ΒΙΒΛΙΟΝ Ζ΄.

Η ΣΦΑΙΡΑ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α΄. Η σφαῖρα εἶναι ϛερεὸν περατούμενον ἀπὸ καμπύλην ἐπιφάνειαν, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἰσάκις ἀπέχουσιν ἀπὸ ἓν ἐντὸς σημεῖον καλούμενον κέντρον.

Γεννᾶται δὲ ἡ σφαῖρα ἀπὸ τὴν περιϛροφὴν ἡμικυκλίου ὡς τοῦ ΔΑΕ ὁλόγυρα τῆς διαμέτρου ΔΕ: διότι τὰ σημεῖα τῆς εἰς ταύτην τὴν κίνησιν ἀπὸ τὴν καμπύλην ΔΑΕ γραφομένης ἐπιφανείας ἰσάκις θέλουν ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον Γ. σχ. 220.

Β΄. Ἀκτὶς τῆς σφαίρας εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ ἀγομένη ἀπὸ τὸ κέντρον εἰς μίαν ϛιγμὴν τῆς ἐπιφανείας· διάμετρος δὲ ἢ ἄξων ἡ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένη γραμμὴ, καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη εἰς τὴν ἐπιφάνειαν περατουμένη.

Ολαι αἱ ἀκτῖνες τῆς σφαίρας εἶναι ἴσαι· ὅλαι αἱ διάμετροι εἶναι ἴσαι καὶ διπλάσιαι τῆς ἀκτῖνος.

Γ΄. Θέλει ἀποδειχθῇ (πρό. 1) ὅτι κάθε τομὴ τῆς σφαίρας, ὑπὸ ἐπιπέδου γινομένη, εἶναι κύκλος: τούτου τεθέντος, καλεῖται μέγιϛος κύκλος ἡ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τομή· μικρὸς δὲ κύκλος ἡ μὴ διερχομένη.

Δ΄. Ἐπίπεδον ἅπτεται τῆς σφαίρας ὅταν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχῃ μὲ τὴν ἐπιφάνειάν της.

Ε΄. Πόλος ἑνὸς κύκλου τῆς σφαίρας εἶναι ἓν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἰσάκις ἀπέχον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας τούτου τοῦ κύκλου. Θέλομεν ἴδει (πρό. 6) ὅτι κάθε κύκλος, μέγιϛος ἢ μικρὸς, ἔχει πάντοτε δύο πόλους.

Ϛ΄. Τρίγωνον σφαιρικὸν εἶναι μέρος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας περιεχόμενον ὑπὸ τριῶν τόξων μεγίστων κύκλων.

Τὰ τόξα ταῦτα, τὰ ὁποῖα καλοῦνται πλευραὶ τοῦ τριγώνου, πάντοτε ὑποτίθενται μικρότερα τῆς ἡμιπεριφερείας. Αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας τὰ ἐπίπεδά των κάμνουν μεταξύ των εἶναι αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου.

Ζ΄. Εν σφαιρικὸν τρίγωνον ὀνομάζεται ὀρθογώνιον, ἰσοσκελὲς, ἰσόπλευρον, εἰς τὰς αὐτὰς περιστάσεις ὅπου καὶ ἓν εὐθύγραμμον.

Η΄. Σφαιρικὸν πολύγωνον εἶναι μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας περιεχόμενον ὑπὸ πολλῶν τόξων μεγίστων κύκλων.

Θ΄. Ἄτρακτος (Fuseau) εἶναι τὸ μέρος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο ἡμιμεγίστων κύκλων οἱ ὁποῖοι τελειόνουν εἰς μίαν κοινὴν διάμετρον.

Ι΄. Καλῶ σφῆνα ἢ ὄνυχα σφαιρικὸν (coin, onglet sphérique) τὸ μέρος τοῦ στερεοῦ τῆς σφαίρας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν αὐτῶν ἡμιμεγίστων κύκλων, καὶ εἰς τὸ ὁποῖον ὁ ἄτρακτος χρησιμεύει ὡς βάσις.

ΙΑ΄. Πυραμὶς σφαιρικὴ εἶναι τὸ μέρος τοῦ στερεοῦ τῆς σφαίρας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων μιᾶς στερεᾶς γωνίας τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ εἶναι εἰς τὸ κέντρον. Η βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον τὸ ἀποχωριζόμενον ἀπὸ τὰ αὐτὰ ἐπίπεδα.

ΙΒ΄. Καλεῖται Ζώνη τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα εἶναι αἱ βάσεις τῆς ζώνης. Τὸ ἓν ἀπὸ αὐτὰ δυνατὸν νὰ ἅπτεται τῆς σφαίρας, καὶ τότε ἡ ζώνη ἔχει μίαν μόνην βάσιν.

ΙΓ΄. Τμῆμα σφαιρικὸν εἶναι τὸ μέρος τοῦ στερεοῦ τῆς σφαίρας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα εἶναι αἱ βάσεις του.

Τὸ ἓν ἀπὸ αὐτὰ δυνατὸν νὰ ἅπτεται τῆς σφαίρας, καὶ τότε τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ἔχει μίαν μόνην βάσιν.

ΙΔ'. Τὸ ὕψος μιᾶς ζώνης ἢ ἑνὸς τμήματος εἶναι τὸ ἀπόςημα τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα εἶναι αἱ βάσεις τῆς ζώνης ἢ τοῦ τμήματος. σχ. 220.

ΙΕ'. Ἐν' ᾧ τὸ ἡμικύκλιον ΔΑΕ ςρεφόμενον ὁλόγυρα τῆς διαμέτρου ΔΕ γράφει τὴν σφαῖραν, κάθε κυκλικὸς τομεὺς, ὡς ΔΓΖ ἢ ΖΓΘ γράφει ςερεὸν τὸ ὁποῖον καλεῖται σφαιρικὸς τομεύς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΠΡΩΤΗ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Κάθε τομὴ τῆς σφαίρας, ὑπὸ ἐπιπέδου γινομένη, εἶναι κύκλος.

Ἐςω ΑΜΒ ἡ γινομένη ὑπὸ ἐπιπέδου εἰς τὴν σφαῖραν τομὴ, τὸ κέντρον τῆς ὁποίας σφαίρας εἶναι Γ. Ἀπὸ τὴν ςιγμὴν Γ ἂς ἀχθῇ ἡ κάθετος ΓΟ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΜΒ, καὶ διάφοροι γραμμαὶ ΓΜ, ΓΜ, εἰς διάφορα σημεῖα τῆς καμπύλης ΑΜΒ ἥτις περατόνει τὴν τομήν. σχ. 221.

Αἱ πλάγιαι ΓΜ, ΓΜ, ΓΒ, εἶναι ἴσαι, ὡς ἀκτῖνες τῆς σφαίρας· ἰσάκις λοιπὸν ἀπέχουσι τῆς καθέτου ΓΟ (5, 5)· ὅλαι λοιπὸν αἱ γραμμαὶ ΟΜ, ΟΜ, ΟΒ εἶναι ἴσαι· ὅλα λοιπὸν τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης ἥτις περατόνει τὴν τομὴν, ἰσάκις ἀπέχουσι ἀπὸ ἓν ἐντὸς αὐτῆς σημεῖον Ο· ἡ καμπύλη λοιπὸν αὕτη εἶναι κύκλου περιφέρεια τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον εἶναι Ο· ἡ τομὴ λοιπὸν ΑΜΒ εἶναι κύκλος.

Πόρισμα Α'. Ἐὰν ἡ τομὴ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἡ ἀκτίς της θέλει εἶναι ἡ τῆς σφαίρας· ὅλοι λοιπὸν οἱ μέγιςοι κύκλοι εἶναι ἴσοι μεταξύ των.

Β'. Δύο μέγιςοι κύκλοι πάντοτε τέμνονται εἰς δύο ἴσα μέρη· διότι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἐπειδὴ πρέπει νὰ εὑρίσκεται καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πρώτου, καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ δευτέρου, ἀναγκαίως εἶναι ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς κοινῆς τομῆς των· ἡ κοινὴ των λοιπὸν τομὴ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου· εἶναι λοιπὸν διάμετρος· ἀλλὰ κάθε διάμετρος διαιρεῖ τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη· λοιπὸν κ.τ.λ.

Γ'. Κάθε μέγιστος κύκλος διαιρεῖ τὴν σφαῖραν καὶ τὴν ἐπιφάνειάν της εἰς δύο ἴσα μέρη· διότι ἐὰν, ἀφ' οὗ χωρίσωμεν τὰ δύο ἡμισφαίρια, θέσωμεν αὐτὰ ἐπὶ τῆς κοινῆς βάσεως στρέφοντες τὴν κυρτότητά των κατὰ τὸ αὐτὸ μέρος, αἱ δύο ἐπιφάνειαι θέλουν ἐφαρμόσει ἡ μία μὲ τὴν ἄλλην· διότι ἄλλως ἤθελον ὑπάρχει σημεῖα ἀνισάκις ἀπέχοντα τοῦ κέντρου.

Δ'. Τὸ κέντρον ἑνὸς μικροῦ κύκλου καὶ τὸ τῆς σφαίρας εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας καθέτου εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ μικροῦ κύκλου. σχ. 221.

Ε'. Οἱ μικροὶ κύκλοι τόσον εἶναι μικρότεροι, ὅσον περισσότερον ἀπέχουσι τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· διότι ὅσον περισσότερον τὸ ἀπόστημα ΓΟ εἶναι μεγαλήτερον, τόσον περισσότερον ἡ χορδὴ ΑΒ εἶναι μικροτέρα, διάμετρος τοῦ μικροῦ κύκλου ΑΜΒ.

Ϛ'. Δύο δεδομένων σημείων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας, εἶναι δυνατὸν νὰ διέλθῃ τόξον μεγίστου κύκλου· διότι τὰ δύο δεδομένα σημεῖα καὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας εἶναι τρία σημεῖα προσδιορίζοντα τὴν θέσιν ἐπιπέδου· ἐὰν ὅμως τὰ δύο δεδομένα σημεῖα τύχῃ νὰ ἦναι τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου, τότε τὰ δύο ταῦτα σημεῖα καὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας θέλουν εἶναι ἐπ' εὐθείας, καὶ ἄπειροι μέγιστοι κύκλοι δυνατὸν νὰ διέλθωσι· διότι ἄπειρα ἐπίπεδα διὰ δύο σημείων δυνατὸν νὰ διέλθωσι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς κάθε σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ, ὁποιαδήποτε πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. σχ. 222.

Εςω Ο τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, καὶ ἀχθήτωσαν αἱ ἀκτῖνες ΟΑ,ΟΒ, ΟΓ. Ἐὰν φαντασθῶμεν τὰ ἐπίπεδα ΑΟΒ, ΑΟΓ, ΓΟΒ, ταῦτα σχηματίζουν εἰς τὴν ςιγμὴν Ο γωνίαν ςερεὰν, καὶ αἱ γωνίαι ΑΟΒ, ΑΟΓ, ΓΟΒ, μετροῦνται ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΑΒ,ΑΓ,ΒΓ, τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Τώρα, ἑκάςη τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἱ ὁποῖαι συγκροτοῦν τὴν ςερεὰν γωνίαν εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων (21, 5)· λοιπὸν ὁποιαδήποτε πλευρὰ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ο πλέον σιμοτινὸς δρόμος ἀπὸ ἓν σημεῖον εἰς ἄλλο ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, εἶναι τὸ τόξον τοῦ μεγίςου κύκλου τὸ ὁποῖον ἑνόνει τὰ δύο δεδομένα σημεῖα.

Εςω ΑΝΒ τὸ τόξον τοῦ μεγίςου κύκλου τὸ ὁποῖον ἑνόνει τὰ σημεῖα Α καὶ Β, καὶ ἔςω ἐκτὸς τούτου τοῦ τόξου, εἰ δυνατὸν, Μ ἓν σημεῖον τῆς πλέον σιμοτινῆς γραμμῆς μεταξὺ Α καὶ Β. Διὰ τῆς ςιγμῆς Μ ἂς ἀχθῶσι τὰ τόξα μεγίςων κύκλων ΜΑ, ΜΒ, καὶ ἂς ληφθῇ ΒΝ=ΜΒ.

Κατὰ τὸ προλαβὸν θεώρημα τὸ τόξον ΑΝΒ εἶναι σιμοτινώτερον τοῦ ΑΜ + ΜΒ· ἀφαιρέσει καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τοῦ ΒΝ=ΒΜ, μένει ΑΝ < ΑΜ. Τώρα τὸ διάςημα ἀπὸ Β εἰς Μ, εἴτε ταυτίζεται μὲ τὸ τόξον ΒΜ, ἢ εἶναι ὁποιαδήποτε ἄλλη γραμμὴ, εἶναι ἴσον μὲ τὸ διάςημα ἀπὸ Β εἰς Ν· διότι ςρέφοντες τὸ ἐπίπεδον τοῦ μεγίςου κύκλου ΒΜ ὁλόγυρα τῆς διαμέτρου τῆς διερχομένης διὰ Β, δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν τὴν ςιγμὴν Μ εἰς τὴν ςιγμὴν Ν, καὶ τότε ἡ πλέον σιμοτινὴ γραμμὴ ἀπὸ Μ εἰς Β, ὁποία καὶ ἂν ἦναι, θέλει ταυτισθῇ μὲ τὴν πλέον σιμοτινὴν γραμμὴν ἀπὸ Ν εἰς Β· λοιπὸν οἱ δύο δρόμοι ἀπὸ Α εἰς Β, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ μὲν διέρχεται διὰ Μ, ὁ δὲ διὰ Ν, ἔχουν ἓν μέρος ἴσον ἀπὸ Μ εἰς Β καὶ ἀπὸ Ν εἰς Β. Ο πρῶτος δρόμος εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ὁ σιμοτινώτερος· λοιπὸν τὸ διάστημα ἀπὸ Α εἰς Μ εἶναι σιμοτινώτερον τοῦ διαστήματος ἀπὸ Α εἰς Ν, τὸ ὁποῖον ἤθελεν εἶναι ἄτοπον, διότι τὸ τόξον ΑΜ εἶναι μεῖζον τοῦ ΑΝ· λοιπὸν κἀνὲν σημεῖον τῆς πλέον σιμοτινῆς γραμμῆς μεταξὺ Α καὶ Β δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι ἐκτὸς τοῦ τόξου ΑΝΒ· λοιπὸν αὐτὸ τὸ τόξον εἶναι ἡ σιμοτινωτέρα γραμμὴ μεταξὺ τῶν ἄκρων του. σχ. 223.

Σημείωσις τοῦ Μεταφραστοῦ. Διὰ νὰ εὐκολύνω τὴν κατάληψιν εἰς τὸν ἀναγνώστην ταύτης τῆς προτάσεως, ἔκρινα εὔλογον, χωρὶς νὰ ἀπομακρυνθῶ ἀπὸ τὸν συγγραφέα, νὰ τὴν ἐκθέσω ὡς ἀκολούθως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ.

Μεταξὺ δύο στιγμῶν ἐπὶ τῆς ἰδίας σφαίρας, τὸ πλέον σιμοτινὸν διάστημα εἶναι τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου, ὅστις διέρχεται διὰ τῶν ἰδίων στιγμῶν, ὡς τὸ ΑΒ τόξον.

Επειδὴ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ πλέον σιμοτινὸν διάστημα μεταξὺ Α καὶ Β εἶναι μία ἄλλη καμπύλη γραμμὴ ὡς ἡ ΑΜΒ: δηλαδὴ ΑΜΒ < ΑΒ, καὶ κάθε ἄλλης καμπύλης διερχομένης διὰ Α καὶ Β. Τώρα ἐὰν ἐκ τῆς Β καὶ Μ φέρωμεν τὸ τόξον μεγίστου κύκλου ΜΒ, καὶ παρομοίως ἐκ τῆς Α καὶ Μ τὸ τόξον μεγίστου κύκλου ΑΜ, καὶ λάβωμεν τὸ τόξον ΒΝ ἴσον μὲ τὸ τόξον ΜΒ· τότε τὸ πλέον σιμοτινὸν διάστημα μεταξὺ Β καὶ Ν θέλει εἶναι τὸ αὐτὸ μεταξὺ Β καὶ Μ· ἐπειδὴ δὲ δυνάμεθα νὰ ὑπάγωμεν ἀπὸ Β εἰς Α ἢ διατρέχοντες τὴν καμπύλην ΑΜΒ, ἢ τὸ διάστημα μεταξὺ Β καὶ Ν, καὶ τὸ διάστημα μεταξὺ Ν καὶ Α, καὶ ὁ πρῶτος δρόμος, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι σιμοτινώτερος τοῦ δευτέρου, ἕπεται, ἐξ αἰτίας ὁποῦ τὸ πλέον σιμοτινὸν διάστημα ἀπὸ Β εἰς Μ εἶναι ἴσον μὲ τὸ πλέον σιμοτινὸν διάστημα ἀπὸ Β εἰς Ν, ὅτι τὸ διάστημα μεταξὺ Α καὶ Μ ἐκτιμούμενον ἐπὶ τῆς καμπύλης ΑΜΒ ἀπὸ Α ἕως Μ, εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ διάστημα μεταξὺ Α καὶ Ν· Τώρα ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΜ πλέον τὸ ΜΒ εἶναι μεῖζον τοῦ τόξου ΑΒ, καὶ ἐλήφθη ΜΒ=ΒΝ· διὰ τοῦτο τὸ τόξον ΑΜ εἶναι μεῖζον τοῦ ΑΝ· λοιπὸν λαμβάνοντες ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ ἓν τόξον ἴσον μὲ τὸ ΑΜ, εὐκόλως βλέπομεν ὅτι ἡ σιγμὴ Μ πρέπει νὰ εὑρεθῇ ὑπὸ τῆς Ν μεταξὺ Ν καὶ Β. Η σιγμὴ λοιπὸν αὕτη ἀπέχει ἐκ τῆς σιγμῆς Α, περισσότερον ἀπὸ ὅ,τι ἀπέχει ἡ σιγμὴ Ν· ἀλλ' ὅσον ἀπέχει ἡ σιγμὴ ἡ μεταξὺ τῆς Ν καὶ Β ἀπὸ τὴν Α, τόσον ἀπέχει καὶ ἡ Μ ἀπὸ τὴν Α· λοιπὸν τὸ πλέον σιμοτινὸν διάστημα μεταξὺ τῆς Α καὶ Μ, εἶναι ἴσον μὲ τὸ πλέον σιμοτινὸν διάστημα μεταξὺ τῆς Α καὶ τῆς σιγμῆς τῆς μεταξὺ τῆς Ν καὶ Β· ὅταν λοιπὸν τὸ τόξον ΑΜ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ΑΒ, τότε ἡ σιγμὴ Μ πίπτει ἐπὶ τῆς σιγμῆς τῆς μεταξὺ τῆς Ν καὶ Β· καὶ τὸ πλέον σιμοτινὸν διάστημα μεταξὺ τῆς Α καὶ Μ, ταυτίζεται μὲ τὸ πλέον σιμοτινὸν διάστημα μεταξὺ τῆς Α καὶ τῆς σιγμῆς τῆς μεταξὺ τῆς Ν καὶ Β. Τώρα ἐπειδὴ ἡ Ν εἶναι πλησιεστέρα εἰς τὴν Α παρὰ ἡ μεταξὺ τῆς Ν καὶ Β σιγμή, ἕπεται ὅτι τὸ πλέον σιμοτινὸν διάστημα μετξὺ Α καὶ Ν, εἶναι μικρότερον τοῦ πλέον σιμοτινοῦ διαστήματος μεταξὺ Α καὶ τῆς σιγμῆς τῆς μεταξὺ Ν καὶ Β, ἢ μικρότερον τοῦ πλέον σιμοτινοῦ διαστήματος μεταξὺ τῆς Α καὶ Μ.

Ἐκ τῶν εἰρημένων βλέπομεν ὅτι τὸ πλέον σιμοτινὸν διάστημα μεταξὺ τῆς Α καὶ Ν πλέον τὸ σιμοτινώτερον διάστημα μεταξὺ Ν καὶ Β, εἶναι μικρότερον τοῦ σιμοτινωτέρου διαστήματος μεταξὺ Α καὶ Μ πλέον τυ σιμοτινώτερον διάστημα μεταξὺ Μ καὶ Β, δηλαδὴ τῆς καμπύλης ΑΜΒ· ψευδὲς λοιπὸν ὅτι τὸ σιμοτινώτερον διάστημα μεταξὺ Α καὶ Β, εἶναι ἡ καμπύλη ΑΜΒ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύομεν, ὅτι κάθε ἄλλη καμπύλη, ἥτις ἑνόνει τὴν ϛιγμὴν Α καὶ Β, καὶ δὲν ἔχει ὅλας τὰς ϛιγμὰς της ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ, δὲν εἶναι ἐκείνη ἥτις παριϛάνει τὸ πλέον σιμοτινὸν διάϛημα μεταξὺ Α καὶ Β· ἀλλὰ μεταξὺ τῆς Α καὶ Β εὑρίσκεται τὸ ζητούμενον σιμοτινώτερον διάϛημα· λοιπὸν ἡ καμπύλη ἥτις ἐκφράζει αὐτὸ, εἶναι τὸ τόξον τοῦ μεγίϛου κύκλου δηλαδὴ τὸ ΑΒ· ἐπειδὴ εἰς τὰς ϛιγμὰς τούτου, δὲν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀνωτέρω κατασκευὴν· καὶ λοιπὸν δὲν δυνάμεθα νὰ δείξωμεν ὅτι ὑπάρχει μία καμπύλη ἥτις ἑνόνει τὴν Α καὶ Β μικροτέρα τοῦ τόξου ΑΒ. Ὅπερ ἔδει ἀποδεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πλευρῶν ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικρότερον τῆς περιφερείας μεγίϛου κύκλου.

Ἔϛω ΑΒΓ ὁποιονδήποτε σφαιρικὸν τρίγωνον· ἂς προεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν ἐκ νέου εἰς Δ. Τὰ τόξα ΑΒΔ, ΑΓΔ, θέλουν εἶναι ἡμιπεριφέρειαι, διότι δύο μέγιϛοι κύκλοι πάντοτε τέμνονται εἰς δύο ἴσα μέρη (πρό. 1)· ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον ΒΓΔ ἔχομεν τὴν πλευρὰν $ΒΓ < ΒΔ + ΓΔ$ (πρό. 2)· προσθέσει καὶ εἰς τὰ δύο μέρη τοῦ $ΑΒ + ΑΓ$, προκύπτει $ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ < ΑΒΔ + ΑΓΔ$, τουτέϛι μικρότερον περιφερείας. σχ. 224.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν κάθε σφαιρικοῦ πολυγώνου εἶναι μικρότερον τῆς περιφερείας μεγίϛου κύκλου.

Ἔϛω, παραδείγματος χάριν, τὸ πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ ἂς προεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΔΓ, ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Ζ· ἐπειδὴ ΒΓ εἶναι μικρότερον τοῦ $ΒΖ + ΓΖ$, ἡ περίμετρος τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ τετραπλεύρου ΛΕΔΖ. Ἂς προεκβληθῶσιν ἐκ νέου αἱ πλευραὶ ΛΕ, ΖΔ, ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Η· θέλει εἶναι ΕΔ < ΕΗ + ΗΔ· λοιπὸν ἡ περίμετρος τοῦ τετραπλεύρου ΛΕΔΖ εἶναι μικροτέρα τῆς τοῦ τριγώνου ΛΖΗ· αὕτη εἶναι μικροτέρα τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου· λοιπὸν πολὺ περισσότερον ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι μικροτέρα τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου. σχ. 225.

Σχόλιον. Η πρότασις αὕτη εἶναι τῷ ὄντι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ΚΒ΄ τοῦ ε΄ βιβλίου· διότι ἐὰν Ο ἦναι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν εἰς τὴν στιγμὴν Ο, γωνίαν στερεὰν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους γωνίας ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ, κ. τ. λ. τώρα ἑκάστη τούτων τῶν γωνιῶν ἔχει μέτρον μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ πενταγώνου· λοιπὸν νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου εἶναι μικρότερον περιφερείας μεγίστου κύκλου, ἄλλο δὲν εἶναι παρὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν πρέπει νὰ ἦναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν. Η ἀπόδειξις τὴν ὁποίαν ἐδώκαμεν εἶναι διαφορετικὴ τῆς τοῦ ε΄ βιβλίου· ἀλλὰ καὶ αἱ δύο προϋποθέτουσιν ὅτι τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ εἶναι κυρτὸν, ἢ ὅτι οὐδεμία πλευρὰ προεκβαλλομένη τέμνει τὸ σχῆμα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ΄.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ μεγίστου κύκλου ΑΜΒ ἀχθῇ κάθετος ἡ διάμετρος ΔΕ, τὰ ἄκρα Δ καὶ Ε ταύτης τῆς διαμέτρου θέλουν εἶναι οἱ πόλοι τοῦ κύκλου ΑΜΒ, καὶ ὅλων τῶν μικρῶν κύκλων, ὡς ΖΝΗ, τῶν παραλλήλων μὲ αὐτόν. σχ. 220.

Διότι οὖσα ἡ ΔΓ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΜΒ, εἶναι κάθετος εἰς ὅλας τὰς εὐθείας ΓΑ, ΓΜ, ΓΒ, κ. τ. λ. ἠγμένας ἀπὸ τὸν πόδα της εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον· λοιπὸν ὅλα τὰ τόξα ΔΑ, ΔΜ, ΔΒ, κ. τ. λ. εἶναι τεταρτημόρια περιφερείας· τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰ τόξα ΕΑ, ΕΜ, ΕΒ, κ. τ. λ. λοιπὸν ἕκαςον τῶν σημείων Δ καὶ Ε ἰσάκις ἀπέχει ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ΑΜΒ· λοιπὸν εἶναι οἱ πόλοι ταύτης τῆς περιφερείας. (ὁρ. 5).

Δεύτερον, ἡ ἀκτὶς ΔΓ, κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΜΒ, εἶναι καὶ κάθετος εἰς τὸ παράλληλον αὐτοῦ ΖΝΗ· λοιπὸν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Ο τοῦ κύκλου ΖΝΗ (πρό. 1)· λοιπὸν ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν αἱ πλάγιαι ΔΖ, ΔΝ, ΔΗ, αἱ πλάγιαι αὗται ἰσάκις θέλουν ἀπέχει τῆς καθέτου ΔΟ καὶ θέλουν εἶναι ἴσαι. Ἀλλ' ὅταν αἱ χορδαὶ ἦναι ἴσαι, τὰ τόξα εἶναι ἴσα· λοιπὸν ὅλα τὰ τόξα ΔΖ, ΔΝ, ΔΗ, κ. τ. λ. εἶναι ἴσα μεταξύ των· ὅθεν ἡ ςιγμὴ Δ εἶναι ὁ πόλος τοῦ μικροῦ κύκλου ΖΝΗ, καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ςιγμὴ Ε εἶναι ὁ ἄλλος πόλος.

Πόρισμα Α'. Κάθε τόξον ΔΜ ἠγμένον ἀπὸ μίαν ςιγμὴν τόξου μεγίςου κύκλου ΑΜΒ εἰς τὸν πόλον του εἶναι ἓν τέταρτον περιφερείας, τὸ ὁποῖον διὰ συντομίαν θέλομεν ὀνομάζει τεταρτημόριον (quadrant), καὶ τὸ τεταρτημόριον τοῦτο κάμνει εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ὀρθὴν γωνίαν μὲ τὸ τόξον ΑΜ. Διότι, οὔσης τῆς γραμμῆς ΔΓ καθέτου εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΜΓ, κάθε ἐπίπεδον ΔΜΓ δι' αὐτῆς διερχόμενον εἶναι κάθετον εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΜΓ (18, 6)· λοιπὸν ἡ γωνία τούτων τῶν ἐπιπέδων, ἤ, κατὰ τὸν ς' ὁρισμὸν, ἡ γωνία ΑΜΔ εἶναι ὀρθή.

Β'. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν πόλον δεδομένου τόξου ΑΜ, ἄγομεν τὸ ἀπροσδιόριςον τόξον ΜΔ κάθετον εἰς ΑΜ, λαμβάνομεν ΜΔ ἴσον μὲ τεταρτημόριον, καὶ ἡ ςιγμὴ Δ θέλει εἶναι εἷς τῶν πόλων τοῦ τόξου ΑΜ· ἢ ἄγομεν εἰς τὰς δύο ςιγμὰς Α καὶ Μ τὰ τόξα ΑΔ καὶ ΜΔ κάθετα εἰς ΑΜ, ἡ ςιγμὴ τῆς συνδρομῆς Δ τῶν δύο τούτων τόξων θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος πόλος.

Γ'. Αντιςρόφως, ἐὰν τὸ ἀπόςημα τῆς ςιγμῆς Δ ἀπὸ καθὲν τῶν σημείων Α καὶ Μ ἦναι ἴσον μὲ τεταρτημόριον, λέγω ὅτι ἡ ςιγμὴ Δ θέλει εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΑΜ, καὶ ἐνταῦτῷ αἱ γωνίαι ΔΑΜ, ΑΜΔ θέλουν εἶναι ὀρθαί.

Διότι ἔςω Γ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, καὶ ἄς ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΓΑ, ΓΔ, ΓΜ: ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΓΔ, ΜΓΔ εἶναι ὀρθαί, ἡ γραμμὴ ΓΔ εἶναι κάθετος εἰς τὰς δύο εὐθείας ΓΑ, ΓΜ· λοιπὸν εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδόν των· λοιπὸν ἡ ςιγμὴ Δ εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΑΜ, καὶ ἑπομένως αἱ γωνίαι ΔΑΜ, ΑΜΔ, εἶναι ὀρθαί.

Σχόλιον. Διὰ τῶν ἰδιοτήτων τῶν πόλων δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τόξα κύκλου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μὲ τὴν αὐτὴν εὐκολίαν μὲ τὴν ὁποίαν γράφομεν αὐτὰ ἐπὶ ἐπιπέδου ἐπιφανείας. Βλέπομεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἐὰν ςρέψωμεν τὸ τόξον ΔΖ ἢ κάθε ἄλλην γραμμὴν τοῦ αὐτοῦ διαςήματος ὁλόγυρα τῆς ςιγμῆς Δ, τὸ ἄκρον Ζ θέλει γράψει τὸν μικρὸν κύκλον ΖΝΗ· καὶ ἐὰν ςρέψωμεν τὸ τεταρτημόριον ΔΖΑ ὁλόγυρα τῆς ςιγμῆς Δ, τὸ ἄκρον Α θέλει γράψει τόξον μεγίςου κύκλου τὸ ΑΜ.

Ἐὰν λάβωμεν χρείαν νὰ προεκβάλλωμεν τὸ τόξον ΑΜ, ἢ ἐὰν δὲν ἔχωμεν δεδομένας παρὰ μόνον τὰς ςιγμὰς Α καὶ Μ διὰ τῶν ὁποίων τὸ τόξον τοῦτο πρέπει νὰ διέλθῃ, κατὰ πρῶτον προσδιορίζομεν τὸν πόλον Δ διὰ τῆς κοινῆς τομῆς δύο τόξων γεγραμμένων ἐκ τῶν ςιγμῶν Α καὶ Μ ὡς ἐκ κέντρων μὲ διάςημα ἴσον μὲ τεταρτημόριον· εὑρεθέντος τοῦ πόλου Δ, γράφομεν ἐκ τῆς ςιγμῆς Δ ὡς ἐκ κέντρου καὶ μὲ τὸ αὐτὸ διάςημα τὸ τόξον ΑΜ καὶ τὴν προεκβολήν του.

Τέλος, ἐὰν λάβωμεν χρείαν ἀπὸ δεδομένην ςιγμὴν Π νὰ καταβάσωμεν τόξον κάθετον ἐπὶ τοῦ δεδομένου ΑΜ, προεκβάλλομεν τοῦτο εἰς Σ ἕως οὗ τὸ διάςημα ΠΣ νὰ ἦναι ἴσον μὲ τεταρτημόριον· ἀκολούθως ἐκ τοῦ πόλου Σ καὶ μὲ τὸ αὐτὸ διάστημα γράφομεν τὸ τόξον ΠΜ, τὸ ὁποῖον θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον κάθετον τόξον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Κάθε ἐπίπεδον κάθετον εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος εἶναι ἐφαπτόμενον εἰς τὴν σφαῖραν. σχ. 226.

Ἴσω ΖΑΗ ἐπίπεδον κάθετον εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΟΑ· ἐὰν ληφθῇ ὁποιονδήποτε σημεῖον Μ ἐπὶ τούτου τοῦ ἐπιπέδου, καὶ ἐπιζευχθῇ ΟΜ καὶ ΑΜ, ἡ γωνία ΟΑΜ θέλει εἶναι ὀρθή, καὶ οὕτως τὸ διάστημα ΟΜ θέλει εἶναι μεῖζον τοῦ ΟΑ. Η στιγμὴ Μ εἶναι λοιπὸν ἐκτὸς τῆς σφαίρας· καί, ἐπειδὴ τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ κάθε ἄλλο σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ΖΑΗ, ἔπεται ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἄλλο κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν σφαῖραν δὲν ἔχει παρὰ μόνον τὸ Α· λοιπὸν ἅπτεται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας (ὁρ. 4).

Σχόλιον. Δυνάμεθα ὡσαύτως νὰ δείξωμεν ὅτι δύο σφαῖραι ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχουν, καὶ ἑπομένως ἅπτονται ἀλλήλων: ὅταν τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων των ἦναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων των· τότε τὰ κέντρα καὶ ἡ στιγμὴ τῆς ἀφῆς εἶναι ἐπ' εὐθείας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Η γωνία ΒΑΓ τὴν ὁποίαν κάμνουν μεταξὺ των δύο τόξα μεγίστων κύκλων ΑΒ, ΑΓ, εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΖΑΗ, τὴν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας τούτων τῶν τόξων εἰς τὴν στιγμὴν Α: ἔχει ὁμοίως διὰ μέτρον τὸ τόξον ΔΕ, γραφόμενον ἐκ τῆς στιγμῆς Α ὡς ἐκ πόλου μεταξὺ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ, προεκβαλλομένων ἐὰν ἦναι ἀναγκαῖον. σχ. 226.

Διότι ἡ ἐφαπτομένη ΑΖ, ἠγμένη εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τόξου ΑΒ, εἶναι κάθετος εἰς τὴν ἀκτῖνα ΑΟ· ἡ ἐφαπτομένη ΑΗ, ἠγμένη εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τόξου ΑΓ, εἶναι κάθετος εἰς τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα ΑΟ· λοιπὸν ἡ γωνία ΖΑΗ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν τῶν ἐπιπέδων ΟΑΒ,ΟΑΓ (17, 5), ἥτις εἶναι ἡ τῶν τόξων ΑΒ, ΑΓ, καὶ σημειοῦται διὰ ΒΑΓ.

Παρομοίως, ἐὰν τὸ τόξον ΑΔ ἦναι ἴσον μὲ τεταρτημόριον, καθὼς καὶ ΑΕ, αἱ γραμμαὶ ΟΔ, ΟΕ, θέλουν εἶναι κάθεται εἰς ΑΟ, καὶ ἡ γωνία ΔΟΕ θέλει εἶναι ἀκόμη ἴση μὲ τὴν γωνίαν τῶν ἐπιπέδων ΑΟΔ, ΑΟΕ· λοιπὸν τὸ τόξον ΔΕ εἶναι τὸ μέτρον τῆς γωνίας τούτων τῶν ἐπιπέδων, ἢ τὸ μέτρον τῆς γωνίας ΓΑΒ.

Πόρισμα. Αἱ γωνίαι τῶν σφαιρικῶν τριγώνων ἠμποροῦν νὰ παραβάλλωνται μεταξύ των διὰ τῶν τόξων μεγίστων κύκλων γεγραμμένων ἐκ τῶν κορυφῶν των, ὡς ἐκ πόλων καὶ μεταξὺ τῶν πλευρῶν των περιεχομένων: ὅθεν εὔκολον εἶναι νὰ κάμωμεν γωνίαν ἴσην μὲ δεδομένην.

Σχόλιον. Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι, ὡς ΑΓΟ καὶ ΒΓΝ εἶναι ἴσαι· διότι ἢ ἡ μία ἢ ἡ ἄλλη πάντοτε εἶναι ἡ σχηματιζομένη γωνία ἀπὸ τὰ δύο ἐπίπεδα ΑΓΒ, ΟΓΝ.

Βλέπομεν ὡσαύτως ὅτι εἰς τὴν συνάπαντησιν δύο τόξων ΑΓΒ,ΟΓΝ, αἱ δύο προσκείμεναι γωνίαι ΑΓΟ,ΟΓΒ ὁμοῦ λαμβανόμεναι, ἰσοδυναμοῦν πάντοτε μὲ δύο ὀρθάς. σχ. 238.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δεδομένου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἐὰν ἐκ τῶν στιγμῶν Α, Β, Γ, ὡς ἐκ πόλων, γραφθῶσι τὰ τόξα ΕΖ, ΖΔ, ΔΕ, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ· ἀντιστρόφως αἱ τρεῖς στιγμαὶ Δ, Ε, Ζ, θέλουν εἶναι οἱ πόλοι τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ. σχ. 227.

Διότι ἐπειδὴ ἡ στιγμὴ Α εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΕΖ, τὸ διάστημα ΑΕ εἶναι τεταρτημόριον· ἐπειδὴ ἡ στιγμὴ

Γ εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΔΕ, τὸ διάστημα ΓΕ εἶναι παρομοίως τεταρτημόριον· λοιπὸν ἡ στιγμὴ Ε ἀπέχει τεταρτημόριον ἀπὸ καθὲν τῶν σημείων Α καὶ Γ· εἶναι λοιπὸν ὁ πόλος τοῦ τόξου ΑΓ (6, πόρ. 3). Ὁμοίως δείξομεν ὅτι Δ εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΒΓ, καὶ Ζ ὁ τοῦ τόξου ΑΒ.

Πόρισμα. Λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ δύναται νὰ γραφθῇ διὰ τοῦ ΔΕΖ, ὡς τὸ ΔΕΖ διὰ τοῦ ΑΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τῶν αὐτῶν κειμένων, ἑκάστη γωνία ἑνὸς τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΕΖ, θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὴν ἡμιπεριφέρειαν μεῖον τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς τὸ ἄλλο τρίγωνον. σχ. 227.

Ἂς προεκβληθῶσιν, ἐὰν ἦναι ἀναγκαῖον, αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, ἕως οὗ νὰ συναπαντήσωσι τὴν ΕΖ εἰς Η καὶ Θ· ἐπειδὴ ἡ στιγμὴ Α εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΗΘ, ἡ γωνία Α ἔχει μέτρον τὸ τόξον ΗΘ. Ἀλλὰ τὸ τόξον ΕΘ, ὡς καὶ τὸ ΗΖ, εἶναι τεταρτημόριον, ἐπειδὴ Ε εἶναι ὁ πόλος τοῦ ΑΘ, καὶ Ζ ὁ πόλος τοῦ ΑΗ· λοιπὸν ΕΘ + ΗΖ ἰσοῦται μὲ ἡμιπεριφέρειαν. Τώρα ΕΘ + ΗΖ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ ΕΖ + ΗΘ· λοιπὸν τὸ τόξον ΗΘ μέτρον τῆς γωνίας Α εἶναι ἴσον μὲ ἡμιπεριφέρειαν μεῖον τὴν πλευρὰν ΕΖ· ὡσαύτως ἡ γωνία Β ἔχει μέτρον ½ περ. — ΔΖ, καὶ ἡ γωνία Γ, ½ περ. — ΔΕ.

Η ἰδιότης αὕτη πρέπει νὰ ἦναι ἀντίστροφος μεταξὺ τῶν δύο τριγώνων, διότι γράφονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ ἓν διὰ μέσου τοῦ ἄλλου. Οὕτω θέλομεν εὕρῃ ὅτι αἱ γωνίαι Δ, Ε, Ζ, τοῦ τριγώνου ΔΕΖ μετροῦνται διαδοχικῶς ὑπὸ ½ περ. — ΒΓ, ½ περ. — ΑΓ, ½ περ. — ΑΒ. Τῷ ὄντι ἡ γωνία Δ, παραδείγματος χάριν, ἔχει μέτρον τὸ τόξον ΜΙ. Τώρα ΜΙ + ΒΓ = ΜΓ + ΒΙ = ½ περ. · λοιπὸν τὸ τόξον ΜΙ, μέτρον τῆς γωνίας Δ, = ½ περ. — ΒΓ, καὶ οὕτω διὰ τὰς ἄλλας.

Σχόλιον. Πρέπει νὰ σημειώσωμεν ὅτι ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΔΕΖ δυνατὸν νὰ σχηματισθῶσι τρία ἄλλα ἀπὸ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν τριῶν τόξων ΔΕ, ΕΖ, ΔΖ. Ἀλλ' ἡ παροῦσα πρότασις δὲν ἔχει χώραν παρὰ διὰ τὸ κεντρικὸν τρίγωνον, τὸ ὁποῖον διακρίνεται ἀπὸ τὰ τρία ἄλλα ἐκ τούτου ὅτι αἱ δύο γωνίαι Α καὶ Δ κεῖνται ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΒΓ, αἱ δύο γωνίαι Β καὶ Ε ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΓ, καὶ αἱ δύο γωνίαι Γ καὶ Ζ ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ. (σχ. 228 καὶ 227).

Διάφορα ὀνόματα δίδονται εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ· ἡμεῖς θέλομεν τὰ ὀνομάζει τρίγωνα πολικά.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ΄.

ΛΗΜΜΑ.

Δεδομένου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἐὰν ἐκ τοῦ πόλου Α καὶ μὲ τὸ διάστημα ΑΓ γραφθῇ τὸ τόξον τοῦ μικροῦ κύκλου ΔΕΓ· ἐὰν ἐκ τοῦ πόλου Β καὶ μὲ τὸ διάστημα ΒΓ γραφθῇ παρομοίως τὸ τόξον ΔΖΓ, καὶ ἐκ τῆς στιγμῆς Δ, ὅπου τὰ τόξα ΔΕΓ, ΔΖΓ τέμνονται, ἀχθῶσι τὰ τόξα μεγίστων κύκλων ΑΔ, ΔΒ· λέγω ὅτι τὸ οὕτω σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΔΒ θέλει ἔχει ὅλα του τὰ μέρη ἴσα μὲ τὰ τοῦ τριγώνου ΑΓΒ. σχ. 229.

Διότι, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ πλευρὰ ΑΔ=ΑΓ, ΔΒ=ΒΓ, ΑΒ εἶναι κοινή· λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευράς των ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν. Λέγω τώρα ὅτι αἱ ἀπέναντι εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Τῷ ὄντι, ἐὰν ὑποθέσωμεν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας εἰς Ο, ἠμποροῦμεν νὰ φαντασθῶμεν γωνίαν στερεὰν σχηματιζομένην εἰς τὴν στιγμὴν Ο ἀπὸ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας ΑΟΒ, ΑΟΓ, ΒΟΓ· ἠμποροῦμεν ὡσαύτως νὰ φαντασθῶμεν μίαν δευτέραν γωνίαν στερεὰν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας ΑΟΒ, ΑΟΔ, ΒΟΔ. Καὶ ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τοῦ τριγώνου ΑΔΒ, ἕπεται ὅτι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν μίαν τούτων τῶν στερεῶν γωνιῶν εἶναι ἴσαι μὲ τὰς ἐπιπέδους γωνίας αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν ἄλλην στερεὰν γωνίαν, ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν· ἀλλ' εἰς ταύτην τὴν περίστασιν ἀπεδείχθη (23, 5) ὅτι τὰ ἐπίπεδα εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται αἱ ἴσαι γωνίαι ἰσάκις κλίνουν μεταξύ των· λοιπὸν αἱ γωνίαι τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΔΑΗ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τοῦ τριγώνου ΓΑΒ, τουτέστι ΔΑΒ=ΒΑΓ, ΔΒΑ=ΑΒΓ, καὶ ΑΔΒ=ΑΓΒ· λοιπὸν αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΔΒ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου ΑΓΒ.

Σχόλιον. Η ἰσότης τῶν τριγώνων τούτων δὲν εἶναι ὅμως ἀπόλυτος ἢ ἐπιθέσεως ἰσότης, διότι ἀδύνατον ἤθελον εἶναι νὰ ἐφαρμόσωσιν ἀκριβῶς τὰ δύο τρίγωνα, ἐκτὸς εἰς τὴν περίστασιν καθ' ἣν ἤθελον εἶναι ἰσοσκελῆ. Η περὶ ἧς ὁ λόγος ἰσότης εἶναι ἐκείνη τὴν ὁποίαν ὠνομάσαμεν ἰσότητα ἐκ συμμετρίας, καὶ δι' αὐτὸν τὸν λόγον καὶ τὰ τρίγωνα ΑΓΒ, ΑΔΒ θέλομεν ὀνομάζει τρίγωνα συμμετρικά.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας, ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν κείμενα, εἶναι ἴσα καθ' ὅλα των τὰ μέρη, ὅταν ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν αἱ ὁποῖαι νὰ ἦναι ἴσαι, ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν.

Εστω ἡ πλευρὰ ΑΒ=ΕΖ, ἡ πλευρὰ ΑΓ=ΕΗ, καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ=ΖΕΗ· τὸ τρίγωνον ΕΖΗ ἠμπορεῖ νὰ τεθῇ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἢ ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ του ΑΒΔ, καθ' ὃν τρόπον ἐπιτίθενται δύο εὐθύγραμμα τρίγωνα ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων. Λοιπὸν ὅλα τὰ μέρη τοῦ τριγώνου ΕΖΗ θέλουν εἶναι ἴσα μὲ τὰ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τουτέστιν ἐκτὸς τῶν τριῶν μερῶν τῶν ὑποτιθεμένων ἴσων, θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ ΒΓ=ΖΗ, ἡ γωνία ΑΒΓ=ΕΖΗ, καὶ ἡ γωνία ΑΓΒ=ΒΗΖ. σχ. 230.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας, ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν κείμενα, εἶναι ἴσα καθ' ὅλα των τὰ μέρη, ὅταν ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην προσκειμένην εἰς δύο γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν.

Διότι δυνάμεθα νὰ ἐπιθέσωμεν τὸ ἓν τούτων τῶν τριγώνων ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἢ ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ του, ὡς ἐκάμαμεν εἰς παρομοίαν περίστασιν διὰ τὰ εὐθύγραμμα τρίγωνα. Βλέπε προτ. Ζ'. βιβλ. Α'.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας, ἢ ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν κείμενα, ἦναι ἰσόπλευρα μεταξύ των, θέλουν εἶναι ὡσαύτως καὶ ἰσογώνια, καὶ αἱ ἴσαι γωνίαι θέλουν εἶναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν.

Τοῦτο εἶναι φανερὸν ἐκ τῆς ΙΑ' προτάσεως, ὅπου εἴδομεν ὅτι μὲ τρεῖς δεδομένας πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ δύο μόνον τρίγωνα ΑΓΒ, ΑΒΔ δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν, διαφορετικὰ μὲν ὡς πρὸς τὴν θέσιν τῶν μερῶν, ἀλλ' ἴσα ὡς πρὸς τὸ μέγεθος τῶν ἰδίων τούτων μερῶν. Λοιπὸν δύο τρίγωνα ἰσόπλευρα μεταξύ των εἶναι ἢ ἀπολύτως ἴσα, ἢ τοὐλάχιστον ἴσα ἐκ συμμετρίας· καὶ εἰς τὰς δύο περιστάσεις εἶναι ἰσογώνια, καὶ αἱ ἴσαι γωνίαι εἶναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν. σχ. 229.