ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς κάθε σφαιρικὸν ἰσοσκελὲς τρίγωνον αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίαι εἶναι ἴσαι· καὶ ἀντιςρόφως, ἐὰν δύο γωνίαι ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ἦναι ἴσαι, τὸ τρίγωνον θέλει εἶναι ἰσοσκελές.

1.ον Εςω ἡ πλευρὰ ΑΒ=ΑΓ· λέγω ὅτι θέλει εἶναι ἡ γωνία Γ=Β: διότι, ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἀχθῇ εἰς τὴν ςιγμὴν Δ, μέσον τῆς βάσεως, τὸ τόξον ΑΔ, τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ, θέλουν ἔχει τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν· τουτέςι, ΑΔ κοινὴν, ΒΔ=ΔΓ, καὶ ΑΒ=ΑΓ: λοιπὸν, κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα, τὰ τρίγωνα ταῦτα θέλουν ἔχει τὰς γωνίας ἴσας, καί θέλει εἶναι Β=Γ. σχ. 231.

2.ον Εςω ἡ γωνία Β=Γ· λέγω ὅτι θέλει εἶναι ΑΓ=ΑΒ: διότι ἐὰν ἡ πλευρὰ ΑΒ δὲν ἦναι ἴση τῇ ΑΓ, ἔςω ΑΒ ἡ μεγαλητέρα τῶν δύο, ἄς ληφθῇ ΒΟ=ΑΓ, καὶ ἄς ἐπιζευχθῇ ΟΓ. Αἱ δύο πλευραὶ ΒΟ, ΒΓ, εἶναι ἴσαι μὲ τὰς δύο ΑΓ, ΒΓ· ἡ περιεχομένη γωνία ΟΒΓ ἀπὸ τὰς πρώτας εἶναι ἴση μὲ τὴν περιεχομένην ἀπὸ τὰς δευτέρας ΑΓΒ. Λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΒΟΓ, ΑΓΒ, ἔχουν καὶ τὰ ἄλλα των μέρη ἴσα (πρό. 21), ἑπομένως ἡ γωνία ΟΓΒ=ΑΒΓ: ἀλλὰ, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ γωνία ΑΒΓ=ΑΓΒ· λοιπὸν ἤθελεν εἶναι ΟΓΒ=ΑΓΒ, ὅπερ ἀδύνατον· ἀδύνατον λοιπὸν νὰ ὑποτεθῇ ἡ ΑΒ διαφορετικὴ τῆς ΑΒ· αἱ πλευραὶ ἄρα ΑΒ, ΑΓ, ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν Β καὶ Γ, εἶναι ἴσαι.

Σχόλιον. Η αὐτὴ ἀπόδειξις δεικνύει ὅτι ἡ γωνία ΒΑΔ=ΔΑΓ, καὶ ἡ γωνία ΒΔΑ=ΑΔΓ· λοιπὸν αἱ δύο αὗται τελευταῖαι εἶναι ὀρθαί· ἄρα τὸ ἀγόμενον τόξον ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἑνὸς ἰσοσκέλοῦς σφαιρικοῦ τριγώνου εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεώς του εἶναι κάθετον εἰς ταύτην τὴν βάσιν, καὶ τέμνει δίχα τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙϚ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἐὰν ἡ γωνία Α ἦναι μείζων τῆς γωνίας Β, ἡ πλευρὰ ΒΓ ἀπέναντι τῆς γωνίας Α θέλει εἶναι μείζων τῆς πλευρᾶς ΑΓ ἀπέναντι τῆς γωνίας Β· ἀντιστρόφως, ἐὰν ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶααι μείζων τῆς ΓΑ, ἡ γωνία Α θέλει εἶναι μείζων τῆς γωνίας Β. σχ. 232.

1.ον Ἔστω ἡ γωνία Α > Β, ἂς γίνῃ ἡ γωνία ΒΑΔ = Β, θέλει εἶναι ΑΔ = ΔΒ (πρό. 15): ἀλλὰ ΑΔ + ΔΓ εἶναι μεῖζον ἀπὸ ΑΓ· ἀντὶ τῆς ΑΔ τεθείσης τῆς ΔΒ, θέλει εἶναι ΔΒ + ΔΓ ἢ ΒΓ > ΑΓ.

2.ον Ὑποτεθείσης τῆς ΒΓ > ΑΓ, λέγω ὅτι θέλει εἶναι ἡ γωνία ΒΑΓ μείζων τῆς ΑΒΓ: διότι, ἐὰν ΒΑΓ ἦτον ἴση μὲ ΑΒΓ, ἤθελεν εἶναι ΒΓ = ΑΓ· ἐὰν δὲ ΒΑΓ < ΑΒΓ, κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα, ἤθελεν εἶναι ΒΓ < ΑΓ· ὅπερ ἐναντιοῦται εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Λοιπὸν ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι μείζων τῆς ΑΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν αἱ δύο πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἦναι ἴσαι μὲ τὰς δύο πλευρὰς ΔΕ, ΔΖ, τοῦ τριγώνου ΔΕΖ ἐπὶ μιᾶς ἴσης σφαίρας χαραγμένου, ἐὰν εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἡ γωνία Α ἦναι μείζων τῆς γωνίας Δ, λέγω ὅτι ἡ τρίτη πλευρὰ ΒΓ τοῦ πρώτου τριγώνου θέλει εἶναι μείζων τῆς τρίτης ΕΖ τοῦ δευτέρου. σχ. 233.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι κατὰ πάντα ὁμοία μὲ τὴν τῆς προτάσεως Ι', βιβλ. Α'.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εάν δύο τρίγωνα επί της αυτής σφαίρας ή επί ίσων σφαιρών χαραγμένα ήναι ισογώνια μεταξύ των, θέλουν είναι και ισόπλευρα.

Εςωσαν Α και Β τα δύο δεδομένα τρίγωνα, Π και Κ τα πολικά των· επειδή αι γωνίαι των τριγώνων Α και Β είναι ίσαι, αι πλευραί των πολικών Π και Κ θέλουν είναι ίσαι (πρό 10): αλλ' εκ του ότι τα τρίγωνα Π και Κ είναι ισόπλευρα μεταξύ των, έπεται ότι είναι και ισογώνια (πρό. 14)· τέλος, εκ του ότι αι γωνίαι των τριγώνων Π και Κ είναι ίσαι, έπεται (πρό. 10) ότι αι πλευραί των πολικών Α και Β είναι ίσαι. Λοιπόν τα ισογώνια τρίγωνα Α και Β είναι εις τον αυτόν καιρόν και ισόπλευρα μεταξύ των.

Ημπορούμεν ακόμη να αποδείξωμεν την αυτήν πρότασιν χωρίς να συνδράμωμεν εις τα πολικά τρίγωνα κατά τον ακόλουθον τρόπον.

Εςωσαν ΑΒΓ, ΔΕΖ, δύο τρίγωνα ισογώνια μεταξύ των, εις τρόπον ώςε Α=Δ, Β=Ε, Γ=Ζ· λέγω ότι θέλει είναι η πλευρά ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ, ΒΓ=ΕΖ. σχ. 234.

Επί της προεκβολής των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ας ληφθή ΑΗ=ΔΕ, και ΑΘ=ΔΖ· ας επιζευχθή ΗΘ και ας προεκβληθώσι τα τόξα ΒΓ, ΗΘ, έως ού να συναπαντηθώσιν εις Ι και Κ'.

Αί δύο πλευραί ΑΗ, ΑΘ, είναι, εκ της κατασκευής ίσαι με τας δύο ΔΖ, ΔΕ· η περιεχομένη γωνία ΗΑΘ= ΒΑΓ=ΕΔΖ· λοιπόν (πρό. 12) τα τρίγωνα ΑΗΘ, ΔΕΖ, είναι ίσα καθ' όλα των τα μέρη, λοιπόν η γωνία ΑΗΘ= ΔΕΖ=ΑΒΓ, και η γωνία ΑΘΗ=ΔΖΕ=ΑΓΒ.

Εις τα τρίγωνα ΙΒΗ, Κ'ΒΗ, η πλευρά ΒΗ είναι κοινή, η γωνία ΙΗΒ=ΗΒΚ'· και επειδή ΙΗΒ+ΒΗΚ' ισούται μὲ δύο ὀρθὰς, καθὼς καὶ $HBK' + IBH$, ἕπεται ὅτι $BHK' = IBH$. Λοιπὸν τὰ τρίγωνα IBH, HBK', εἶναι ἴσα (πρό. 13)· ἄρα $IH = BK'$, καὶ $IB = HK'$.

Παρομοίως, ἐπειδὴ ἡ γωνία $A\Theta H = A\Gamma B$, συμπεραίνομεν ὅτι τὰ τρίγωνα $I\Gamma\Theta$, $\Theta\Gamma K'$, ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην προσκειμένην εἰς δύο γωνίας ἴσας· λοιπὸν εἶναι ἴσα· ἄρα $I\Theta = \Gamma K'$, καὶ $\Theta K' = I\Gamma$.

Τώρα, ἐὰν ἐκ τῶν ἴσων BK', IH, ἀφαιρεθῶσι τὰ ἴσα $\Gamma K'$, $I\Theta$, τὰ ὑπόλοιπα $B\Gamma$, $H\Theta$, θέλουν εἶναι ἴσα. Ἄλλως ἡ γωνία $B\Gamma A = A\Theta H$, καὶ ἡ γωνία $AB\Gamma = AH\Theta$. Λοιπὸν τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Theta H$, ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην προσκειμένην εἰς δύο γωνίας ἴσας· λοιπὸν εἶναι ἴσα: ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΔEZ εἶναι ἴσον καθ' ὅλά του τὰ μέρη μὲ τὸ τρίγωνον $A\Theta H$· λοιπὸν εἶναι ἴσον καὶ μὲ τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$, καὶ θέλει εἶναι $AB = \Delta E$, $A\Gamma = \Delta Z$, $B\Gamma = EZ$· ἄρα, ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα ἦναι ἰσογώνια μεταξύ των, αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἰς τὰς ἴσας γωνίας θέλουν εἶναι ἴσαι.

Σχόλιον. Η πρότασις αὕτη δὲν ὑπάρχει εἰς τὰ εὐθύγραμμα τρίγωνα, ὅπου ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν ἄλλό τι δὲν συνάγεται παρὰ ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν. Ἀλλ' εὔκολον εἶναι νὰ δώσωμεν λόγον τῆς τοιαύτης διαφορᾶς ἥτις κατὰ τοῦτο ὑπάρχει μεταξὺ τῶν εὐθυγράμμων καὶ σφαιρικῶν τριγώνων. Εἰς τὴν παροῦσαν πρότασιν, καθὼς καὶ εἰς τὰς προτάσεις ΙΒ', ΙΓ', ΙΔ' καὶ ΙΖ', εἰς τὰς ὁποίας γίνεται λόγος περὶ τῆς συγκρίσεως τῶν τριγώνων, λέγομεν ἐκφραστικῶς (expressement) ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι χαραγμένα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν. Τώρα τὰ ὅμοια τόξα εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀκτίνων· λοιπὸν ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν, δύο τρίγωνα δὲν ἠμποροῦν νὰ ἦναι ὅμοια χωρὶς νὰ ἦναι ἴσα. Δὲν εἶναι λοιπὸν θαυμαστὸν ὅτι ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν συνεπιφέρει τὴν ἰσότητα τῶν πλευρῶν.

Δὲν ἤθελεν εἶναι τὸ αὐτὸ ἐὰν τὰ τρίγωνα ἦσαν χαραγμέ-
να ἐπὶ ἀνίσων σφαιρῶν. Τότε διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν
τὰ τρίγωνα ἤθελον εἶναι ὅμοια, καὶ αἱ ὁμόλογοι πλευρα
ἤθελον εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν. (1)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

ΘΕΩ'ΡΗΜΑ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κάθε σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικρότερον ἀπὸ ἓξ καὶ μεγαλήτερον ἀπὸ τέσσαρας ὀρθάς.

Διότι 1.ον κάθε γωνία ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικροτέρα ἀπὸ δύο ὀρθὰς (βλέπε τὸ ἑξῆς σχόλιον); λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι μικρότερον ἀπὸ ἓξ ὀρθάς.

---

(1) Εἰς τὴν ΚΓ' πρότασιν τοῦ ε' βιβλίου ἀπεδείχθη ὅτι ἐὰν δύ[ο] ςερεαὶ γωνίαι σύγκηνται ἀπὸ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας ἴσας τὴν κάθ[ε] μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, αἱ κλίσεις τῶν ἐπιπέδων εἰς τὰ ὁποῖα εὑρί-σκονται αἱ ἴσαι γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Τώρα εἶναι ἀληθὴ[ς] καὶ ἡ ἀντίςροφος· δηλαδὴ, ἐὰν τὰ ἐπίπεδα δύο τριέδρων ςερεῶν γω-νιῶν ἰσάκις κλίνουν μεταξύ των, αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ὁποῖαι εὑρί-σκονται εἰς τὰς ἐπίπεδα τῶν ὁποίων ἡ κλίσις εἶναι ἴση εἰς τὰς δύ[ο] ςερεὰς γωνίας, θέλουν εἶναι παρεμοίως ἴσαι (βλέπε διὰ τὴν ἀπόδειξι[ν] τῆς ἀντιςρόφου ταύτης προτάσεως les reciproques de la Geo-metrie par M. Garnier)· τούτου τεθέντος, ὅταν δύο τρίγωνα ἐπ[ὶ] τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν ἦναι ἰσογώνια, ὅταν δη-λαδὴ αἱ κλίσεις τῶν ἐπιπέδων ἢ τῶν ἑδρῶν τῶν πυραμίδων τῶν ὁποί-ων βάσεις εἶναι τὰ παραβαλλόμενα τρίγωνα ἦναι ἴσαι ἡ κάθε μί[α] μὲ τὴν κάθε μίαν, τότε αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ὁποῖαι σχηματίζου[ν] τὴν πρώτην ςερεὰν γωνίαν εἶναι ἴσαι μὲ τὰς ἐπιπέδους γωνίας α[ἱ] ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν δευτέραν ςερεὰν γωνίαν· καὶ ἐπειδὴ αἱ ἐπί-πεδοι γωνίαι ἦναι ἴσαι, ἀκολουθεῖ ὅτι τὰ τόξα τὰ ὁποῖα μετροῦ[ν] ταύτας τὰς γωνίας ἢ αἱ πλευραὶ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων εἶναι ἴσα τὸ κάθε ἓν μὲ τὸ κάθε ἕν, ὅταν ἦναι χαραγμένα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαί-ρας ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν· ἀνάλογα δὲ τῶν ἀκτίνων ὅταν ἦναι χαρα-γμένα ἐπὶ ἀνίσων σφαιρῶν· διότι τότε μετροῦντα γωνίας εἰς τὸ κέν-τρον ἴσας εἶναι ὅμοια, καὶ τὰ ὅμοια τόξα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ ἀκτῖνες Ο. Μ.

2.ον Τὸ μέτρον κάθε γωνίας ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἡμιπεριφέρειαν μεῖον ἡ ἀντιςοιχοῦσα πλευρὰ τοῦ πολικοῦ τριγώνου (πρό. 10)· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ἔχει μέτρον τρεῖς ἡμιπεριφερείας μεῖον τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ πολικοῦ τριγώνου. Τώρα τὸ τελευταῖον τοῦτο ἄθροισμα εἶναι μικρότερον περιφερείας (πρό. 4)· λοιπὸν, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὸ τοιοῦτον ἄθροισμα ἀπὸ τρεῖς ἡμιπεριφερείας, ἐπειδὴ ἀφαιροῦμεν ποσότητα μικροτέραν περιφερείας, τὸ ὑπόλοιπον θέλει εἶναι μεῖζον ἡμιπεριφερείας, ἥτις εἶναι τὸ μέτρον δύο ὀρθῶν γωνιῶν· λοιπὸν 2.ον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μεῖζον δύο ὀρθῶν.

Πόρισμα Α΄. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου δὲν εἶναι ςαθερὸν ὡς τὸ τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων· ἀλλὰ μεταβάλλεται ἀπὸ δύο ὀρθὰς γωνίας ἕως ἕξ, χωρὶς οὔτε μὲ τὸ ἓν οὔτε μὲ τὸ ἄλλο ὅριον νὰ ἠμπορῇ νὰ γένῃ ἴσον. Οὕτω δύο γωνίαι δεδομέναι δὲν κάμνουν γνωςὴν τὴν τρίτην.

Πόρισμα Β΄. Τρίγωνον σφαιρικὸν ἠμορεῖ νὰ ἔχῃ δύο ἢ τρεῖς ὀρθὰς γωνίας, δύο ἢ τρεῖς ἀμβλείας.

Ἐὰν τὸ τρίγωνον ἦναι δισσορθογώνιον, τουτέςιν ἔχῃ δύο τῶν γωνιῶν του Β καὶ Γ ὀρθὰς, ἡ κορυφὴ Α θέλει εἶναι ὁ πόλος τῆς βάσεως ΒΓ (πρό. 6)· καὶ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, θέλουν εἶναι τεταρτημόρια. σχ. 235.

Ἐὰν δὲ καὶ ἡ γωνία Α ἦναι ὀρθὴ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θέλει εἶναι τρισσορθογώνιον, ὅλαι του αἱ γωνίαι θέλουν εἶναι ὀρθαὶ καὶ αἱ πλευραί του τεταρτημόρια. Τὸ τρισσορθογώνιον τρίγωνον περιέχεται ὀκτὼ φοραῖς εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας· τοῦτο γίνεται φανερὸν ἀπὸ τὸ σχῆμα 236, ὑποτιθεμένου τοῦ τόξου ΜΝ ἴσου μὲ τεταρτημόριον.

Σχόλιον. Εἰς τὰ προηγούμενα, συμφώνως μὲ τὸν ς΄ ὁρισμὸν, ὑποθέσαμεν ὅτι τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα ἔχουν πάν-

τοτε τὰς πλευρὰς των μικροτέρας τῆς ἡμιπεριφερείας· τό
ἕπεται ὅτι αἱ γωνίαι εἶναι πάντοτε μικρότεραι δύο ὀρθῶ
διότι, ἐὰν ἡ πλευρὰ ΑΒ ἦναι μικροτέρα τῆς ἡμιπεριφε
ρείας, καθὼς καὶ ἡ ΑΓ, τὰ τόξα ταῦτα πρέπει νὰ προεκ
βληθοῦν καὶ τὰ δύο διὰ νὰ συναπαντηθοῦν εἰς Δ. Τώρ
αἱ δύο γωνίαι ΑΒΓ, ΓΒΔ, ὁμοῦ ληφθεῖσαι, κάμνουν δύ
ὀρθάς· λοιπὸν ἡ γωνία ΑΒΓ μόνη της εἶναι μικροτέρ
δύο ὀρθῶν. σχ. 224.

Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι ὑπάρχουν σφαιρικὰ τρίγωνα
τῶν ὁποίων μερικαὶ πλευραὶ εἶναι μεγαλήτεραι τῆς ἡμι
περιφερείας, καὶ μερικαὶ γωνίαι μεγαλήτεραι δύο ὀρθῶν
διότι ἐὰν προεκβληθῇ ἡ πλευρὰ ΑΓ ἀκεραίαν περιφέρεια
ΑΓΕ, ὅ,τι μένει, ἀφ' οὗ ἀπὸ τὸ ἡμισφαίριον ἀφαιρεθῇ
τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, εἶναι νέον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἡμπορε
νὰ σημειωθῇ ὡσαύτως διὰ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ὁποίου αἱ πλευρα
εἶναι ΑΒ, ΒΓ, ΑΕΔΓ. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι ἡ πλευρὰ
ΑΕΔΓ εἶναι μείζων τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΕΔ· ἀλλ' εἰς τὸν
αὐτὸν καιρὸν ἡ εἰς Β ἀπέναντι γωνία ὑπερέχει δύο ὀρθὰς
κατὰ τὴν ποσότητα ΓΒΔ.

Ο λόγος δὲ διὰ τὸν ὁποῖον ἀπεκλείσαμεν ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τὰ τρίγωνα τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι εἶναι τοιούτου μεγέθους, εἶναι ὅτι ἡ λύσις των ἢ ἡ προσδιόρισις τῶν μερῶν των ἀνάγεται πάντοτε εἰς τὴν λύσιν τῶν τριγώνων τὰ ὁποῖα περικλείονται εἰς τὸν ὁρισμόν. Τῷ ὄντι βλέπομεν εὐκόλως ὅτι ἐὰν αἱ γωνίαι καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἦναι γνωσταί, ἀμέσως γίνονται γνωσταὶ αἱ γωνίαι καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου τοῦ ἰδίου ὀνόματος τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἡμισφαιρίου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ο ἄτρακτος ΑΜΒΝΑ εἶναι πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ὡς ἡ γωνία ΜΑΝ τούτου τοῦ ἀτράκτου εἶναι πρὸς τέσσαρας ὀρθὰς, ἢ ὡς τὸ τόξον ΜΝ μέτρον ταύτης τῆς γωνίας πρὸς τὴν περιφέρειαν. σχ. 236.

Ας ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι τὸ τόξον ΜΝ εἶναι πρὸς τὴν περιφέρειαν ΜΝΠΚ εἰς λόγον συμμετρικὸν, φερ' εἰπεῖν, ὡς 5 πρὸς 48. Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν ΜΝΠΚ εἰς 48 ἴσα μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων ΜΝ θέλει περιέχει 5· ἑνόνοντες ἔπειτα τὸν πόλον Α καὶ τὰ σημεῖα τῆ διαιρέσεως διὰ τεταρτημορίων περιφερείας, θέλομεν ἔχει 48 τρίγωνα εἰς τὸ ἡμισφαίριον ΑΜΝΠΚ, τὰ ὁποῖα θέλουν εἶναι ἴσα μεταξύ των, ὡς ἔχοντα ὅλά των τὰ μέρη ἴσα. Η ὅλη σφαῖρα θέλει περιέχει λοιπὸν 96 τοιαῦτα μερικὰ τρίγωνα, ὁ δὲ ἄτρακτος ΑΜΒΝΑ 10· λοιπὸν ὁ ἄτρακτος εἶναι πρὸς τὴν σφαῖραν ὡς 10 πρὸς 96, ἢ ὡς 5 πρὸς 48, τουτέστιν ὡς τὸ τόξον ΜΝ πρὸς τὴν περιφέρειαν.

Εὰν τὸ τόξον ΜΝ δὲν ἦναι συμμετρικὸν μὲ τὴν περιφέρειαν, διὰ τοῦ αὐτοῦ συλλογισμοῦ τοῦ ὁποίου ἤδη εἴδομεν πολλὰ παραδείγματα, ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι ὁ ἄτρακτος εἶναι πάντοτε πρὸς τὴν σφαῖραν ὡς τὸ τόξον ΜΝ πρὸς τὴν περιφέρειαν.

Πόρισμα Α'. Δύο ἄτρακτοι εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ ἰδικαί των γωνίαι.

Πόρισμα Β'. Εἴδομεν ἤδη ὅτι ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἰσοῦται μὲ ὀκτὼ τρισσορθογώνια τρίγωνα (πρό. 19)· ἐὰν λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τούτων τῶν τριγώνων ληφθῇ ὡς μονὰς, ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας θέλει παῤῥησιασθῇ διὰ 8. Τούτου τεθέντος, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἀτράκτου τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι Α θέλει ἐκφρασθῇ διὰ 2Α (ἐννοουμένου ὅμως ὅτι ἡ γωνία Α ἐκτιμᾶται ἐπὶ τῆς ὀρθῆς λαμβανομένης ὡς μονάδος)· διότι ἔχομεν 2Α : 8 : : Α : 4. Εδῶ λοιπὸν εἶναι δύο διαφορετικαὶ μονάδες· ἡ μία διὰ τὰς γωνίας, καὶ εἶναι ἡ ὀρθή· ἡ ἄλλη διὰ τὰς ἐπιφανείας, καὶ εἶναι τὸ τρισσορθογώνιον τρίγωνον, ἢ τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθαὶ, καὶ αἱ πλευραὶ τεταρτημόρια περιφερείας.

Σχόλιον. Ὁ σφαιρικὸς ὄνυξ ὁ περιεχόμενος ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων AMB, ANB, εἶναι πρὸς τὸ ὅλον ϛερεὸν τῆς σφαίρας ὡς ἡ γωνία A πρὸς τέσσαρας ὀρθάς· διότι ὅταν οἱ ἄτρακτοι ἦναι ἴσοι, οἱ σφαιρικοὶ ὄνυχες εἶναι παρομοίως ἴσοι: λοιπὸν δύο σφαιρικοὶ ὄνυχες εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα ὁποῦ τοὺς περιέχουν. (1)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο σφαιρικὰ συμμετρικὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Εϛωσαν ΑΒΓ, ΔΕΖ δύο συμμετρικὰ τρίγωνα, τουτέϛι δύο τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς πλευρὰς ἴσας, AB = ΔE,

(1) Ἡ αὐτὴ ἀναλογία ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ ἀτράκτου καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ σφαιρικοῦ ὄνυχος καὶ τοῦ ϛερεοῦ τῆς σφαίρας· διότι ἐν ᾧ, ὑποτιθεμένου τοῦ λόγου τοῦ τόξου MN πρὸς τὴν ὅλην περιφέρειαν ὡς 5 πρὸς 48, ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ ὅλη σφαῖρα περιέχει 96 τρίγωνα, ἐν ᾧ ὁ ἄτρακτος 10, βλέπομεν ἐνταυτῷ ὅτι τὸ ὅλον ϛερεὸν τῆς σφαίρας περιέχει 96 ἴσας σφαιρικὰς πυραμίδας, ἐν ᾧ ὁ σφαιρικὸς ὄνυξ τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὁ παραβαλλόμενος μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ἄτρακτος περιέχει 10· λοιπὸν ὁ σφαιρικὸς ὄνυξ ὅςις ἔχει διὰ βάσιν τοῦτον τὸν ἄτρακτον εἶναι πρὸς τὸ ὅλον ϛερεὸν τῆς σφαίρας ὡς 10 πρὸς 96 ἢ ὡς 5 πρὸς 48, τουτέϛιν ὡς ἡ γωνία A πρὸς τέσσαρας ὀρθάς· καὶ ἡ αὐτὴ ἡ ἀναλογία ὑπάρχει ἐὰν ἡ γωνία A δὲν ἦναι εἰς λόγον συμμετρικὸν μὲ τὰς τέσσαρας ὀρθάς· ἀπὸ ἄλλο μέρος εἴδομεν ὅτι τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον περιέχεται ὀκτὼ φοραῖς εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας· ἀλλ' εὐκόλως βλέπομεν ἀκόμη ὅτι ἡ πυραμὶς ἥτις ἔχει διὰ βάσιν τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον περιέχεται εἰς τὸ ὅλον ϛερεὸν τῆς σφαίρας ὀκτὼ φοραῖς· ἐὰν λοιπὸν ἡ πυραμὶς αὕτη ληφθῇ ὡς μονὰς, τὸ ϛερεὸν τῆς σφαίρας θέλει ἐκφρασθῇ διὰ 8. Ἄρα ὁ σφαιρικὸς ὄνυξ τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι A ἐκφράζεται διὰ 2A. Καὶ εἰς ἄλλος τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι B θέλει ἐκφρασθῇ διὰ 2B· λοιπὸν ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον : : A : B. O. M.

ΑΓ=ΔΖ, ΓΒ=ΕΖ, καὶ τῶν ὁποίων ὅμως εἶναι ἀδύνατος ἡ ἐπίθεσις· λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ΑΒΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπιφάνειαν ΔΕΖ. σχ. 237.

Εςω Π ὁ πόλος τοῦ μικροῦ κύκλου ὅςις διέρχεται διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ (1)· ἀπὸ τὴν ςιγμὴν ταύτην ἂς ἀχθῶσι τὰ ἴσα τόξα (πρό. 6) ΠΑ, ΠΒ, ΠΓ· εἰς τὴν ςιγμὴν Ζ ἂς γένῃ ἡ γωνία ΔΖΚ=ΑΓΠ, τὸ τόξον ΖΚ=ΓΠ, καὶ ἂς ἑνωθῶσι ΔΚ, ΕΚ.

Αἱ πλευραὶ ΔΖ, ΖΚ, εἶναι ἴσαι μὲ τὰς πλευρὰς ΑΓ, ΓΠ, ἡ γωνία ΔΖΚ=ΑΓΠ· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΔΖΚ, ΑΓΠ εἶναι ἴσα καθ' ὅλά των τὰ μέρη (πρό: 12)· λοιπὸν ἡ πλευρὰ ΔΚ=ΑΠ, καὶ ἡ γωνία ΔΚΖ=ΑΠΓ.

Εἰς τὰ προτεθέντα τρίγωνα ΔΖΕ, ΑΒΓ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΔΖΕ, ΑΓΒ, ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν ΔΕ, ΑΒ εἶναι ἴσαι, (πρό. 11), ἐὰν ἀφαιρεθῶσιν ἀπ' αὐτὰς αἱ γωνίαι ΔΖΚ, ΑΓΠ ἴσαι ἐκ τῆς κατασκευῆς, μένει ἡ γωνία ΚΖΕ ἴση μὲ τὴν ΠΓΒ. Ἄλλως αἱ πλευραὶ ΚΖ, ΖΕ, εἶναι ἴσαι

(1) Ο κύκλος ὅςις διέρχεται διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ, ἢ ὅςις περιγράφεται εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι παρὰ μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας· διότι, ἐὰν ἦτον μέγιςος, αἱ τρεῖς πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ, ἤθελον κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἤθελεν ἀχθῇ εἰς μίαν τῶν πλευρῶν των. (Σημείωσις τοῦ Συγγραφέως).

Ο λόγος διὰ τὸν ὁποῖον ὅταν ὑποτεθῇ ὅτι ὁ διερχόμενος κύκλος διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ εἶναι μέγιςος, αἱ τρεῖς πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ, εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, εἶναι ὁ ἀκόλουθος.

Θταν ὑποτεθῇ ὅτι ὁ διερχόμενος κύκλος διὰ Α, Β, Γ εἶναι μέγιςος, τὸ κέντρον τούτου τοῦ κύκλου εἶναι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας· καὶ ἐπειδὴ τὸ κέντρον τοῦτο εὑρίσκεται εἰς καθὲν τῶν ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα περιέχουν τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ· ἕπεται ὅτι καθὲν τούτων τῶν ἐπιπέδων ἤθελεν ἔχει τρία κοινὰ σημεῖα μὴ ἐπ' εὐθείας μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ διερχομένου κύκλου διὰ Α, Β, Γ· καὶ ἐπειδὴ ὅταν ἓν ἐπίπεδον ἔχει τρία κοινὰ σημεῖα μὲ ἓν ἄλλο ταυτίζεται μὲ αὐτό, ἕπεται ὅτι τὰ τρία ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα περιέχουν τὰς τρεῖς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ ἤθελον σχηματίζει ἓν μόνον ἐπίπεδον μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ διερχομένου κύκλου διὰ Α, Β, Γ· αἱ τρεῖς λοιπὸν πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ ἤθελον τῷ ὄντι εὑρίσκεσθαι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· πλὴν τότε δὲν σχηματίζουν τρίγωνον Ο. Μ.

μὲ τὰς πλευρὰς ΠΓ, ΓΒ· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΖΚΕ, ΠΓΒ, εἶναι ἴσα καθ' ὅλα των τὰ μέρη· λοιπὸν ἡ πλευρὰ ΚΕ = ΠΒ, καὶ ἡ γωνία ΖΚΕ = ΓΠΒ.

Ἐὰν τώρα παρατηρήσωμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΔΖΚ, ΑΓΠ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς πλευράς των ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, εἶναι ἐνταυτῷ ἰσοσκελῆ, βλέπομεν ὅτι ἠμποροῦν νὰ ἐπιτεθῶσι καὶ ἐντελῶς νὰ ἐφαρμόσωσι· διότι, ἀφ' οὗ τεθῇ ἡ ΠΓ ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ΚΖ, ἡ πλευρὰ ΠΑ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ΚΔ, καὶ οὕτω τὰ δύο τρίγωνα θέλουν ταυτισθῇ εἰς ἓν μόνον· λοιπὸν εἶναι ἴσα, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἐπιφάνεια ΔΚΖ = ΑΠΓ. Διὰ λόγον παρόμοιον ἡ ἐπιφάνεια ΖΚΕ = ΓΠΒ, καὶ ἡ ἐπιφάνεια ΔΚΕ = ΑΠΒ· λοιπὸν ἔχομεν ΔΚΖ + ΖΚΕ — ΔΚΕ = ΑΠΓ + ΓΠΒ — ΑΠΒ· ἢ ΔΖΕ = ΑΒΓ· λοιπὸν τὰ δύο συμμετρικὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, εἶναι ἴσα κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν. (1)

Σχόλιον. Δυνατὸν εἶναι οἱ πόλοι Π καὶ Κ νὰ εὑρεθοῦν ἐντὸς τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΕΖ· τότε πρέπει νὰ προστεθοῦν τὰ τρία τρίγωνα ΔΚΖ, ΖΚΕ, ΔΚΕ, διὰ νὰ προκύψῃ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, καὶ παρομίως τὰ τρία τρίγωνα ΑΠΓ, ΓΠΒ, ΑΠΒ, διὰ νὰ προκύψῃ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ· ἄλλως ἡ ἀπόδειξις καὶ ἡ συνέπεια ἤθελον εἶναι αἱ αὐταί.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν δύο μέγιστοι κύκλοι ΑΟΒ, ΓΟΔ τέμνωνται ὁπωςδήποτε εἰς τὸ ἡμισφαίριον ΑΟΓΒΔ, τὸ ἄθροισμα τῶν κατὰ κορυφὴν τριγώνων ΑΟΓ, ΒΟΔ, θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἄτρακτον τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι ΒΟΔ. σχ. 238.

(1) Η αὐτὴ ἀπόδειξις δεικνύει ὅτι ἡ πυραμὶς ἥτις ἔχει βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴση κατὰ τὴν στερεότητα μὲ τὴν πυραμίδα τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΕΖ. Ο. Μ.

Διότι, προεκβληθέντων τῶν τόξων ΟΒ,ΟΔ, εἰς τὸ ἄλλο ἡμισφαίριον ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Ν, ΟΒΝ, καθὼς καὶ ΑΟΒ, θέλει εἶναι ἡμιπεριφέρεια· μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τῆς ΟΒ, θέλει προκύψει ΒΝ = ΑΟ. Διὰ λόγον παρόμοιον ΔΝ = ΓΟ, καὶ ΒΔ = ΑΓ· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΟΓ, ΒΔΝ, ἔχουν τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας· ἄλλως ἡ θέσις των εἶναι τοιαύτη ὥστε εἶναι συμμετρικὰ τὸ ἓν τοῦ ἄλλου· λοιπὸν εἶναι ἴσα κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν (πρό. 21), καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΑΟΓ, ΒΟΔ, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν ἄτρακτον ΟΒΝΔΟ τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι ΒΟΔ.

Σχόλιον. Φανερὸν εἶναι ὅτι αἱ δύο σφαιρικαὶ πυραμίδες βάσεις τῶν ὁποίων εἶναι τὰ τρίγωνα ΑΟΓ, ΒΟΔ, ὁμοῦ ληφθεῖσαι ἰσοδυναμοῦν μὲ τὸν σφαιρικὸν ὄνυχα τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι ΒΟΔ. (1)

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Η ἐπιφάνεια ὁποιουδήποτε σφαιρικοῦ τριγώνου ἔχει μέτρον τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν του ἐπάνω εἰς δύο ὀρθάς.

Εστω ΑΒΓ τὸ προτεθὲν τρίγωνον· ἂς προεκβληθῶσιν αἱ πλευραί του ἕως οὗ νὰ συναπαντήσωσι τὸν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ὅπως δήποτε ἠγμένον μέγιστον κύκλον ΔΕΖΗ. Δυνάμει τοῦ προλαβόντος θεωρήματος, τὰ δύο τρίγωνα

(1) Ο σφαιρικὸς ὄνυξ τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι ΒΟΔ μοιράζεται εἰς δύο σφαιρικὰς πυραμίδας βάσεις τῶν ὁποίων εἶναι τὰ τρίγωνα ΒΟΔ, ΒΔΝ· τώρα ἡ πυραμὶς ἥτις ἔχει βάσιν τὸ τρίγωνον ΒΔΝ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν πυραμίδα τῆς ὁποίας βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΟΓ (βλέπε τὴν ἀνωτέρω σημείωσιν)· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πυραμίδων αἱ ὁποῖαι συγκροτοῦν τὸν σφαιρικὸν ὄνυχα ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πυραμίδων βάσεις τῶν ὁποίων εἶναι τὰ τρίγωνα ΑΟΓ, ΒΟΔ. Ο. Μ.

ΑΔΕ, ΑΗΘ, ὁμοῦ ληφθέντα, ἰσοδυναμοῦν μὲ τὸν ἄτρακτον τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι Α, καὶ ὅςις ἔχει μέτρον 2Α (πρό. 20): οὕτω θέλει εἶναι $ΑΔΕ + ΑΗΘ = 2Α$· διὰ λόγον παρόμοιον $ΒΗΖ + ΒΙΔ = 2Β$, $ΓΙΘ + ΓΖΕ = 2Γ$. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τούτων τῶν τριγώνων ὑπερέχει τὸ ἡμισφαίριον τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· ἄλλως τὸ ἡμισφαίριον παριςάνεται διὰ 4· λοιπὸν τὸ διπλάσιον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴσον μὲ $2Α + 2Β + 2Γ - 4$, καὶ ἑπομένως $ΑΒΓ = Α + Β + Γ - 2$· λοιπὸν κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του μεῖον δύο ὀρθὰς γωνίας. σχ. 239.

Πόρισμα Α΄. Οσαι ὀρθαὶ γωνίαι εἰς τοῦτο τὸ μέτρον περιέχονται, ἄλλα τόσα τρισσορθογώνια τρίγωνα ἢ ὄγδοα μέρη τῆς σφαίρας τὰ ὁποῖα εἶναι ἡ μονὰς τῆς ἐπιφανείας (πρό. 20), τὸ προτεθὲν τρίγωνον περιέχει. Ἐάν, φερ' εἰπεῖν, ἑκάςη τῶν γωνιῶν εἶναι $\frac{4}{3}$ τῆς ὀρθῆς, τότε αἱ τρεῖς γωνίαι ἰσοδυναμοῦν μὲ 4 ὀρθάς, καὶ τὸ προτεθὲν τρίγωνον παριςάνεται διὰ $4-2$ ἢ 2· λοιπὸν θέλει εἶναι ἴσον μὲ δύο τρισσορθογώνια τρίγωνα.

Πόρισμα Β΄. Τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν ἄτρακτον τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι $\frac{Α+Β+Γ-1}{2}$· ὁμοίως ἡ σφαιρικὴ πυραμίς, τῆς ὁποίας ἡ βάσις εἶναι ΑΒΓ, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν σφαιρικὸν ὄνυχα τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι $\frac{Α+Β+Γ-1}{2}$. (1)

(1) Εἰς τὸ σχόλιον τῆς προλαβούσης προτάσεως ἐσημειώθη ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πυραμίδων αἱ ὁποῖαι ἔχουν διὰ βάσεις τὰ κατὰ κορυφὴν τρίγωνα τὰ ὁποῖα σχηματίζονται ὅταν δύο μέγιςοι κύκλοι τέμνωνται εἰς τὸ ἡμισφαίριον, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν σφαιρικὸν ὄνυχα τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι ἡ κατὰ κορυφὴν γωνία τῶν τριγώνων· ἐπειδὴ δὲ ἡ ςερεότης τοῦ ὄνυχος ἐκφράζεται διὰ τοῦ διπλασίου τῆς γωνίας του, ἀκολουθεῖ ὅτι το ἄθροισμα τῶν εἰρημένων πυραμίδων ἔχει μέτρον τὸ

Σχόλιον. Εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ὁποῦ παραβάλλεται τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ μὲ τὸ τρισορθογώνιον, ἡ σφαιρικὴ πυραμὶς ἥτις ἔχει βάσιν ΑΒΓ παραβάλλεται μὲ τὴν τρισορθογώνιον πυραμίδα, καὶ προκύπτει ἡ αὐτὴ ἀναλογία. Η στερεὰ γωνία εἰς τὴν κορυφὴν τῆς πυραμίδος παραβάλλεται ὡσαύτως μὲ τὴν στερεὰν γωνίαν τῆς τρισορθογωνίου πυραμίδος: τῷ ὄντι ἡ σύγκρισις στερεόνεται διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν μερῶν. Τώρα ἐὰν αἱ βάσεις τῶν πυραμίδων ἐφαρμόζωσι, φανερὸν ὅτι καὶ αὐταὶ αἱ πυραμίδες ἐφαρμόζουσι, καθὼς καὶ αἱ εἰς τὴν κορυφὴν των στερεαὶ γωνίαι· ἐντεῦθεν προκύπτουσι πολλαὶ συνέπειαι.

1.ον Δύο σφαιρικαὶ τριγωνικαὶ πυραμίδες εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των· καὶ ἐπειδὴ πολυγωνικὴ πυραμὶς ἠμπορεῖ νὰ μοιρασθῇ εἰς πολλὰς τριγωνικὰς πυραμίδας, ἕπεται ὅτι δύο ὁποιαιδήποτε σφαιρικαὶ πυραμίδες εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ πολύγωνα τὰ ὁποῖα χρησιμεύουν εἰς αὐτὰς ὡς βάσεις.

2.ον Αἱ εἰς τὴν κορυφὴν τῶν ἰδίων πυραμίδων στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἐπίσης εἰς τὴν ἀναλογίαν τῶν βάσεων· λοιπὸν διὰ νὰ συγκρίνωμεν δύο ὁποιασδήποτε στερεὰς γωνίας, πρέπει νὰ θέσωμεν τὰς κορυφάς των εἰς τὸ κέντρον δύο ἴσων σφαιρῶν, καὶ αἱ στερεαὶ αὗται γωνίαι θέλουν εἶναι με-

---

διπλάσιον τῆς ἰδίας γωνίας. Τούτου τεθέντος διὰ τῆς αὐτῆς ἀποδείξεως μὲ τὴν ὁποίαν ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς τριγώνου ἔχει μέτρον τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν γωνιῶν των ἐπάνω εἰς δύο ὀρθάς, ἀποδεικνύεται ἐνταῦθα ὅτι ἡ στερεότης τῆς πυραμίδος ἥτις ἔχει βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει μέτρον τὴν ἰδίαν ποσότητα. Η μόνη διαφορὰ εἶναι ὅτι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἐκφράζει εἰς τὴν πρώτην περίστασιν μονάδας τρισορθογωνίου τριγώνου, καὶ εἰς τὴν δευτέραν μονάδας στερεοῦ. Ζητοῦντες τώρα μὲ ποῖον ὄγκον ἡ πυραμὶς ΑΒΓ ἰσοδυναμεῖ πρέπει νὰ κάμωμεν τὴν ἀναλογίαν $A+B+\Gamma-2 : 8 :: X : 4$· ὅθεν $X = \frac{4A+4B+4\Gamma-8}{8} = \frac{A+B+\Gamma}{2} - 1$. Ο. Μ.

ταξύ των ὡς τὰ πολύγωνα τὰ ἀποχωρίζόμενα μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων ἢ ἑδρῶν των.

Η εἰς τὴν κορυφὴν τῆς τρισσορθογωνίου πυραμίδος γωνία σχηματίζεται ἀπὸ τρία ἐπίπεδα κάθετα μεταξύ των· ἡ γωνία αὕτη ἥτις ἠμπορεῖ νὰ ὀνομασθῇ ὀρθὴ ϛερεὰ γωνία, εἶναι πολλὰ ἁρμοδία διὰ νὰ χρησιμεύσῃ ὡς μονὰς μέτρου εἰς τὰς ϛερεὰς γωνίας. Τούτου τεθέντος, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ὅϛις δίδει τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς σφαιρικοῦ πολυγώνου θέλει δώσει τὸ μέτρον τῆς ἀντικειμένης ϛερεᾶς γωνίας. Ἐὰν, φερ' εἰπεῖν, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου ἦναι $\frac{4}{5}$, τουτέϛι τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ τρισσορθογωνίου τριγώνου, ἡ ἀντικειμένη ϛερεὰ γωνία θέλει εἶναι ὡσαύτως τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς ϛερεᾶς γωνίας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Η ἐπιφάνεια ἑνὸς σφαιρικοῦ πολυγώνου ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του μεῖον τὸ γινόμενον δύο ὀρθῶν γωνιῶν ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου μεῖον δύο.

Ἀπὸ τὴν αὐτὴν κορυφὴν Α ἂς ἀχθῶσιν εἰς ὅλας τὰς ἄλλας κορυφὰς αἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΑΔ· τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ θέλει μοιρασθῇ εἰς τόσα τρίγωνα ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ μεῖον δύο. Ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια κάθε τριγώνου ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του μεῖον δύο ὀρθὰς, καὶ φανερὸν εἶναι ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου· λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του μεῖον τοσάκις δύο ὀρθὰς γωνίας ὅσας πλευρὰς ἔχει παρὰ 2.

Σχόλιον. Εσω σ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ πολυγώνου, ν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του· ὑποτεθείσης τῆς ὀρθῆς γωνίας ὡς μονάδος, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου θέλει ἔχει μέτρον $\sigma - 2(\nu - 2)$ ἢ $\sigma - 2\nu + 4$.