ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

ΑΙ ΑΡΧΑΙ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α΄. Η Γεωμετρία εἶναι ἐπιςήμη ἔχουσα ἀντικείμενον τὴν καταμέτρησιν τῆς ἐκτάσεως.

Η ἔκτασις ἔχει τρεῖς διαςάσεις, μῆκος, πλάτος καὶ ὕψος.

Β΄. Η γραμμὴ εἶναι μῆκος χωρὶς πλάτος.

Τὰ ἄκρα τῆς γραμμῆς καλοῦνται σημεῖα: τὸ σημεῖον λοιπὸν δὲν ἔχει ἔκτασιν.

Γ΄. Η εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ὁ πλέον σιμοτινὸς δρόμος ἀπὸ ἓν σημεῖον εἰς ἄλλο.

Δ΄. Κάθε γραμμὴ ἥτις δὲν εἶναι οὔτε εὐθεῖα οὔτε σύνθετος ἀπὸ εὐθείας γραμμὰς εἶναι καμπύλη γραμμή.

Οὕτως ΑΒ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ, ΑΓΔΒ εἶναι γραμμὴ κεκλασμένη ἢ σύνθετος ἀπὸ εὐθείας γραμμὰς, καὶ ΑΕΒ εἶναι καμπύλη γραμμὴ σχ. 1.

Ε΄. Ἐπιφάνεια εἶναι ὅ,τι ἔχει μῆκος καὶ πλάτος, χωρὶς ὕψος ἢ πάχος.

Ϛ΄. Τὸ ἐπίπεδον εἶναι ἐπιφάνεια, εἰς τὴν ὁποίαν ἐὰν ληφθῶσι κατ᾽ ἀρέσκειαν δύο σημεῖα, καὶ ἑνωθῶσι τὰ δύο ταῦτα σημεῖα δι᾽ εὐθείας γραμμῆς, ἡ γραμμὴ αὕτη εὑρίσκεται ὅλη εἰς τὴν ἐπιφάνειαν.

Ζ΄. Κάθε ἐπιφάνεια ἥτις δὲν εἶναι ἐπίπεδος οὔτε σύνθετος ἀπὸ ἐπιπέδους ἐπιφανείας εἶναι καμπύλη ἐπιφάνεια.

Η΄. Στερεὸν ἢ σῶμα εἶναι ὅ,τι περιέχει ἐν ταυτῷ τὰς τρεῖς διαστάσεις τῆς ἐκτάσεως. —

Θ΄. Οταν δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ συναπαντῶνται ὡς ΑΒ,ΑΓ, ἡ ποσότης περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον μεγάλη διὰ τῆς ὁποίας ἀπομακρύνονται αὗται αἱ εὐθεῖαι, ὅσον πρὸς τὴν θέσιν των, καλεῖται γωνία. Τὸ σημεῖον τῆς συναπαντήσεως ἢ τῆς κοινῆς τομῆς Α εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας· αἱ δὲ γραμμαὶ ΑΒ,ΑΓ εἶναι αἱ πλευραὶ αὐτῆς. σχ. 2.

Η γωνία σημειόνεται ἐνίοτε μόνον διὰ τοῦ γράμματος τῆς κορυφῆς Α, ἄλλο τε διὰ τριῶν γραμμάτων ΒΑΓ ἢ ΓΑΒ, τιθεμένου ὅμως τοῦ γράμματος τῆς κορυφῆς εἰς τὸ μέσον.

Αἱ γωνίαι, καθὼς καὶ αἱ ἄλλαι ποσότητες, εἶναι δεκτικαὶ προσθέσεως, ἀφαιρέσεως, πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως: οὕτως ἡ γωνία ΔΓΕ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ΔΓΒ,ΒΓΕ, καὶ ἡ γωνία ΔΓΒ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δύο γωνιῶν ΔΓΕ,ΒΓΕ. σχ. 20.

Ι΄. Οταν ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΒ συναπαντᾷ μίαν ἄλλην εὐθεῖαν ΓΔ, εἰς τρόπον ὥστε αἱ προσκείμεναι γωνίαι ΒΑΓ,ΒΑΔ νὰ ἦναι ἴσαι μεταξύ των, ἑκάστη τούτων τῶν γωνιῶν καλεῖται γωνία ὀρθή· ἡ δὲ γραμμὴ ΑΒ λέγεται κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ. σχ. 3.

ΙΑ΄. Κάθε γωνία ΒΑΓ μικροτέρα τῆς ὀρθῆς εἶναι γωνία ὀξεῖα· κάθε δὲ γωνία μεγαλητέρα ΔΕΖ εἶναι γωνία ἀμβλεῖα σχ. 4.

ΙΒ΄. Δύο γραμμαὶ λέγονται παράλληλοι, ὅταν, κείμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ συναπαντηθῶσιν ὅσον μακρὰν καὶ ἂν προεκβληθῶσι· τοιαῦται εἶναι αἱ γραμμαὶ ΑΒ,ΓΔ.

ΙΓ'. Σχῆμα ἐπίπεδον εἶναι ἐπίπεδόν τι περιοριζόμενον ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη ἀπὸ γραμμάς.

Ἐὰν αἱ γραμμαὶ ἦναι εὐθεῖαι, τὸ περιεχόμενον ἀπὸ αὐτὰς χωρίον καλεῖται σχῆμα εὐθύγραμμον ἢ πολύγωνον· αἱ δὲ γραμμαὶ ὁμοῦ λαμβανόμεναι σχηματίζουν τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου σχ. 6.

ΙΔ'. Τὸ πολύγωνον ἐκ τριῶν πλευρῶν εἶναι τὸ ἁπλούστερον ἀπὸ ὅλα, καὶ ὀνομάζεται τρίγωνον. Τὸ ἐκ τεσσάρων πλευρῶν καλεῖται τετράπλευρον· τὸ ἐκ πέντε, πεντάγωνον. Τὸ ἀπὸ ἓξ ἑξάγωνον, κ. τ. λ.

ΙΕ'. Καλεῖται τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐκεῖνο ὁποῦ ἔχει τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας σχ. 7.

Τρίγωνον ἰσοσκελὲς, τοῦ ὁποίου αἱ δύο μόνον πλευραὶ εἶναι ἴσαι σχ. 8.

Τρίγωνον σκαληνὸν, τοῦ ὁποίου καὶ αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι ἄνισοι σχ. 9.

ΙϚ'. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι ἐκεῖνο ὁποῦ ἔχει μίαν γωνίαν ὀρθήν. Η ἀπέναντι πλευρὰ εἰς τὴν ὀρθὴν γωνίαν καλεῖται Υποτείνουσα. Οὕτως ΑΒΓ εἶναι τρίγωνον ὀρθογώνιον εἰς Α, ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι ἡ ὑποτείνουσά του σχ. 10.

ΙΖ'. Μεταξὺ τῶν τετραπλεύρων διακρίνονται.

Τὸ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ μὲν πλευραὶ εἶναι ἴσαι, αἱ δὲ γωνίαι ὀρθαί. (βλέπε τὴν Κ' πρότ. βιβλ. Α'.) σχ. 11.

Τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς γωνίας ὀρθὰς χωρὶς νὰ ἔχῃ τὰς πλευρὰς ἴσας (βλέπε τὴν αὐτὴν πρό.) σχ. 12.

Τὸ παραλληλόγραμμον ἢ ῥόμβος, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι σχ. 13.

Τὸ ῥομβοειδὲς, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι χωρὶς αἱ γωνίαι νὰ ἦναι ὀρθαί. σχ. 14.

Τέλος τὸ τραπέζιον, τοῦ ὁποίου δύο πλευραὶ μόνον εἶναι παράλληλοι σχ. 15.

ΙΗ'. Καλεῖται διαγώνιος ἡ γραμμὴ ἥτις ἑνόνει τὰς κορυφὰς δύο μὴ προσκειμένων γωνιῶν, τοιαύτη εἶναι ἡ ΑΓ· σχ. 42.

ΙΘ. Πολύγωνον ἰσόπλευρον εἶναι ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι. Πολύγωνον ἰσογώνιον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Κ'. Δύο πολύγωνα εἶναι ἰσόπλευρα μεταξύ των ὅταν ἔχουν τὰς πλευρὰς ἴσας ἀνὰ μίαν μίαν, καὶ θεμένας κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, τουτέστιν, ὅταν διατρέχοντες τὰς περιμέτρους των κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν, ἔχωμεν τὴν πρώτην πλευρὰν τοῦ ἑνὸς ἴσην μὲ τὴν πρώτην πλευρὰν τοῦ ἄλλου, τὴν δευτέραν τοῦ ἑνὸς μὲ τὴν δευτέραν τοῦ ἄλλου, τὴν τρίτην μὲ τὴν τρίτην καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Τὸ αὐτὸ ἐννοεῖται διὰ δύο πολύγωνα ἰσογώνια μεταξύ των.

Εἰς τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην περίστασιν, αἱ ἴσαι πλευραὶ ἢ αἱ ἴσαι γωνίαι καλοῦνται πλευραὶ ἢ γωνίαι ὁμόλογοι.

Σ. Κ. Εἰς τὰ τέσσαρα πρῶτα βιβλία ὁ λόγος θέλει εἶναι περὶ ἐπιπέδων σχημάτων ἢ χαρακωμένων ἐπὶ ἐπιπέδου ἐπιφανείας.

Εξήγησις τῶν Ορων καὶ σημείων.

Ἀξίωμα εἶναι πρότασις καθ' ἑαυτὴν φανερά.

Θεώρημα εἶναι ἀλήθεια γινομένη φανερὰ δι' ἑνὸς συλλογισμοῦ καλουμένου ἀπόδειξις.

Πρόβλημα εἶναι ζήτημα τὸ ὁποῖον ἀπαιτεῖ λύσιν.

Λῆμμα εἶναι ἀλήθεια τὴν ὁποίαν μεταχειριζόμεθα συμβοηθητικῶς διὰ τὴν ἀπόδειξιν ἑνὸς θεωρήματος ἢ διὰ τὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος.

Τὸ κοινὸν ὄνομα πρότασις ἀποδίδεται ἀδιαφόρως εἰς τὰ θεωρήματα, προβλήματα καὶ λήμματα.

Πόρισμα εἶναι συνέπεια πηγάζουσα ἀπὸ μίαν ἢ περισσοτέρας προτάσεις.

Σχόλιον εἶναι παρατήρησις γινομένη ἐπὶ μιᾶς ἢ περισσοτέρων προτάσεων προηγουμένων, σκοπὸν ἔχουσα νὰ δείξῃ τὸν δεσμόντων, τὴν ὠφέλειάν των, τὸν περιορισμόν των, ἢ τὴν ἔκτασίν των.

Υπόθεσις εἶναι μία θέσις γινομένη εἰς τὴν ἐκφώνησιν προτάσεως τινὸς, ἢ εἰς τὴν ὁδὸν μιᾶς ἀποδείξεως.

Τὸ σημεῖον = εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος: οὕτως ἡ ἔκφρασις $A=B$ σημειόνει ὅτι A ἴσον B.

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι A εἶναι μικρότερον τοῦ B γράφομεν $A<B$.

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι A εἶναι μεγαλήτερον τοῦ B γράφομεν $A>B$.

Τὸ σημεῖον + προφέρεται πλέον· σημειόνει δὲ τὴν πρόσθεσιν.

Τὸ σημεῖον — προφέρεται μεῖον· σημειόνει δὲ τὴν ἀφαίρεσιν: οὕτως $A+B$ παριςάνει τὸ ἄθροισμα τῶν ποσοτήτων A καὶ B. $A-B$ παριςάνει τὴν διαφοράν των ἢ ὅ,τι μένει ἀφαιρεθέντος B ἀπὸ A· παρομοίως $A-B+\Gamma$ ἢ $A+\Gamma-B$ παριςάνει ὅτι A καὶ Γ πρέπει νὰ προςεθοῦν, καὶ ἐκ τοῦ ὅλου νὰ ἀφαιρεθῇ B.

Τὸ σημεῖον × σημειόνει τὸν πολλαπλασιασμόν. Οὕτως $A\times B$ παριςάνει τὸ γινόμενον τοῦ A πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ B. Ἀντὶ τοῦ σημείου × ἐνίοτε μεταχειριζόμεθα μίαν ςιγμήν: οὕτως $A.B$ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ $A\times B$. σημειόνεται προσέτι τὸ αὐτὸ γινόμενον χωρὶς παρένθεσιν οὐδενὸς σημείου διὰ AB. ἀλλὰ δὲν πρέπει νὰ μεταχειριζώμεθα ταύτην τὴν ἔκφρασιν παρ' ὅταν εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν δὲν ἔχωμεν νὰ μεταχειρισθῶμεν ἐκείνης τῆς γραμμῆς ΑΒ ἀποςάσεως τῶν σημείων Α καὶ Β.

Η Εκφρασις $A \times (B + \Gamma - \Delta)$ παριςάνει τὸ γινόμενον τοῦ Α ἐπὶ τὴν ποσότητα $B + \Gamma - \Delta$. Εὰν ἔπρεπε νὰ πολλαπλασιάσωμεν $A + B$ ἐπὶ $A - B + \Gamma$, ἠθέλαμεν σημειώσει τὸ γινόμενον οὕτω $(A + B)(A - B + \Gamma)$· ὅ,τι περιέχεται μεταξὺ παρενθέσεων θεωρεῖται ὡς μία μόνη ποσότης.

Ενας ἀριθμὸς ἔμπροσθεν μιᾶς γραμμῆς ἢ μιᾶς ποσότητος, χρησιμεύει ὡς πολλαπλασιαςὴς ταύτης τῆς γραμμῆς ἢ ταύτης τῆς ποσότητος· οὕτως διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι ἡ γραμμὴ ΑΒ λαμβάνεται τρεῖς φοραῖς, ἢ τὸ τριπλάσιον αὐτῆς γράφομεν 3ΑΒ. διὰ νὰ σημειώσωμεν τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας Α, γράφομεν $\frac{1}{2}$ Α.

Τὸ τετράγωνον τῆς γραμμῆς ΑΒ σημειόνεται διὰ $\overline{AB}^2$ ὁ κῦβος της διὰ $\overline{AB}^3$. Εν οἰκείῳ τόπῳ θέλομεν ἐξηγήσει τί σημαίνει ἀκριβῶς τὸ τετράγωνον καὶ ὁ κῦβος μιᾶς γραμμῆς.

Τὸ σημεῖον $\sqrt{}$ δεικνύει ἐξαγωγὴν ῥίζης. Οὕτως $\sqrt{2}$ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2. $\sqrt{(A \times B)}$ εἶναι ἡ ῥίζα τοῦ γινομένου $A \times B$, ἢ ἡ μέση ἀνάλογος μεταξὺ Α καὶ Β.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ.

1. Δύο ποσότητες ἴσαι μὲ μίαν τρίτην εἶναι ἴσαι καὶ μεταξύ των.

2. Τὸ ὅλον εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἰδίου μέρους.

3. Τὸ ὅλον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν εἰς τὰ ὁποῖα διῃρέθη.

4. Ἀπὸ ἓν σημεῖον εἰς ἄλλο μίαν μόνην εὐθεῖαν γραμμὴν δυνάμεθα νὰ ἄξωμεν.

ϋ. Δύο μεγέθη, γραμμή, ἐπιφάνεια ἢ στερεὸν, εἶναι ἴσα ὅταν τιθέμενα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἐφαρμόζουσι καθ' ὅλην των τὴν ἔκτασιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΠΡΩΤΗ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

Εςω ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, καὶ ἡ ΗΘ ἐπὶ τὴν ΕΖ, λέγω ὅτι αἱ γωνίαι ΑΓΔ, ΕΗΘ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. σχ. 16.

Ας ληφθῶσι τὰ τέσσαρα διαςήματα ΓΑ, ΓΒ, ΗΕ, ΗΖ ἴσα, τὸ διάςημα ΑΒ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ διάςημα ΕΖ, καὶ εἶναι δυνατὸν ἡ γραμμὴ ΕΖ νὰ τεθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ, εἰς τρόπον ὥςε τὸ σημεῖον Ε νὰ πέσῃ εἰς τὸ Α, καὶ τὸ Ζ εἰς τὸ Β. Αἱ δύο αὗται γραμμαὶ οὕτως θεμέναι θέλουν ἐφαρμόσει· διότι, ἀλλέως, ἤθελον ὑπάρχει δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ ἀπὸ τὸ Α εἰς τὸ Β, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον ἀξ. 4. λοιπὸν τὸ σημεῖον Η μέσον τῆς ΕΖ θέλει πέσει ἐπὶ τοῦ σημείου, Γ μέσου τῆς ΑΒ. Αφ' οὗ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἡ ΗΕ ἐφαρμόσει μὲ τὴν ΓΑ, λέγω ὅτι ἡ πλευρὰ ΗΘ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ΓΔ· διότι ἂς ὑποθέσωμεν, ἐὰν ἦναι δυνατὸν, ὅτι πίπτει ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ΓΚ΄ διαφορετικῆς τῆς ΓΔ· ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, ὁρ. 10. ἡ γωνία ΕΗΘ = ΘΗΖ, πρέπει νὰ ἔχωμεν ΑΓΚ΄ = Κ΄ΓΒ. Αλλ' ἡ γωνία ΑΓΚ΄ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΑΓΔ, ἡ γωνία Κ΄ΓΒ εἶναι μικροτέρα τῆς ΒΓΔ· ἀπὸ ἄλλο μέρος, ἐξ ὑποθέσεως, ΑΓΔ = ΒΓΔ· λοιπὸν ΑΓΚ΄ εἶναι μεγαλητέρα τῆς Κ΄ΓΒ· λοιπὸν ἡ γραμμὴ ΗΘ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ πέσῃ ἐπὶ μιᾶς γραμμῆς ΓΚ΄ διαφορετικῆς τῆς ΓΔ· λοιπὸν πίπτει ἐπὶ τῆς ΓΔ, καὶ ἡ γωνία ΕΗΘ ἐπὶ τῆς ΑΓΔ· λοιπὸν ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Κάθε εὐθεῖα γραμμὴ ΓΔ, ἥτις συναπαντᾷ μίαν ἄλλην ΑΒ, κάμνει μὲ αὐτὴν δύο γωνίας προσκειμένας ΑΓΔ, ΒΓΔ, τὸ ἄθροισμά τῶν ὁποίων εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας σχ. 17.

Εἰς τὴν ςιγμὴν Γ, ἂς ὑψωθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡ κάθετος ΓΕ. Η γωνία ΑΓΔ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΓΕ, ΕΓΔ· λοιπὸν ΑΓΔ + ΒΓΔ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΒΓΔ. Η πρώτη τούτων εἶναι ὀρθή, αἱ δύο ἄλλαι κάμνουν ὁμοῦ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΒΓΕ· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ΑΓΔ, ΒΓΔ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας.

Πόρισμα Α'. Ἐὰν μία τῶν γωνιῶν ΑΓΔ, ΒΓΔ εἶναι ὀρθή, ἡ ἄλλη θέλει εἶναι παρομοίως ὀρθή.

Πόρισμα Β'. Ἐὰν ἡ γραμμὴ ΔΕ ἦναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἀντιςρόφως ΑΒ θέλει εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ. σχ. 18.

Διότι, ἐπειδὴ ΔΕ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΑΒ, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν προσκειμένην της ΔΓΒ, καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ὀρθαί. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι ὀρθή, ἕπεται ὅτι ἡ προσκειμένη της ΑΓΕ εἶναι ἐπίσης ὀρθή· λοιπὸν ἡ γωνία ΑΓΕ = ΑΓΔ, λοιπὸν ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ. σχ. 34.

Πόρισμα Γ'. Ολαι αἱ διαδοχικαὶ γωνίαι ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΕ, ΕΑΖ, αἱ σχηματιζόμεναι ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΖ, ὁμοῦ λαμβανόμεναι ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο ὀρθάς· διότι τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἴσον μὲ ἐκεῖνο τῶν δύο προσκειμένων γωνιῶν ΒΑΓ, ΓΑΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ αἵτινες ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα ἐφαρμόζουν εἰς ὅλην των τὴν ἔκτασιν, καὶ δὲν σχηματίζουν παρὰ μίαν μόνην καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν γραμμήν.

Ἔςωσαν τὰ δύο κοινὰ σημεῖα Α καὶ Β· κατὰ πρῶτον αἱ δύο γραμμαὶ δὲν πρέπει νὰ κάμνουν παρὰ μίαν μεταξὺ Α καὶ Β, διότι ἀλλέως ἤθελον εἶναι δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ ἀπὸ τὸ Α εἰς τὸ Β, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον ἀξ. 4. Ας ὑποθέσωμεν ἀκολούθως ὅτι προεκβαλλόμεναι αἱ γραμμαὶ αὗται, ἀρχίζουν νὰ χωρίζωνται εἰς τὴν ςιγμὴν Γ, καὶ ἡ μὲν διευθύνεται κατὰ τὴν ΓΔ, ἡ δὲ κατὰ τὴν ΓΕ. Ας ἄξωμεν εἰς τὴν ςιγμὴν Γ τὴν γραμμὴν ΓΖ, ὥςε νὰ κάμνῃ μὲ τὴν ΓΑ ὀρθὴν γωνίαν ΑΓΖ. Επειδὴ ἡ γραμμὴ ΑΓΔ εἶναι εὐθεῖα, ἡ γωνία ΖΓΔ εἶναι ὀρθὴ πρ. 2. πόρ. 1. ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ ΑΓΕ εἶναι εὐθεῖα, ἡ γωνία ΖΓΕ εἶναι παρομοίως γωνία ὀρθή. Αλλὰ τὸ μέρος ΖΓΕ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸ ὅλον ΖΓΔ· λοιπὸν αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ αἵτινες ἔχουν δύο σημεῖα Α καὶ Β κοινὰ δὲν ἠμποροῦν νὰ χωρισθῶσιν εἰς κἀνὲν σημεῖον τῆς προεκβολῆς των· λοιπὸν δὲν σχηματίζουν παρὰ μίαν μόνην καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν γραμμήν. σχ. 19.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εὰν δύο προσκείμεναι γωνίαι ΑΓΔ, ΔΓΒ, ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο ὀρθὰς αἱ δύο ἐξωτερικαὶ πλευραὶ ΑΓ, ΓΒ θέλουν εἶναι ἐπ' εὐθείας. σχ. 20.

Επειδὴ ἐὰν ΓΒ δὲν ἦναι ἡ προεκβολὴ τῆς ΑΓ, ἔςω ΓΕ αὕτη ἡ προεκβολή· τότε ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ ΑΓΕ εἶναι εὐθεῖα, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΓΔ, ΔΓΕ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς. πρ. 2. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΓΔ,ΔΓΒ· εἶναι ἐπίσης ἴσον μὲ δύο ὀρθάς· λοιπὸν ΑΓΔ + ΔΓΒ εἶναι ἴσον μὲ ΑΓΔ + ΔΓΕ, ἐὰν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη ἀφαιρεθῇ ἡ γωνία ΑΓΔ, μένει τὸ μέρος ΔΓΒ ἴσον μὲ τὸ ὅλον ΔΓΕ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον· λοιπὸν ΓΒ εἶναι ἡ προεκβολὴ τῆς ΑΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ὁσάκις δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ τέμνονται ὡς ΑΒ,ΔΕ, αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι. σχ. 21.

Διότι ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ ΔΕ εἶναι εὐθεῖα, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΓΔ, ΑΓΕ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθάς· καὶ ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ ΑΒ εἶναι εὐθεῖα, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΓΕ, ΒΓΕ, εἶναι ἐπίσης ἴσον μὲ δύο ὀρθάς· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα ΑΓΔ + ΑΓΕ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ΑΓΕ + ΒΓΕ. ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τὸ ἓν καὶ τὸ ἄλλο μέρος τῆς γωνίας ΑΓΕ, μένει ἡ γωνία ΑΓΔ ἴση μὲ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς ΒΓΕ.

Παρομοίως ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι ἡ γωνία ΑΓΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς ΒΓΔ.

Σχόλιον. Αἱ τέσσαρες γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι ὁλόγυρα μιᾶς στιγμῆς ἀπὸ δύο εὐθείας αἵτινες τέμνονται ἰσοδυναμοῦν μὲ τέσσαρας ὀρθάς· διότι αἱ γωνίαι ΑΓΕ, ΒΓΕ ὁμοῦ λαμβανόμεναι, κάμνουν δύο ὀρθάς, αἱ δὲ ἄλλαι δύο ΑΓΔ, ΒΓΔ ἔχουν τὴν αὐτὴν τιμήν.

Ἐὰν ὅσαι δήποτε εὐθεῖαι ΓΑ, ΓΒ, κ.τ.λ. συναπαντῶνται εἰς μίαν στιγμὴν Γ, τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν ΑΓΒ, ΒΓΔ, ΔΓΕ, ΕΓΖ, ΖΓΑ, θέλει εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρας ὀρθάς· διότι ἐὰν εἰς τὴν στιγμὴν Γ σχηματισθῶσι τέσσαρες ὀρθαὶ γωνίαι διὰ μέσου δύο εὐθειῶν καθέτων μεταξύ των, τὸ αὐτὸ χωρίον θέλει πληροῦται τόσον ἀπὸ τὰς τέσσαρας ὀρθὰς γωνίας, ὅσον ἀπὸ τὰς διαδοχικὰς γωνίας ΑΓΒ, ΒΓΔ, κ.τ.λ. σχ. 22.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα ὅταν ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ τὴν περιεχομένην ἀπὸ αὐτὰς γωνίαν ἴσην. σχ. 23.

Ἔςω ἡ πλευρὰ ΑΒ ἴση μὲ τὴν πλευρὰν ΔΕ, ἡ πλευρὰ ΑΓ ἴση μὲ τὴν πλευρὰν ΔΖ, ἡ γωνία Α ἴση μὲ τὴν γωνίαν Δ· λέγω ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ θέλουν εἶναι ἴσα.

Τῷ ὄντι τὸ ἓν τούτων τῶν τριγώνων δύναται νὰ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἄλλου ὥςε ἐντελῶς νὰ ἐφαρμόσῃ μὲ αὐτό. Καὶ κατὰ πρῶτον ἐὰν ἡ πλευρὰ ΔΕ, τεθῇ ἐπὶ τῆς ἴσης της ΑΒ, τὸ σημεῖον Δ θέλει πέσει εἰς τὸ Α, καὶ τὸ Ε εἰς τὸ Β: ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ γωνία Δ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν Α, ἀφ' οὗ ἡ πλευρὰ ΔΕ τεθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡ πλευρὰ ΔΖ θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν τῆς ΑΓ. Περιπλέον ΔΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΓ· λοιπὸν τὸ σημεῖον Ζ θέλει πέσει εἰς τὸ Γ, καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ ΕΖ θέλει ἐφαρμόσει ἀκριβῶς μὲ τὴν τρίτην πλευρὰν ΒΓ· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἀξ. 5.

Πόρισμα. Ὅταν τρία τινὰ ἦναι ἴσα εἰς δύο τρίγωνα, δηλαδὴ ἡ γωνία Α = Δ, ἡ πλευρὰ ΑΒ = ΔΕ, καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ = ΔΖ, ἠμποροῦμεν νὰ συμπεράνωμεν ὅτι καὶ τὰ ἄλλα τρία εἶναι ἴσα, δηλαδὴ, ἡ γωνία Β = Ε, ἡ γωνία Γ = Ζ, καὶ ἡ πλευρὰ ΒΓ = ΕΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ὅταν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν καὶ τὴν προσκειμένην εἰς αὐτὰς πλευρὰν ἴσην, εἶναι ἴσα τὰ τρίγωνα.

Εςω ἡ γωνία Β ἴση τῇ γωνίᾳ Ε, καὶ ἡ γωνία Γ ἴση τῇ Ζ· ἡ πλευρὰ ΒΓ ἴση τῇ πλευρᾷ ΕΖ· λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΕΖ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ σχ. 23.

Διότι, διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἐπίθεσιν (superposition), ἂς τεθῇ ἡ ΕΖ ἐπὶ τῆς ἴσης της ΒΓ, τὸ σημεῖον Ε θέλει πέσει εἰς τὸ Β, καὶ τὸ σημεῖον Ζ εἰς τὸ Γ. Επειδὴ ἡ γωνία Ε εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν Β, ἡ πλευρὰ ΕΔ θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν ΒΑ. Οὕτως τὸ σημεῖον Δ θέλει εὑρεθῇ εἰς ἓν τῶν σημείων τῆς γραμμῆς ΒΑ. Παρομοίως ἐπειδὴ ἡ γωνία Ζ εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ Γ, ἡ γραμμὴ ΖΔ θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν ΓΑ, καὶ τὸ σημεῖον Δ θέλει εὑρεθῇ εἰς ἓν τῶν σημείων τῆς πλευρᾶς ΓΑ· λοιπὸν τὸ σημεῖον Δ τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ εὑρεθῇ ἐν τυὐτῷ ἐπὶ τῶν δύο γραμμῶν ΒΑ, ΓΑ, θέλει πέσει ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς των Α. Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἐφαρμόζουσι, καὶ εἶναι ἐντελῶς ἴσα.

Π ό ρ ι σ μ α. Εκ τῆς ἰσότητος τριῶν πραγμάτων εἰς δύο τρίγωνα, τουτέςι, ΒΓ = ΕΖ, Β = Ε, Γ = Ζ, ἠμποροῦμεν νὰ συνάξωμεν τὴν ἰσότητα τῶν ἄλλων τριῶν, τουτέςι, ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ, Α = Δ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Η.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εἰς κάθε τρίγωνον ὁποιαδήποτε πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

Διότι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΒΓ, παραδείγματος χάριν, εἶναι ὁ πλέον σιμοτινὸς δρόμος ἀπὸ τὸ Β εἰς τὸ Γ ὁρ. 3. λοιπὸν ΒΓ εἶναι μικροτέρα τοῦ ΒΑ + ΑΓ.

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ι Σ Θ.

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α.

Εὰν ἐντὸς ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ληφθῇ σημεῖόν τι Ο, καὶ ἐξ αὐτοῦ ἀχθῶσιν εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς πλευρᾶς

ΒΓ, αἱ εὐθεῖαι ΟΒ, ΟΓ, τὸ ἄθροισμα τούτων τῶν εὐθειῶν θέλει εἶναι μικρότερον ἐκείνου τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ΑΒ, ΑΓ.

Ἂς προεκβληθῇ ἡ ΒΟ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν πλευρὰν ΑΓ εἰς Δ. Η εὐθεῖα γραμμὴ ΟΓ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ΟΔ + ΔΓ. πρό. 8. προσθέτοντες καὶ εἰς τὰ δύο μέρη ΒΟ, ἔχομεν $ΒΟ + ΟΓ < ΒΟ + ΟΔ + ΔΓ$ ἢ $ΒΟ + ΟΓ < ΒΔ + ΔΓ$.

Ἔχομεν παρομοίως $ΒΔ < ΒΑ + ΑΔ$· προσθέτοντες καὶ εἰς τὰ δύο μέρη ΔΓ συνάγομεν $ΒΔ + ΔΓ < ΒΑ + ΑΓ$. Ἀλλ' εὑρήκαμεν $ΒΟ + ΟΓ < ΒΔ + ΔΓ$. Λοιπὸν, πολὺ περισσότερον $ΒΟ + ΟΓ < ΒΑ + ΑΓ$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν αἱ δύο πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἦναι ἴσαι μὲ τὰς δύο πλευρὰς ΔΕ, ΔΖ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ, ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν· ἐὰν εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἡ γωνία ΒΑΓ περιεχομένη ἀπὸ τὰς πρώτας, ἦναι μεγαλητέρα τῆς γωνίας ΕΔΖ, περιεχομένη ἀπὸ τὰς δευτέρας· λέγω ὅτι ἡ τρίτη πλευρὰ ΒΓ τοῦ πρώτου τριγώνου θέλει εἶναι μεγαλητέρα τῆς τρίτης ΕΖ τοῦ δευτέρου. σχ. 25.

Ἂς γένῃ ἡ γωνία $ΓΑΗ = Δ$, ἂς ληφθῇ $ΑΗ = ΔΕ$, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ΓΗ, τὸ τρίγωνον ΗΑΓ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, ἐπειδὴ ἔχουν ἐκ τῆς κατασκευῆς μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων προ. 6. ἔχομεν λοιπὸν $ΓΗ = ΕΖ$. Τώρα δυνατὸν νὰ ἀκολουθήσουν τρεῖς περιστάσεις, καθὼς τὸ σημεῖον Η πέσῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἢ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ· ἢ ἐντὸς τοῦ ἰδίου τριγώνου.

Πρώτη περίστασις. Η εὐθεῖα γραμμὴ ΗΓ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ΗΙ + ΙΓ, ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΒ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ΑΙ + ΙΒ· λοιπὸν ΗΓ + ΑΒ εἶναι μικρότερον τοῦ ΗΙ + ΑΙ + ΙΓ + ΙΒ ἢ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, ΗΓ + ΑΒ < ΑΗ + ΒΓ. Ἐὰν ἀπὸ τὸ ἓν μέρος ἀφαιρεθῇ ΑΒ, καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο ἡ ἴση της ΑΗ, μένει. ΗΓ < ΒΓ: ἀλλὰ ΗΓ = ΕΖ. Λοιπὸν θέλομεν ἔχει ΕΖ < ΒΓ. σχ. 25.

Δευτέρα περίστασις. Ἐὰν τὸ σημεῖον Η πέσῃ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, φανερὸν εἶναι ὅτι ΗΓ ἢ ἡ ἴση της ΕΖ θέλει εἶναι μικροτέρα τῆς ΒΓ. σχ. 26.

Τρίτη περίστασις. Τέλος ἐὰν τὸ σημεῖον Η πέσῃ ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θέλομεν ἔχει, κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα, ΑΗ + ΗΓ < ΑΒ + ΒΓ· ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τὸ ἓν μέρος τῆς ΑΗ, καὶ ἀπὸ ἄλλο τῆς ἴσης της ΑΒ, μένει ΗΓ < ΒΓ, ἢ ΕΖ < ΒΓ σχ. 27.

Σχόλιον. Ἀντιστρόφως, ἐὰν αἱ δύο πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἦναι ἴσαι μὲ τὰς δύο πλευρὰς ΔΕ, ΔΖ, τοῦ τριγώνου ΔΕΖ· ἐὰν, περιπλέον, ἡ τρίτη πλευρὰ ΓΒ τοῦ πρώτου τριγώνου ἦναι μεγαλητέρα τῆς τρίτης ΕΖ τοῦ δευτέρου, λέγω ὅτι ἡ γωνία ΒΑΓ τοῦ πρώτου τριγώνου θέλει εἶναι μεγαλητέρα τῆς γωνίας ΕΔΖ τοῦ δευτέρου.

Διότι ἐὰν δὲν ἦναι μεγαλητέρα ἡ γωνία ΒΑΓ τῆς ΕΔΖ, πρέπει νὰ ἦναι ἴση ἢ μικροτέρα: ἐὰν τὸ πρῶτον, ἡ πλευρὰ ΓΒ ἤθελεν εἶναι ἴση τῇ ΕΖ πρ. 6. ἐὰν τὸ δεύτερον, ΓΒ ἤθελεν εἶναι μικροτέρα τῆς ΕΖ· ἀλλὰ καὶ τὰ δύο ἐναντιόνονται εἰς τὴν ὑπόθεσιν· λοιπὸν ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΕΔΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν.

Ἔςω ἡ πλευρὰ ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ, ΒΓ = ΕΖ· λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν γωνίαν Α = Δ, Β = Ε, Γ = Ζ. σχ. 23.

Διότι ἐὰν ἡ γωνία Α ἦτον μεγαλητέρα τῆς γωνίας Δ, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, εἶναι ἴσαι μὲ τὰς πλευρὰς ΔΕ, ΔΖ, ἡ κάθε μία μὲ τὴν καθε μίαν, ἤθελεν ἀκολουθήσει, κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα, ὅτι ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΕΖ· ἐὰν δὲ ἡ γωνία Α ἦτον μικροτέρα τῆς γωνίας Δ, ἤθελεν ἀκολουθήσει ὅτι ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι μικροτέρα τῆς ΕΖ· ἀλλὰ ΒΓ εἶναι ἴση τῇ ΕΖ· λοιπὸν ἡ γωνία Α δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἦναι οὔτε μεγαλητέρα οὔτε μικροτέρα τῆς γωνίας Δ· λοιπὸν εἶναι ἴση μὲ αὐτήν· Παρομοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ γωνία Β = Ε, καὶ ἡ γωνία Γ = Ζ.

Σχόλιον. Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἴσαι γωνίαι εἶναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν: οὕτως αἱ ἴσαι γωνίαι Α καὶ Δ εἶναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν ΒΓ, ΕΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ′.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον, αἱ ἀπέναντι γωνίαι τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι ἴσαι.

Ἔςω ἡ πλευρὰ ΑΒ = ΑΓ, λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν γωνίαν Γ = Β. σχ. 28.

Ἂς ἀχθῇ ἡ γραμμὴ ΑΔ ἐκ τῆς κορυφῆς Α εἰς τὴν ςιγμὴν Δ μέσον τῆς βάσεως ΒΓ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ, θέλουν ἔχει τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας τὴν καθε μίαν μὲ τὴν καθε μίαν· τουτέςι ΑΔ κοινήν, ΑΒ = ΑΓ ἐξ ὑποθέσεως, καὶ ΒΔ = ΔΓ ἐκ τῆς κατασκευῆς· λοιπόν, κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα, ἡ γωνία Β εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν Γ.

Πόρισμα. Ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι ἐν ταὐτῷ καὶ ἰσογώνιον, δηλαδή, ἔχει τὰς γωνίας του ἴσας.

Σχόλιον. Η ἰσότης τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΔ δεικνύει εἰς τὸ αὐτὸν καιρὸν ὅτι ἡ γωνία ΒΑΔ = ΔΑΓ, καὶ ἡ γωνία ΒΔΑ = ΑΔΓ· λοιπὸν αἱ δύο αὗται τελευταῖαι εἶναι ὀρθαί· λοιπὸν ἡ ἀγομένη γραμμὴ ἐκ τῆς κορυφῆς ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεώς του, εἶναι κάθετος εἰς ταύτην τὴν βάσιν, καὶ διαιρεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς εἰς δύο ἴσα μέρη.

Εἰς ἓν τρίγωνον μὴ ἰσοσκελὲς ἀδιαφόρως λαμβάνεται ὡς βάσις ὁποιαδήποτε πλευρὰ, καὶ τότε ἡ κορυφή του εἶναι ἐκείνη τῆς ἀπέναντι γωνίας· εἰς τὸ ἰσοσκελὲς ὅμως τρίγωνον λαμβάνεται ὡς βάσις ἡ πλευρὰ ἥτις δὲν εἶναι ἴση μὲ μίαν τῶν ἄλλων δύο.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ΄.

Αντιςρόφως ἐὰν δύο γωνίαι εἰς ἓν τρίγωνον ἦναι ἴσαι, αἱ ἀπέναντι πλευραὶ θέλουν εἶναι ἴσαι, καὶ τὸ τρίγωνον θέλει εἶναι ἰσοσκελές.

Εςω ἡ γωνία ΑΒΓ = ΑΓΒ· λέγω ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΓ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒ. σχ. 29.

Διότι ἐὰν αἱ πλευραὶ αὗται δὲν ἦναι ἴσαι, ἔςω ΑΒ ἡ μεγαλητέρα τῶν δύο. Ας ληφθῇ ΒΔ = ΑΓ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ΔΓ· ἡ γωνία ΔΒΓ εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ἴση τῇ ΑΓΒ· αἱ δύο πλευραὶ ΔΒ, ΒΓ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς δύο ΑΓ, ΓΒ· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΔΒΓ προ. 6. ἤθελεν εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΓΒ· ἀλλὰ τὸ μέρος δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ὅλον· λοιπὸν δὲν ὑπάρχει οὐδεμία ἀνισότης μεταξὺ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εκ δύο πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου, ἐκείνη εἶναι ἡ μεγαλητέρα ἥτις εἶναι ἀπέναντι τῆς μεγαλητέρας γωνίας, καὶ ἀντιςρόφως, ἐκ δύο γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου ἡ μεγαλητέρα εἶναι ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλητέρας πλευρᾶς.

1.ον Εςω ἡ γωνία Γ > Β, λέγω ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΒ ἀπέναντι τῆς γωνίας Γ εἶναι μεγαλητέρα τῆς πλευρᾶς ΑΓ ἀπέναντι τῆς γωνίας Β. σχ. 30.

Ας γένῃ ἡ γωνία ΒΓΔ = Β. Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΔΓ ἔχομεν πρ. 13. ΒΔ = ΔΓ. ἀλλ' ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΓ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ΑΔ + ΔΓ; καὶ ΑΔ + ΔΓ = ΑΔ + ΔΒ = ΑΒ· λοιπὸν ΑΒ εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΑΓ.

2.ον Εςω ἡ πλευρὰ ΑΒ > ΑΓ, λέγω ὅτι ἡ γωνία Γ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς ΑΒ θέλει εἶναι μεγαλητέρα τῆς γωνίας Β ἀπέναντι τῆς ΑΓ. Διότι ἐὰν εἴχαμεν Γ < Β, ἤθελεν ἀκολουθήσει, ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων, ΑΒ < ΑΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Ἐὰν δὲ Γ = Β, ἠθέλαμεν ἔχει πρ. 13. ΑΒ = ΑΓ, τὸ ὁποῖον ἀκόμη ἐναντιοῦται εἰς τὴν ὑπόθεσιν· λοιπὸν ἡ γωνία Γ πρέπει νὰ ἦναι μείζων τῆς Β.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐξ ἑνὸς δεδομένου σημείου Α ἐκτὸς μιᾶς εὐθείας ΔΕ, μία μόνη κάθετος εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῇ εἰς ταύτην τὴν εὐθεῖαν. σχ. 31.

Διότι ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῶσι δύο ΑΒ καὶ ΑΓ· ἄς προεκβάλλωμεν μίαν τούτων τὴν ΑΒ ποσότητά τινα ΒΖ = ΑΒ, καὶ ἄς ἐπιζεύξωμεν ΖΓ.

Τὸ τρίγωνον ΓΒΖ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ: ἐπειδὴ ἡ γωνία ΓΒΖ εἶναι ὀρθὴ καθὼς καὶ ἡ ΓΒΑ, ἡ πλευρὰ ΓΒ εἶναι κοινή, ἡ δὲ ΒΖ = ΑΒ· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα πρ. 6. καὶ ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ΒΓΖ = ΒΓΑ. Η γωνία ΒΓΑ εἶναι ὀρθὴ ἐξ ὑποθέσεως· λοιπὸν ἡ γωνία ΒΓΖ εἶναι ἐπίσης ὀρθή. Αλλ' ἐὰν αἱ