῦν μὲ τὰς τέσσαρας ΑΒΓ, ΑΒΕ, ΓΑΒ, ΒΑΕ, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρας ὀρθάς· λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου ΒΑΕ (πρό. 24) = 4—2 = 2 = ½ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Δ΄. Δὲν ἤθελεν ὑπάρχει μέγιστον ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο δεδομένων πλευρῶν ΓΑ, ΓΒ ἦτον ἴσον ἢ μεγαλήτερον τῆς ἡμιπεριφερείας μεγίστου κύκλου. Διότι ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρέπει νὰ ἐγγράφεται εἰς ἡμικύκλιον τῆς σφαίρας, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πλευρῶν ΓΑ, ΓΒ ἀπαιτεῖται νὰ ἦναι μικρότερον τῆς ἡμιπεριφερείας ΒΓΒ (πρό. 3), καὶ ἑπομένως μικρότερον τῆς ἡμιπεριφερείας μεγίστου κύκλου.

Ὁ λόγος διὰ τὸν ὁποῖον δὲν ὑπάρχει μέγιστον, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο δεδομένων πλευρῶν εἶναι μεγαλήτερον τῆς ἡμιπεριφερείας μεγίστου κύκλου, εἶναι ὅτι τότε τὸ τρίγωνον αὐξάνει μᾶλλον ἐπὶ μᾶλλον ἀναλόγως ὁποῦ ἡ περιεχομένη γωνία ἀπὸ τὰς δεδομένας πλευρὰς γίνεται μεγαλητέρα· τέλος ὅταν γένῃ ἴση μὲ δύο ὀρθάς, αἱ τρεῖς πλευραὶ θέλουν εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ σχηματίζει ἀκεραίαν περιφέρειαν· τὸ τρίγωνον λοιπὸν θέλει γενῇ ἡμισφαίριον ἀλλὰ παύει ἀπὸ τὸ νὰ ἦναι τρίγωνον. (1)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἀπὸ ὅλα τὰ σχηματιζόμενα σφαιρικὰ τρίγωνα μὲ δεδομένην πλευρὰν καὶ δεδομένην περίμετρον, τὸ μεγαλήτερον εἶναι ἐκεῖνο, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ δύο μὴ προσδιωρισμέναι πλευραὶ εἶναι ἴσαι.

---

(1) Ἀφ' οὗ σχηματίσωμεν ἓν τρίγωνον μὲ τὰς δύο δεδομένας πλευρὰς δίδοντες κλίσιν εἰς αὐτὰς κατ' ἀρέσκειαν, φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τούτου τοῦ τριγώνου αὐξάνει ἀναλόγως μὲ τὴν αὔξησιν τῆς περιεχομένης γωνίας ἀπὸ τὰς δύο δεδομένας πλευράς, καί, κατὰ τὴν ἀποδειχθεῖσαν πρότασιν, τότε φθάνει εἰς τὴν μεγίστην του κατάστασιν, ὅταν ἡ γωνία αὕτη γένῃ ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων· καὶ τὸ τοιοῦτον τρίγωνον, ὡς ἀπεδείχθη, ἔχει τὴν ἰδιότητα νὰ ἐγγράφεται εἰς ἡμιπεριφέρειαν τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι ἡ χορδὴ τῆς ἀπροσδιορίστου πλευρᾶς· ἐκ τοῦ ὁποίου ἐσυνάχθη ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων πλευρῶν πρέπει νὰ ἦναι ἔλασσον ἡμιπεριφερείας μεγίστου κύκλου· ἕπεται λοιπὸν ὅτι ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων πλευρῶν εἶναι μεῖζον ἡμιπεριφερείας, ὅσον καὶ ἂν αὐξηνθῇ ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ἀπὸ τὰς δεδομένας πλευρὰς δὲν ἠμπορεῖ ποτὲ νὰ δώσῃ ἓν τρίγωνον τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν, εἰς τρόπον ὥστε τὸ τρίγωνον ἠμπορεῖ νὰ λάβῃ ὁποιονδήποτε μέγεθος· καὶ τὸ μέγεθός του κρέμαται ἀπὸ τὸ τῆς γωνίας τῆς περιεχομένης ἀπὸ τὰς δύο δεδομένας πλευράς. Ὅθεν ἐὰν αὕτη γένῃ ἴση μὲ δύο ὀρθάς, ἡ ἐπιφάνειά του γίνεται ἴση μὲ τὴν τοῦ ἡμισφαιρίου· διότι τότε τὰ δύο ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα περιέχουν τὰς δεδομένας πλευρὰς ταυτίζονται εἰς ἕν, καὶ διὰ τοῦτο αἱ δύο δεδομέναι πλευραὶ εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπε-

Εςω AB ἡ δεδομένη πλευρὰ κοινὴ εἰς τὰ δύο τρίγωνα $A\Gamma B$, $A\Delta B$, καὶ ἔςω $A\Gamma + \Gamma B = A\Delta + \Delta B$· λέγω, ὅτι τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον $A\Gamma B$, εἰς τὸ ὁποῖον $A\Gamma = \Gamma B$, εἶναι μεῖζον τοῦ μὴ ἰσοσκελοῦς $A\Delta B$. σχ. 242.

Διότι ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουν κοινὸν μέρος τὸ AOB, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τρίγωνον $BO\Delta$ εἶναι μικρότερον τοῦ $AO\Gamma$. Η γωνία ΓBA ἴση τῇ ΓAB, εἶναι μεγαλητέρα τῆς OAB· οὕτως ἡ πλευρὰ AO εἶναι μείζων τῆς OB (πρό. 21)· ἄς ληφθῇ $OI = OB$· ἄς γένῃ $OK' = O\Delta$, καὶ ἄς ἐπιζευχθῇ $K'I$· τὸ τρίγωνον $OK'I$ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΔOB. Εὰν τώρα τὸ τρίγωνον ΔOB ἤ τὸ ἴσον του $K'OI$ δὲν ἦναι μικρότερον τοῦ $OA\Gamma$, πρέπει νὰ ἦναι ἴσον ἤ μεγαλήτερον· καὶ εἰς τὰς δύο περιςάσεις, ἐπειδὴ ἡ ςιγμὴ I εἶναι μεταξὺ τῶν ςιγμῶν A καὶ O, πρέπει ἡ ςιγμὴ K' νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς $O\Gamma$, ἄλλως τὸ τρίγωνον $OK'I$ ἤθελε περιέχεται εἰς τὸ τρίγωνον ΓAO, καὶ ἐπομένως ἤθελεν εἶναι μικρότερον. Γούτου τεθέντος, ἐπειδὴ ὁ σιμοτινώτερος δρόμος ἀπὸ Γ εἰς A εἶναι ΓA, ἔχομεν $\Gamma K' + K'I + IA > \Gamma A$. Αλλὰ $\Gamma K' = O\Delta - \Gamma O$, $AI = AO - OB$, $K'I = B\Delta$· λοιπὸν $O\Delta - \Gamma O + AO - OB + B\Delta > \Gamma A$, καὶ τῆς ἀναγωγῆς γενομένης, $A\Delta - \Gamma B +$;

δεν· ἐπειδὴ δὲ διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ τρίγωνον ἀνάγκη νὰ ἑνώσωμεν τὰ ἄκρα τῶν δύο τούτων πλευρῶν διὰ τόξου μεγίςου κύκλου, ἕπεται ὅτι ὁ μέγιςος οὗτος κύκλος θέλει συναπαντῇ τὸν μέγιςον κύκλον, τοῦ ὁποίου μέρος τῆς περιφερείας εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων πλευρῶν, εἰς αὐτὰ τὰ δύο ἄκρα· ἀπὸ ἄλλο μέρος οἱ δύο οὗτοι μέγιςοι κύκλοι δὲν ἠμποροῦν νὰ τέμνωνται εἰς δύο ἴσα μέρη, διότι τὸ δεδομένον ἄθροισμα μὲ τὸ νὰ ἦναι μεῖζον ἡμιπεριφερείας, ἀκολουθεῖ ὅτι τὸ ἐπίλοιπον μέρος τοῦ ἑνὸς εἶναι μικρότερον ἡμιπεριφερείας, ἕπεται λοιπὸν ὅτι οἱ δύο κύκλοι οὗτοι ταυτίζονται· καὶ οὕτως ταυτιζομένης τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου μὲ μέγιςον κύκλον, ἡ ἐπιφάνειά του ταυτίζεται μὲ τὴν τοῦ ἡμισφαιρίου· ἐὰν λάβῃ μίαν μεγαλητέραν αὔξησιν ἡ γωνία τὸ τρίγωνον αὐξάνει παρομοίως· ὥςε δύναται νὰ λάβῃ ὁποιονδήποτε μέγεθος. Ο. Μ.

ΒΔ > ΓΑ, ἢ ΑΔ + ΔΒ > ΑΓ + ΓΒ. Τώρα ἡ ἀνισότης αὕτη ἐναντιοῦται εἰς τὴν ὑπόθεσιν ΑΔ + ΒΔ = ΑΓ + ΓΒ· λοιπὸν ἡ ςιγμὴ Κ′ δὲν ἠμπορεῖ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΟΓ· λοιπὸν πίπτει μεταξὺ Ο καὶ Γ, καὶ ἐπομένως τὸ τρίγωνον Κ′ΟΙ, ἢ τὸ ἴσόν του ΟΔΒ, εἶναι μικρότερον τοῦ ΑΓΟ· λοιπὸν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΓΒ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ μὴ ἰσοσκελοῦς ΑΔΒ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τῆς αὐτῆς περιμέτρου.

Σχόλιον. Αἱ δύο αὗται τελευταῖαι προτάσεις εἶναι ἀνάλογοι μὲ τὰς προτάσεις Α′ καὶ Γ′ τοῦ παραρτήματος εἰς τὸ Δ′ βιβλίον. Οὕτω δυνάμεθα νὰ ἐξάξωμεν, ὡς πρὸς τὰ σφαιρικὰ πολύγωνα, τὰς συνεπείας αἱ ὁποῖαι ἔχουν χώραν διὰ τὰ εὐθύγραμμα πολύγωνα.

Ἰδοὺ αἱ ἀρχικαί:

1.τη Ἀπὸ ὅλα τὰ ἰσοπερίμετρα σφαιρικὰ πολύγωνα καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν, τὸ μεγαλήτερον εἶναι τὸ ἰσόπλευρον.

Η αὐτὴ ἀπόδειξις μὲ τὴν τῆς Β′ προτάσεως τοῦ παραρτήματος εἰς τὸ Δ′ βιβλίον.

2.ρα Ἀπὸ ὅλα τὰ σχηματιζόμενα σφαιρικὰ πολύγωνα μὲ δεδομένας πλευρὰς καὶ μίαν τελευταίαν κατ᾽ ἀρέσκειαν, τὸ μεγαλήτερον εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ ἐγγραφθῇ εἰς ἡμικύκλιον τοῦ ὁποίου ἡ χορδὴ τῆς μὴ προσδιωρισμένης πλευρᾶς θέλει εἶναι ἡ διάμετρος.

Η ἀπόδειξις συνάγεται ἀπὸ τὴν πρότασιν Κϛ′, ὡς εἴδομεν εἰς τὴν Ε′ πρότασιν τοῦ ῥηθέντος παραρτήματος· πρέπει διὰ τὴν ὕπαρξιν τοῦ μεγίςου, τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων πλευρῶν νὰ ἦναι μικρότερον τῆς ἡμιπεριφερείας μεγίςου κύκλου.

3.τη Τὸ μεγαλήτερον τῶν σχηματιζομένων σφαιρικῶν πολυγώνων μὲ δεδομένας πλευράς, εἶναι τὸ δυνάμενον νὰ ἐγγραφθῇ εἰς κύκλον τῆς σφαίρας.

Η αὐτὴ ἀπόδειξις ὁποῦ καὶ διὰ τὴν ϛ′ πρότασιν τοῦ παραρτήματος εἰς τὸ Δ′ βιβλίον ἐδώκαμεν.

4.τη Τὸ μεγαλήτερον τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν, εἶναι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς γωνίας του ἴσας καὶ τὰς πλευράς του ἴσας.

Τοῦτο προκύπτει ἀπὸ τὰ προηγούμενα 1 καὶ 2 πορίσματα.

Σημείωσις. Ὅλαι αἱ προτάσεις περὶ μεγίστου ὅσαι ἀναφέρονται εἰς τὰ σφαιρικὰ πολύγωνα ἐφαρμόζονται εἰς τὰς στερεὰς γωνίας τὰς ὁποίας μετροῦσι ταῦτα τὰ πολύγωνα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΕΙΣ ΤΑ ΒΙΒΛΙΑ Ϛ′. ΚΑΙ Ζ′.

ΤΑ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΠΡΩΤΗ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Πέντε μόνον κανονικὰ πολύεδρα ὑπάρχουσι.

Διότι κανονικὰ πολύεδρα ὡρίσαμεν ἐκεῖνα τῶν ὁποίων ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι κανονικὰ ἴσα πολύγωνα, καὶ ὅλαι αἱ στερεαὶ γωνίαι ἴσαι μεταξύ των. Αἱ συνθῆκαι αὗται εἰς πολλὰ ὀλίγας περιστάσεις ἔχουν χώραν.

1.ον Ἐὰν αἱ ἕδραι ἦναι ἰσόπλευρα τρίγωνα, δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν κάθε στερεὰν γωνίαν τοῦ πολυέδρου μὲ τρεῖς, ἢ μὲ τέσσαρας, ἢ μὲ πέντε γωνίας τούτων τῶν τριγώνων: ἐντεῦθεν γεννῶνται τρία κανονικὰ σώματα, τὰ ὁποῖα εἶναι, τὸ τετράεδρον, τὸ ὀκτάεδρον, καὶ τὸ εἰκο-