ἐπὶ τ ΣΟ· λοιπὸν κάθε πυραμὶς ἔχει διὰ μέτρον τὸ τριτημόριον τοῦ γιγομένου τῆς βάσεώς της ἐπὶ τοῦ ὕψους της.

Πόρισμα Α΄. Κάθε πυραμὶς εἶναι τὸ τριτημόριον τοῦ πρίσματος τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους.

Πόρισμα Β΄. Δύο πυραμίδες τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των, καὶ δύο πυραμίδες τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των.

Σχόλιον. Ἠμποροῦμεν νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν ςερεότητα κάθε πολυέδρου σώματος ἀναλύοντές το εἰς πυραμίδας, καὶ ἡ ἀνάλυσις αὕτη ἠμπορεῖ νὰ γένῃ κατὰ πολλοὺς τρόπους. Ο ἁπλούςερος συνίςαται εἰς τὸ νὰ διέλθωσι τὰ ἐπίπεδα τῆς διαιρέσεως ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς αὐτῆς ςερεᾶς γωνίας, ἤ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτό, νὰ ἑνωθῇ ἡ κορυφὴ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ςερεᾶς γωνίας μὲ τὰς κορυφὰς τῶν ἄλλων ςερεῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου· τότε θέλουν προκύψει τόσαι μερικαὶ πυραμίδες ὅσας ἕδρας ἔχει τὸ πολύεδρον, ἐκτὸς ἐκείνων αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν ςερεὰν γωνίαν ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀναχωροῦσι τὰ ἐπίπεδα τῆς διαιρέσεως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο συμμετρικὰ πολύεδρα εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των ἢ ἴσα κατὰ τὴν ςερεότητα.

Διότι 1.ον δύο τριγωνικαὶ συμμετρικαὶ πυραμίδες, ὡς ΣΑΒΓ, ΤΑΒΓ ἔχουν κοινὸν μέτρον τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ΑΒΓ ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους ΣΟ ἢ ΤΟ· λοιπὸν αἱ πυραμίδες αὗται εἶναι ἰσοδύναμοι μεταξύ των. σχ. 202.

2.ον Ἐὰν καθ' ὁποιονδήποτε τρόπον μοιρασθῇ ἓν τῶν συμμετρικῶν πολυέδρων εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας, τὸ ἄλλο πολύεδρον ἠμπορεῖ ὡσαύτως νὰ μοιρασθῇ εἰς συμμετρικὰς τριγωνικὰς πυραμίδας. Τώρα αἱ συμμετρικαὶ τριγωνικαὶ πυραμίδες εἶναι ἰσοδύναμοι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν· λοιπὸν τὰ ὅλα πολύεδρα θέλουν εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των ἢ ἴσα κατὰ τὴν ςερεότητα.

Σχόλιον. Η πρότασις αὐτὴ φαίνεται ὅτι προκύπτει ἀμέσως ἀπὸ τὴν Β' πρότασιν, ὅπου δεικνύεται ὅτι εἰς δύο συμμετρικὰ πολύεδρα, ὅλα τὰ συςατικὰ μέρη τοῦ ἑνὸς εἶναι ἴσα μὲ τὰ συςατικὰ μέρη τοῦ ἄλλου· πλὴν δὲν ἦτον ὀλιγώτερον ἀναγκαῖον νὰ ἀποδειχθῇ μὲ τρόπον ἀκριβῆ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν μία πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῆς βάσεώς της, ὁ ἐναπομένων κορμὸς ἀφαιρεθείσης τῆς μικρᾶς πυραμίδος, εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων τῶν ὁποίων κοινὸν μὲν ὕψος ἤθελεν εἶναι τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ, βάσεις δὲ, ἡ κάτω βάσις τοῦ κορμοῦ, ἡ ἄνω βάσις τοῦ ἰδίου, καὶ μία μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τούτων βάσεων.

Ἔςω ΣΑΒΓΔΕ μία πυραμὶς ἡ ὁποία ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου αβδ παραλλήλου τῆς βάσεως· ἔςω ΤΖΗΘ μία τριγωνικὴ πυραμὶς τῆς ὁποίας ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος ἔςωσαν ἴσα ἢ ἰσοδύναμα μὲ τὰ τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔΕ. Ημποροῦμεν νὰ ὑποθέσωμεν τὰς δύο βάσεις κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· καὶ τότε τὸ ἐπίπεδον αβδ προεκβαλλόμενον θέλει προσδιορίσει εἰς τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα μίαν τομὴν ζηθ ἀπέχουσαν τὸ αὐτὸ διάςημα ἀπὸ τὸ κοινὸν ἐπίπεδον τῶν βάσεων: ὅθεν ἕπεται ὅτι ἡ τομὴ ζηθ εἶναι πρὸς τὴν τομὴν αβδ, ὡς ἡ βάσις ΖΗΘ πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΔ (πρβ. 16)· καὶ ἐπειδὴ αἱ βάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι, ἕπεται ὅτι καὶ αἱ τομαὶ εἶναι παρομοίως ἰσοδύναμοι. Αἱ πυραμίδες λοιπὸν Σαβγδε, Τζηθ εἶναι ἰσοδύναμοι, ὡς ἔχουσαι τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσεις ἰσοδυνάμους. Αἱ ὅλαι πυραμίδες ΣΑΒΓΔΕ, ΤΖΗΘ, εἶναι ἰσοδύναμοι διὰ τὸν αὐτὸν λόγον· λοιπὸν οἱ κορμοὶ ΑΒΓδαβ, ΖΗΘθζη, εἶναι ἰσοδύναμοι, καὶ ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἐκφωνηθεῖσαν πρότασιν διὰ τὸν κορμὸν τριγωνικῆς πυραμίδος. σχ. 217.

Ἔςω ΖΗΘθζη κορμὸς τριγωνικῆς πυραμίδος μὲ παραλλήλους βάσεις: διὰ τῶν τριῶν σημείων Ζ, η, Θ, ἂς ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον ΖηΘ, τὸ ὁποῖον ἀφαιρεῖ ἀπὸ τὸν κορμὸν τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ηΖΗΘ. Η πυραμὶς αὕτη ἔχει διὰ βάσιν τὴν κάτω βάσιν ΖΗΘ τοῦ κορμοῦ, διὰ ὕψος τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ, διότι ἡ κορυφὴ η εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς ἄνω βάσεως ζηθ. σχ. 218.

Ἀφ' οὗ ἀφαιρεθῇ αὕτη ἡ πυραμὶς, μένει ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ηζθΘΖ, τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ εἶναι η καὶ ἡ βάσις ζθΘΖ. Διὰ τῶν τριῶν σημείων ζ, η, Θ ἂς ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον ζηΘ, τὸ ὁποῖον μοιράζει τὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα εἰς δύο τριγωνικὰς ηΖζΘ, ηζθΘ. Η τελευταία αὕτη ἔχει διὰ βάσιν τὴν ἄνω βάσιν ηζθ τοῦ κορμοῦ, καὶ διὰ ὕψος τὸ ὕψος τοῦ ἰδίου, ἐπειδὴ ἡ κορυφή της Θ ἀνήκει εἰς τὴν κάτω βάσιν: οὕτως ἔχομεν δύο τῶν τριῶν πυραμίδων αἵτινες πρέπει νὰ συγκροτήσουν τὸν κορμόν.

Μένει νὰ θεωρήσωμεν τὴν τρίτην ηΖζΘ: τώρα, ἐὰν ἄξωμεν ηΚ′ παράλληλον τῇ ζΖ, καὶ φαντασθῶμεν νέαν πυραμίδα ζΖΘΚ′, τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ εἶναι Κ′ καὶ ἡ βάσις ΖζΘ, αἱ δύο αὗται πυραμίδες θέλουν ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΖζΘ· θέλουν ἔχει ὡσαύτως τὸ ἴδιον ὕψος, διότι αἱ κορυφαὶ η καὶ Κ′ εὑρίσκονται ἐπὶ μιᾶς γραμμῆς ηΚ′ παραλλήλου τῇ Ζζ, καὶ ἑπομένως παραλλήλου τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, καὶ τὰ σημεῖα εὐθείας παραλλήλου ἑνὸς ἐπιπέδου ἰσάκις ἀπέχουσιν ἀπ' αὐτό· λοιπὸν αἱ δύο αὗται πυραμίδες εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἀλλ' ἡ πυραμὶς ζΖΚ′Θ ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα τὴν κορυφήν της εἰς ζ, καὶ οὕτως θέλει ἔχει τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ· ὅσον διὰ τὴν βάσιν της ΖΚ′Θ, λέγω ὅτι εἶναί μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν βάσεων ΖΗΘ, ζηθ.

Τῷ ὄντι τὰ τρίγωνα ΖΘΚ', ζηθ, ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην Ζ=ζ, καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην ΖΚ'=ζη· ἔχομεν λοιπὸν (24, 3) ΖΘΚ' : ζηθ : : ΖΘ : ζθ· ἔχομεν ὡσαύτως ΖΘΗ : ΖΘΚ' : : ΖΗ : ΖΚ' ἢ ζη. Ἀλλὰ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΖΗΘ, ζηθ, δίδουν ΖΗ : ζη : : ΖΘ : ζθ· λοιπὸν ΖΗΘ : ΖΘΚ' : : ΖΘΚ' : ζηθ· καὶ οὕτως ἡ βάσις ΖΘΚ' εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο βάσεων ΖΗΘ, ζηθ. Λοιπὸν κορμὸς τριγωνικῆς πυραμίδος, μὲ παραλλήλους βάσεις, ἰσοδυναμεῖ μὲ τρεῖς πυραμίδας, τῶν ὁποίων κοινὸν μὲν ὕψος εἶναι τὸ ὕψος τοῦ κορμοῦ, βάσεις δὲ, ἡ κάτω βάσις τοῦ κορμοῦ, ἡ ἄνω βάσις τοῦ ἰδίου, καὶ μία μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τούτων βάσεων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν τριγωνικὸν πρίσμα τοῦ ὁποίου ΑΒΓ εἶναι ἡ βάσις τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου ΔΕΣ κλίνοντος (1) πρὸς ταύτην τὴν βάσιν, τὸ προκύπτον στερεὸν ἀπὸ ταύτην τὴν τομὴν ΑΒΓΔΕΣ, θέλει ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι Δ, Ε, Σ, καὶ βάσις κοινὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ σχ. 216.

Διὰ τῶν τριῶν σημείων Σ, Α, Γ, ἂς διέλθῃ τὸ ἐπίπεδον ΣΑΓ, τὸ ὁποῖον ἀφαιρεῖ ἀπὸ τὸ κολοβὸν πρίσμα (Prisme tronqué) ΑΒΓΔΕΣ τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ΣΑΒΓ: ἡ πυραμὶς αὕτη ἔχει διὰ βάσιν ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὴν στιγμὴν Σ.

Ἀφαιρεθείσης ταύτης τῆς πυραμίδος, μένει ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΓΔΕ, τῆς ὁποίας Σ εἶναι ἡ κορυφὴ καὶ

---

(1) Τὸ τέμνον ἐπίπεδον ὑποτίθεται ὅτι κλίνει πρὸς τὴν βάσιν· διότι ἐὰν δὲν ἔκλινεν, ἤγουν ἐὰν ἦτον παράλληλον, τὸ προκύπτον στερεὸν ἤθελεν εἶναι ἐπίσης πρίσμα καὶ τοῦ σώματος τούτου ἠξεύρομεν νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν στερεότητα. Ο. Μ.

ΑΓΔΕ ἡ βάσις. Διὰ τῶν τριῶν κορυφῶν Σ, Ε, Γ ἂς ἀχθῇ προσέτι τὸ ἐπίπεδον ΣΕΓ, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα εἰς δύο τριγωνικὰς ΣΑΓΕ, ΣΓΔΕ.

Η πυραμὶς ΣΑΕΓ, ἥτις ἔχει διὰ βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΕΓ καὶ διὰ κορυφὴν τὴν ςιγμὴν Σ, εἶναι ἰσοδύναμος μὲ μίαν πυραμίδα ΕΑΒΓ, ἥτις ἤθελεν ἔχει διὰ βάσιν ΑΒΓ, καὶ κορυφὴν τὴν ςιγμὴν Β. Διότι αἱ δύο αὗται πυραμίδες ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν· ἔχουν ὡσαύτως τὸ ἴδιον ὕψος, ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ ΒΣ, οὖσα παράλληλος ἑκάστης τῶν γραμμῶν ΑΕ, ΓΔ εἶναι παράλληλος τοῦ ἐπιπέδου των ΑΓΕ· λοιπὸν ἡ πυραμὶς ΣΑΕΓ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν πυραμίδα ΕΑΒΓ, ἡ ὁποία ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα διὰ βάσιν ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὴν ςιγμὴν Ε.

Η τρίτη πυραμὶς ΣΓΔΕ ἠμπορεῖ νὰ τρεφθῇ κατὰ πρῶτον εἰς ΑΣΓΔ· διότι αἱ δύο αὗται πυραμίδες ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΣΓΔ· ἔχουν ὡσαύτως τὸ ἴδιον ὕψος, διότι ΑΕ εἶναι παράλληλος τοῦ ἐπιπέδου ΣΓΔ· λοιπὸν ἡ πυραμὶς ΣΓΔΕ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν ΑΣΓΔ· ἀκολούθως ἡ πυραμὶς ΑΣΓΔ ἠμπορεῖ νὰ τρεφθῇ εἰς ΑΒΓΔ, διότι αἱ δύο αὗται πυραμίδες ἔχουν κοινὴν τὴν βάσιν ΑΓΔ· ἔχουν ὡσαύτως τὸ ἴδιον ὕψος, διότι αἱ κορυφαί των Σ καὶ Β κεῖνται ἐπὶ μιᾶς παραλλήλου τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως. Λοιπὸν ἡ πυραμὶς ΣΓΔΕ, ἰσοδύναμος μὲ τὴν ΑΣΓΔ, εἶναι ὡσαύτως ἰσοδύναμος μὲ τὴν ΑΒΓΔ· ἀλλ' αὕτη ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχουσα διὰ βάσιν ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὴν ςιγμὴν Δ.

Λοιπὸν τέλος τὸ κολοβὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΣ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων αἵτινες ἔχουν διὰ κοινὴν βάσιν ΑΒΓ, καὶ αἱ κορυφαί των εἶναι διαδοχικῶς Δ, Ε, Σ.

Π ό ρ ι σ μ α. Ἐὰν αἱ κόψεις ΑΕ, ΒΣ, ΓΔ, ἦναι κάθετοι εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως, θέλουν εἶναι ἐνταυτῷ τὰ ὕψη τῶν τριῶν πυραμίδων αἱ ὁποῖαι συγκροτοῦν τὸ κολοβὸν πρίσμα· εἰς τρόπον ὥςε ἡ ςερεότης τοῦ κολοβοῦ πρίσματος, θέλει ἐκφράζεται διὰ $\frac{1}{3}$ ΑΒΓ × ΑΕ + $\frac{1}{3}$ ΑΒΓ × ΒΣ + $\frac{1}{3}$ ΑΒΓ × ΓΔ, ποσότης ἥτις ἄγεται εἰς $\frac{1}{3}$ ΑΒΓ × (ΑΕ + ΒΣ + ΓΔ).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ὅμοιαι τριγωνικαὶ πυραμίδες ἔχουν τὰς ὁμολόγους ἕδρας ὁμοίας, καὶ τὰς ὁμολόγους ςερεὰς γωνίας ἴσας.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν, αἱ δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΤΔΕΖ, εἶναι ὅμοιαι, ἐὰν τὰ δύο τρίγωνα ΣΑΒ, ΑΒΓ, ἦναι ὅμοια μὲ τὰ δύο ΤΔΕ, ΔΕΖ, καὶ ὁμοίως κείμενα, τουτέςιν ἐὰν ἡ γωνία ΑΒΣ = ΔΕΤ, ἡ ΒΑΣ = ΕΔΤ, ἡ ΑΒΓ = ΔΕΖ, ἡ ΒΑΓ = ΕΔΖ, καὶ προσέτι ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΣΑΒ, ΑΒΓ, ἦναι ἴση μὲ τὴν τῶν ἐπιπέδων ΤΔΕ, ΔΕΖ: τούτου τεθέντος, λέγω ὅτι αἱ πυραμίδες αὗται ἔχουν ὅλας τὰς ἕδρας ὁμοίας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ τὰς ὁμολόγους ςερεὰς γωνίας ἴσας. σχ. 203.

Ἂς ληφθῶσι ΒΗ = ΕΔ, ΒΘ = ΕΖ, ΒΙ = ΕΤ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΗΘ, ΗΙ, ΙΘ. Η πυραμὶς ΤΔΕΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν πυραμίδα ΙΗΒΘ· διότι, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ ΗΒ, ΒΘ, ἐλήφθησαν ἴσαι μὲ τὰς πλευρὰς ΔΕ, ΕΖ, καὶ ἡ γωνία ΗΒΘ εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ἴση μὲ τὴν ΔΕΖ, τὸ τρίγωνον ΗΒΘ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΔΕΖ· λοιπὸν, διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἐπίθεσιν τῶν δύο πυραμίδων, ἠμποροῦμεν κατὰ πρῶτον νὰ θέσωμεν τὴν βάσιν ΔΕΖ ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ΗΒΘ· ἀκολούθως, ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον ΔΤΕ κλίνει ἐπὶ τοῦ ΔΕΖ ὅσον τὸ ἐπίπεδον ΣΑΒ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ, φανερὸν εἶναι ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΔΕΤ θέλει πέσει ἀπροσδιορίςως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΣ. Αλλὰ, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ γωνία ΔΕΤ = ΗΒΙ, λοιπὸν ΕΤ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ΒΙ· καὶ ἐπειδὴ τὰ τέσσαρα σημεῖα Δ, Ε, Ζ, Τ, ἐφαρμόζουσι μὲ τὰ τέσσαρα Η, Β, Θ, Ι, καὶ δύο πολύεδρα τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κορυφῶν καὶ τὰς αὐτὰς κορυφὰς ἐφαρμόζουσιν· ἕπεται ὅτι καὶ ἡ πυραμὶς ΤΔΕΖ ἐφαρμόζει μὲ τὴν πυραμίδα ΙΗΒΘ.

Τώρα, ἐξ αἰτίας τῶν ἴσων τριγώνων ΔΕΖ, ΗΒΘ, ἔχομεν τὴν γωνίαν ΒΗΘ=ΕΔΖ=ΒΑΓ· λοιπὸν ΗΘ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΓ. Διὰ λόγον παρόμοιον ΗΙ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΣ· λοιπὸν τὸ ἐπίπεδον ΙΗΘ εἶναι παράλληλον τοῦ ΣΑΓ (13, 5). Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ τρίγωνον ΙΗΘ, ἢ τὸ ἴσον του ΤΔΖ, εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΣΑΓ (πρό. 15), καὶ τὸ τρίγωνον ΙΒΘ, ἢ τὸ ἴσον του ΤΕΖ, εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΣΒΓ· λοιπὸν αἱ δύο ὅμοιαι τριγωνικαὶ πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΤΔΕΖ, ἔχουν τὰς τέσσαρας ἕδρας ὁμοίας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν· περιπλέον ἔχουν καὶ τὰς ὁμολόγους ςερεὰς γωνίας ἴσας.

Διότι ἡ ςερεὰ γωνία Ε ἐτέθη ἤδη ἐπὶ τῆς ὁμολόγου της Β, καὶ τὸ αὐτὸ ἠμποροῦσε νὰ γένῃ διὰ δύο ἄλλας ὁμολόγους ςερεὰς γωνίας· πλὴν βλέπομεν ἀμέσως ὅτι δύο ὁμόλογοι ςερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι, παραδείγματος χάριν, αἱ γωνίαι Τ καὶ Σ, διότι εἶναι σχηματισμέναι ἀπὸ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν καὶ ὁμοίως κειμένας.

Λοιπὸν, δύο ὅμοιαι τριγωνικαὶ πυραμίδες ἔχουν τὰς ὁμολόγους ἕδρας ὁμοίας καὶ τὰς ὁμολόγους ςερεὰς γωνίας ἴσας.

Π ό ρ ι σ μ α Α. Τὰ ὅμοια τρίγωνα εἰς τὰς δύο πυραμίδας δίδουν τὰς ἀναλογίας ΑΒ : ΔΕ : : ΒΓ : ΕΖ : : ΑΓ : ΔΖ : : ΑΣ : ΔΤ : : ΣΒ : ΤΕ : : ΣΓ : ΤΖ· λοιπὸν *εἰς τὰς ὁμοίας τριγωνικὰς πυραμίδας, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι ἀνάλογοι.*

Β′. Καὶ ἐπειδὴ αἱ ὁμόλογοι ςερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἕπεται ὅτι *ἡ κλίσις δύο ὁποιωνδήποτε ἑδρῶν τῆς μιᾶς πυραμίδος εἶναι ἴση μὲ τὴν κλίσιν τῶν δύο ὁμολόγων ἑδρῶν τῆς ὁμοίας πυραμίδος.*

Γ'. Ἐὰν τμηθῇ ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓ ὑπὸ ἐπιπέδου ΗΙΘ παραλλήλου μιᾶς τῶν ἑδρῶν ΣΑΓ, ἡ μερικὴ πυραμὶς ΒΗΙΘ θέλει εἶναι ὁμοία μὲ τὴν ὅλην πυραμίδα ΒΑΣΓ: διότι τὰ τρίγωνα ΒΗΙ, ΒΗΘ εἶναι ὅμοια μὲ τὰ τρίγωνα ΒΑΣ, ΒΑΓ, τὸ καθὲν μὲ τὸ καθὲν, καὶ ὁμοίως κείμενα· ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων των εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ εἰς τὰ δύο μέρη· λοιπὸν αἱ δύο πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι.

Δ'. Ἐν γένει, ἐὰν τμηθῇ ὁποιαδήποτε πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ ὑπὸ ἐπιπέδου αβγδε παραλλήλου τῆς βάσεως, ἡ μερικὴ πυραμὶς Σαβγδε θέλει εἶναι ὁμοία μὲ τὴν ὅλην ΣΑΒΓΔΕ. Διότι αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ, αβγδε, εἶναι ὅμοιαι, καὶ, ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΑΓ, αγ, ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓ θέλει εἶναι ὁμοία μὲ τὴν πυραμίδα Σαβγ (πόρι. Γ'.)· λοιπὸν ἡ στιγμὴ Σ προσδιορίζεται ὡς πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ ὡς ἡ στιγμὴ Σ ὡς πρὸς τὴν βάσιν αβγ (ὁρ. 18)· λοιπὸν αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΒΓΔΕ, Σαβγδε, εἶναι ὅμοιαι. σχ. 214.

Σχόλιον. Ἀντὶ τῶν πέντε δεδομένων τὰ ὁποῖα ἀπαιτοῦνται ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν διὰ νὰ ἦναι δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ὅμοιαι, δυνατὸν νὰ ἀντικατασταθῶσι πέντε ἄλλα, κατὰ διαφόρους συνδυασμούς, καὶ ἤθελον προκύψει τόσα θεωρήματα, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἠμπορεῖ νὰ διακριθῇ τὸ ἀκόλουθον: Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι ὅταν ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους.

Διότι, ἐὰν ἔχωμεν τὰς ἀναλογίας ΑΒ : ΔΕ : : ΒΓ : ΕΖ : : ΑΓ : ΔΖ : : ΑΣ : ΔΤ : : ΣΒ : ΤΕ : : ΣΓ : ΤΖ, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι πέντε συνθήκας, τὰ τρίγωνα ΑΣΒ, ΑΒΓ θέλουν εἶναι ὅμοια μὲ τὰ τρίγωνα ΔΕΤ, ΔΕΖ καὶ ὁμοίως κείμενα. Ὡσαύτως τὸ τρίγωνον ΣΒΓ θέλει εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΤΕΖ· λοιπὸν αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν στερεὰν γωνίαν Β, θέλουν εἶναι ἴσαι μὲ τὰς ἐπιπέδους γωνίας αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν στερεὰν γωνίαν Ε; ἡ καθὲ μία μὲ τὴν καθε μίαν· ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΣΑΒ, ΑΒΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν ὁμολόγων των ΤΔΕ, ΔΕΖ, καὶ οὕτως αἱ δύο πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι. σχ. 203.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ὅμοια πολύεδρα ἔχουν τὰς ὁμολόγους ἕδρας ὁμοίας, καὶ τὰς ὁμολόγους ςερεὰς γωνίας ἴσας.

Εςω ΑΒΓΔΕ ἡ βάσις τοῦ ἑνὸς πολυέδρου· ἔςωσαν Μ καὶ Ν αἱ κορυφαὶ δύο ςερεῶν γωνιῶν, ἐκτὸς ταύτης τῆς βάσεως, προσδιοριζόμεναι ἀπὸ τὰς τριγωνικὰς πυραμίδας ΜΑΒΓ, ΝΑΒΓ, τῶν ὁποίων ἡ κοινὴ βάσις εἶναι ΑΒΓ· ἔςωσαν εἰς τὸ ἄλλο πολύεδρον, αβγδε ἡ ὁμόλογος βάσις ἡ ὁμοία μὲ τὴν ΑΒΓΔΕ, μ καὶ ν αἱ ὁμόλογοι κορυφαὶ τῶν Μ καὶ Ν, προσδιοριζόμεναι ἀπὸ τὰς πυραμίδας μαβγ, ναβγ, ὁμοίας μὲ τὰς πυραμίδας ΜΑΒΓ, ΝΑΒΓ· λέγω κατὰ πρῶτον ὅτι τὰ διαςήματα ΜΝ, μν, εἶναι ἀνάλογα μὲ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ΑΒ, αβ. σχ. 219.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ αἱ πυραμίδες ΜΑΒΓ, μαβγ, εἶναι ὅμοιαι, ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΜΑΓ, ΒΑΓ, εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν ἐπιπέδων μαγ, βαγ· παρομοίως ἐπειδὴ αἱ πυραμίδες ΝΑΒΓ, ναβγ, εἶναι ὅμοιαι, ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΝΑΓ, ΒΑΓ, εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν ἐπιπέδων ναγ, βαγ: λοιπὸν, ἐὰν αἱ πρῶται κλίσεις ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τὰς δευτέρας, μένει ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΝΑΓ, ΜΑΓ ἴση μὲ τὴν τῶν ἐπιπέδων ναγ, μαγ. Ἀλλὰ, ἐξ αἰτίας τῆς ὁμοιότητος τῶν αὐτῶν πυραμίδων, τὸ τρίγωνον ΜΑΓ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ μαγ, καὶ τὸ τρίγωνον ΝΑΓ ὅμοιον μὲ τὸ ναγ: λοιπὸν αἱ δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ΜΝΑΓ, μναγ, ἔχουν δύο ἕδρας ὁμοίας τὴν καθε μίαν μὲ τὴν καθε μίαν, ὁμοίως κειμένας καὶ ἰσάκις κλινούσας μεταξύ των· λοιπὸν αἱ πυραμίδες αὗται εἶναι ὅμοιαι (πρό. 21), καὶ αἱ ὁμόλογοι πλευραί των δίδουν τὴν ἀναλογίαν ΜΝ : μν : : ΑΜ : αμ. Αλλως ΑΜ : αμ : : ΑΒ : αϐ· λοιπὸν ΜΝ : μν : : ΑΒ : αϐ.

Εϛωσαν Π καὶ π δύο ἄλλαι ὁμόλογοι κορυφαὶ τῶν αὐτῶν πολυέδρων, καὶ ὁμοίως θέλομεν ἔχει ΠΝ : πν : : ΑΒ : αϐ, ΠΜ : πμ : : ΑΒ : αϐ. Λοιπὸν ΜΝ : μν : : ΠΝ : πν : : ΠΜ : πμ. Λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΠΝΜ τὸ ὁποῖον ἑνόνει τρεῖς ὁποιασδήποτε κορυφὰς τοῦ ἑνὸς πολυέδρου εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ τρίγωνον πνμ τὸ ὁποῖον ἑνόνει τὰς τρεῖς ὁμολόγους κορυφὰς τοῦ ἄλλου πολυέδρου.

Εϛωσαν προσέτι Κ καὶ κ δύο ὁμόλογοι κορυφαὶ, καὶ τὸ τρίγωνον ΠΚΝ θέλει εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ πκν· λέγω περιπλέον ὅτι ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΠΚΝ, ΠΜΝ, εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν ἐπιπέδων πκν, πμν.

Διότι ἐὰν ἑνώσωμεν ΚΜ καὶ κμ, πάντοτε θέλομεν ἔχει τὸ τρίγωνον ΚΝΜ ὅμοιον μὲ τὸ κνμ, καὶ ἑπομένως τὴν γωνίαν ΚΝΜ ἴσην μὲ τὴν κνμ. Ας φαντασθῶμεν εἰς Ν ϛερεὰν γωνίαν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας ΚΝΜ, ΚΝΠ, ΠΝΜ, καὶ εἰς ν ϛερεὰν γωνίαν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας κνμ, κνπ, πνμ: ἐπειδὴ αἱ ἐπίπεδοι αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, ἕπεται ὅτι αἱ ϛερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων ΠΝΚ, ΠΝΜ εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν ὁμολόγων των πνκ, πνμ· λοιπὸν, ἐὰν τὰ δύο τρίγωνα ΠΝΚ, ΠΝΜ, ἦσαν εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, εἰς τὴν ὁποίαν περίϛασιν ἤθελεν εἶναι ἡ γωνία ΚΝΜ = ΚΝΠ + ΠΝΜ, ἤθελεν εἶναι ὡσαύτως ἡ γωνία κνμ = κνπ + πνμ, καὶ τὰ δύο τρίγωνα κνπ, πνμ ἤθελον σχηματίζει ἓν μόνον ἐπίπεδον.

Τὰ ἀποδειχθέντα ἔχουν χώραν, ὅποιαι καὶ ἂν ἦναι αἱ γωνίαι Μ, Ν, Π, Κ, παραβαλλόμεναι μὲ τὰς ὁμολόγους των μ, ν, π, κ.

Ας υποθέσωμεν τώρα ότι ή επιφάνεια του ενός πολυέδρου είναι μοιρασμένη είς τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΜΝΠ, ΝΠΚ, κ. τ. λ. βλέπομεν ότι ή επιφάνεια του άλλου πολυέδρου θέλει περιέχει τον αυτόν αριθμόν τριγώνων αβγ, αγδ, μνπ, νπκ, κ. τ. λ. ομοίων και ομοίως κειμένων· και εάν πολλά τρίγωνα, ώς ΜΠΝ, ΝΠΚ, κ. τ. λ. ανήκουν είς μίαν και την αυτήν έδραν, και ευρίσκωνται είς το αυτό επίπεδον, τα ομολογά των μπν, νπκ, κ. τ. λ. θέλει ευρίσκονται παρομοίως είς το αυτό επίπεδον. Λοιπόν κάθε πολύγωνος έδρα είς το έν πολύεδρον θέλει αντιςοιχεί είς μίαν ομοίαν πολύγωνον έδραν είς το άλλο πολύεδρον· λοιπόν τα δύο πολύεδρα θέλει περιέχονται υπό τον αυτόν αριθμόν επιπέδων ομοίων και ομοίως κειμένων. Λέγω περιπλέον ότι αί ομόλογοι ςερεαί γωνίαι είναι ίσαι.

Διότι, εάν, φερ' ειπείν, ή ςερεά γωνία Ν σχηματίζεται από τας επιπέδους γωνίας ΚΝΠ, ΠΝΜ, ΜΝΡ, ΚΝΛ ή ομόλογος ςερεά γωνία ν θέλει σχηματίζεται από τας επιπέδους γωνίας κνπ, πνμ, μνρ, κνρ. Τώρα, αί επίπεδοι αύται γωνίαι είναι ίσαι ή κάθε μία με την κάθε μίαν, και ή κλίσις δύο προσκειμένων επιπέδων είναι ίση με την των ομολόγων των· λοιπόν αί δύο ςερεαί γωνίαι είναι ίσαι, ώς δυνάμεναι να επιτεθώσι.

Λοιπόν τέλος δύο όμοια πολύεδρα έχουν τας ομολόγους έδρας ομοίας και τας ομολόγους ςερεάς γωνίας ίσας.

Πόρισμα. Από την προλαβούσαν απόδειξιν έπεται ότι εάν, με τέσσαρας κορυφάς ενός πολυέδρου, σχηματισθή τριγωνική πυραμίς, και με τας τέσσαρας ομολόγους κορυφάς ενός ομοίου πολυέδρου μία δευτέρα πυραμίς, αί δύο αύται πυραμίδες θέλουν είναι όμοιαι· διότι θέλουν έχει τας ομολόγους πλευράς αναλόγους (πρό. 21. σχολ.).

Βλέπομεν ενταύτῳ ότι δύο ομόλογοι διαγώνιοι, παραδείγματος χάριν, ΑΝ, αν, είναι μεταξύ των ώς δύο ομόλογοι πλευραί ΑΒ, αβ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ὅμοια πολύεδρα ἠμποροῦν νὰ μοιρασθοῦν εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγωνικῶν πυραμίδων αἱ ὁποῖαι νὰ ἦναι ὅμοιαι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ ὁμοίως κείμεναι.

Διότι εἴδομεν ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο πολυέδρων ἠμποροῦν νὰ μοιρασθοῦν εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων ὁμοίων τὸ κάθε ἓν μὲ τὸ κάθε ἕν, καὶ ὁμοίως κειμένων. Ἂς θεωρήσωμεν ὅλα τὰ τρίγωνα τοῦ ἑνὸς πολυέδρου, ἐκτὸς ἐκείνων τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὴν ϛερεὰν γωνίαν Α, ὡς βάσεις τόσων τριγωνικῶν πυραμίδων τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ εἶναι εἰς Α· αἱ πυραμίδες αὗται ὁμοῦ λαμβανόμεναι συγκροτοῦν τὸ πολύεδρον· ἂς μοιράσωμεν παρομοίως τὸ ἄλλο πολύεδρον εἰς πυραμίδας αἱ ὁποῖαι νὰ ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας α ὁμολόγου τῇ Α· φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ ἑνόνουσα πυραμὶς τέσσαρας κορυφὰς τοῦ ἑνὸς πολυέδρου θέλει εἶναι ὁμοία μὲ τὴν πυραμίδα τὴν ἑνόνουσαν τὰς τέσσαρας ὁμολόγους τοῦ ἄλλου πολυέδρου. Λοιπὸν δύο ὅμοια πολύεδρα, κ. τ. λ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚϚ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ὅμοιαι πυραμίδες εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ κῦβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Διότι ἐπειδὴ αἱ δύο πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι, ἡ μικροτέρα ἠμπορεῖ νὰ τεθῇ ἐντὸς τῆς μεγαλητέρας, ὥϛε νὰ ἔχουν τὴν ϛερεὰν γωνίαν Σ κοινήν. Τότε αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ, αβγδε, θέλουν εἶναι παράλληλοι· διότι, ἐπειδὴ αἱ ὁμόλογοι ἕδραι εἶναι ὅμοιαι (πρότ. 22.), ἡ γωνία Σαβ εἶναι ἴση τῇ ΣΑΒ, καθὼς καὶ ἡ Σβγ τῇ ΣΒΓ· λοιπὸν τὸ ἐπίπεδον αβγ εἶναι παράλληλον τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ (13, 5). Τούτου τεθέντος, ἔϛω ΣΟ ἡ καταβαζομένη κάθετος ἀπὸ τὴν κορυφὴν Σ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ, καὶ ο ἡ στιγμὴ ὅπου αὕτη ἡ κάθετος συναπαντᾷ τὸ ἐπίπεδον αβγ· κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα (πρ. 15), θέλομεν ἔχει, ΣΟ:Σο::ΣΑ:Σα:: ΑΒ:αβ, καὶ ἐπομένως,

$$\tfrac{1}{3} ΣΟ : \tfrac{1}{3} Σο :: ΑΒ : αβ,$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ, αβγδε, εἶναι ὅμοια σχήματα, διὰ τοῦτο,

$$ΑΒΓΔΕ : αβγδε :: \overline{ΑΒ}^2 : \overline{αβ}^2.$$

Ο πολλαπλασιασμὸς τῶν δύο τούτων ἀναλογιῶν ὅρου ἐπὶ ὅρου, δίδει τὴν ἀναλογίαν,

$$ΑΒΓΔΕ \times \tfrac{1}{3} ΣΟ : αβγδε \times \tfrac{1}{3} Σο :: \overline{ΑΒ}^3 : \overline{αβ}^3.$$

Τώρα, ΑΒΓΔΕ $\times \frac{1}{3}$ ΣΟ εἶναι ἡ στερεότης τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔΕ (πρό. 18), καὶ αβγδε $\times \frac{1}{3}$ Σο εἶναι ἡ τῆς πυραμίδος Σαβγδε· λοιπὸν δύο ὅμοιαι πυραμίδες εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των. σχ. 214.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ὅμοια πολύεδρα εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Διότι δύο ὅμοια πολύεδρα ἠμποροῦν νὰ μοιρασθοῦν εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγωνικῶν πυραμίδων αἱ ὁποῖαι νὰ ἦναι ὅμοιαι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν (πρό. 25). Τώρα αἱ δύο ὅμοιαι πυραμίδες ΑΠΝΜ, απνμ, εἶναι μεταξύ των ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΑΜ, αμ, ἢ ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΑΒ, αβ. Ο αὐτὸς λόγος ἔχει χώραν μεταξὺ δύο ἄλλων ὁποιωνδήποτε ὁμολόγων πυραμίδων· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πυραμίδων αἱ ὁποῖαι συγκροτοῦν τὸ ἓν πολύεδρον, ἢ αὐτὸ τὸ πολύεδρον, εἶναι πρὸς τὸ ἄλλο πολύεδρον, ὡς ὁ κύβος μιᾶς ὁποιασδήποτε πλευρᾶς τοῦ πρώτου εἶναι πρὸς τὸν κύβον τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς τοῦ δευτέρου.

Γενικὸν Σχόλιον.

Ἠμποροῦμεν νὰ παραστήσωμεν δι' ἀλγεβρικῶν ὅρων, τουτέστι, μὲ τὸν πλέον σύντομον τρόπον, τὴν ἀνακεφαλαίωσιν τῶν ἀρχικῶν προτάσεων τούτου τοῦ βιβλίου ὅσαι ἀναφέρονται εἰς τὰς στερεότητας τῶν πολυέδρων.

Ἔστω Β ἡ βάσις ἑνὸς πρίσματος, Υ τὸ ὕψος του· ἡ στερεότης τοῦ πρίσματος θέλει εἶναι $B \times \Upsilon$ ἢ $B\Upsilon$.

Ἔστω Β ἡ βάσις μιᾶς πυραμίδος, Υ τὸ ὕψος της· ἡ στερεότης τῆς πυραμίδος θέλει εἶναι $B \times \frac{1}{3}\Upsilon$, ἢ $\Upsilon \times \frac{1}{3}B$, ἢ $\frac{1}{3}B\Upsilon$.

Ἔστω Υ τὸ ὕψος κορμοῦ πυραμίδος μὲ παραλλήλους βάσεις, ἔστωσαν Α καὶ Β αἱ βάσεις του· $\sqrt{(AB)}$ θέλει εἶναι μία μέση ἀνάλογος μεταξὺ τούτων, καὶ ἡ στερεότης τοῦ κορμοῦ θέλει εἶναι $\frac{1}{3}\Upsilon\,(A + B + \sqrt{(AB)})$

Ἔστω Β ἡ βάσις κορμοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, $\Upsilon, \Upsilon', \Upsilon''$, τὰ ὕψη τῶν τριῶν ἄνω κορυφῶν του, ἡ στερεότης τοῦ κολοβοῦ πρίσματος θέλει εἶναι $\frac{1}{3}B\,(\Upsilon + \Upsilon' + \Upsilon'')$

Ἔστωσαν τέλος Π καὶ π αἱ στερεότητες δύο ὁμοίων πολυέδρων, Α καὶ α δύο πλευραὶ ἢ δύο ὁμόλογοι διαγώνιοι τούτων τῶν πολυέδρων, θέλει εἶναι $\Pi : \pi :: A^3 : \alpha^3$.