ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν δύο παραλληλεπίπεδα ΑΗ, ΑΛ, ἔχουν μίαν κοινὴν βάσιν ΑΒΓΔ, καὶ αἱ ἄνω βάσεις των ΕΖΗΘ, ΙΚ'ΛΜ, περιέχωνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΕΚ', ΘΛ, τὰ δύο ταῦτα παραλληλεπίπεδα θέλουν εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των. σχ. 209.

Τρεῖς περιςάσεις δυνατὸν νὰ ἀκολουθήσουν, καθὼς ἡ ΕΙ εἶναι μείζων, μικροτέρα ἢ ἴση τῇ ΕΖ· πλὴν ἡ ἀπόδειξίς εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ὅλας: καὶ κατὰ πρῶτον λέγω ὅτι τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ΑΕΙΔΘΜ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τριγωνικὸν ΒΖΚ'ΓΗΛ.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ ΑΕ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΖ καὶ ἡ ΘΕ τῇ ΗΖ, ἡ γωνία ΑΕΙ=ΒΖΚ', ΘΕΙ=ΗΖΚ', καὶ ΘΕΑ=ΗΖΒ. Ἀπὸ τὰς ἓξ ταύτας γωνίας αἱ τρεῖς πρῶται σχηματίζουν τὴν ςερεὰν γωνίαν Ε, αἱ τρεῖς ἄλλαι σχηματίζουν τὴν ςερεὰν γωνίαν Ζ· λοιπὸν, ἐπειδὴ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι εἶναι ἴσαι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ ὁμοίως διατεταγμέναι, ἕπεται ὅτι αἱ ςερεαὶ γωνίαι Ε καὶ Ζ εἶναι ἴσαι. Ἤδη, ἐὰν τεθῇ τὸ πρίσμα ΑΕΜ ἐπὶ τοῦ πρίσματος ΒΖΛ, καὶ κατὰ πρῶτον ἡ βάσις ΑΕΙ ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΖΚ, αἱ δύο αὗται βάσεις ὡς ἴσαι θέλουν ἐφαρμόσει· καὶ ἐπειδὴ ἡ ςερεὰ γωνία Ε εἶναι ἴση τῇ ςερεᾷ γωνίᾳ Ζ, ἡ πλευρὰ ΕΘ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ΖΗ: ἀλλὰ δὲν εἶναι χρεία περισσότερον διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι τὰ δύο πρίσματα θέλουν ἐφαρμόσει καθ' ὅλην των τὴν ἔκτασιν· διότι ἡ βάσις ΑΕΙ καὶ ἡ κόψις ΕΘ προσδιορίζουν τὸ πρίσμα ΑΕΜ, ὡς ἡ βάσις ΒΖΚ' καὶ ἡ κόψις ΖΗ προσδιορίζουν τὸ πρίσμα ΒΖΛ (πρό. 3)· λοιπὸν τὰ πρίσματα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Ἀλλ' ἐὰν ἀπὸ τὸ ςερεὸν ΑΛ ἀφαιρεθῇ τὸ πρίσμα ΑΕΜ, μένει τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΙΛ· καὶ ἐὰν ἀπὸ τὸ αὐτὸ ςερεὸν ΑΔ ἀφαιρεθῇ τὸ πρίσμα ΒΖΔ, μένει τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΕΗ· λοιπὸν τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΑΙΔ, ΑΕΗ, εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο παραλληλεπίπεδα τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των.

Εςω ΑΒΓΔ ἡ κοινὴ βάσις εἰς τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΑΗ, ΑΛ· ἐπειδὴ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, αἱ ἄνω βάσεις των ΕΖΗΘ, ΙΚ'ΛΜ, θέλει εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Περιπλέον αἱ πλευραὶ ΕΖ καὶ ΑΒ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰς ΙΚ' καὶ ΑΒ· λοιπὸν ΕΖ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΙΚ': διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΗΖ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΛΚ'. Ἀς προεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ ΕΖ, ΗΘ, καθὼς καὶ αἱ ΛΚ', ΙΜ, ἕως οὗ καὶ αἱ πρῶται καὶ αἱ δεύτεραι μὲ τὰς συναπαντήσεις των νὰ σχηματίσουν τὸ παραλληλόγραμμον ΝΟΠΚ· φανερὸν εἶναι ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο θέλει ἰσοῦται μὲ κάθε μίαν τῶν βάσεων ΕΖΗΘ, ΙΚ'ΛΜ. Τώρα ἐὰν φαντασθῶμεν τρίτον παραλληλεπίπεδον τὸ ὁποῖον μὲ τὴν αὐτὴν κάτω βάσιν ΑΒΓΔ, νὰ ἔχῃ δι' ἄνω βάσιν ΝΟΠΚ, τὸ τρίτον τοῦτο παραλληλεπίπεδον ἤθελεν ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ (πρό. 9), διότι ἐν ᾧ ἔχουν τὴν αὐτὴν κάτω βάσιν, αἱ ἄνω βάσεις περιέχονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΗΚ, ΖΝ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ τρίτον τοῦτο παραλληλεπίπεδον ἤθελεν ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΛ· λοιπὸν τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΑΗ, ΑΛ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των. σχ. 210.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Κάθε παραλληλεπίπεδον δύναται νὰ τρεφθῇ εἰς ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν ἰσοδύναμον.

Εςω ΑΗ τὸ προτεθὲν παραλληλεπίπεδον· ἐκ τῶν ϛιγμῶν Α, Β, Γ, Δ, ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΙ, ΒΚ΄, ΓΛ, ΔΜ κάθετοι εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως. Οὕτω θέλει σχηματισθῇ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΛ ἰσοδύναμον μὲ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ, καὶ τοῦ ὁποίου αἱ παράπλευροι ἕδραι ΑΚ΄, ΒΛ, κ. τ. λ. θέλουν εἶναι ὀρθογώνια. (σχ. 210). Ἐὰν λοιπὸν ἡ βάσις ΑΒΓΔ ἦναι ὀρθογώνιον, ΑΛ θέλει εἶναι τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἰσοδύναμον μὲ τὸ προτεθὲν ΑΗ (σχ. 211). Ἀλλ᾽ ἐὰν ΑΒΓΔ δὲν ἦναι ὀρθογώνιον, ἂς ἀχθῶσιν ΑΟ καὶ ΒΝ κάθετοι ἐπὶ τῆς ΓΔ, ἀκολούθως ΟΚ καὶ ΝΠ κάθετοι ἐπὶ τῆς βάσεως· θέλει προκύψει τὸ ϛερεὸν ΑΒΝΟΙΚ΄ΠΚ τὸ ὁποῖον θέλει εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Τῷ ὄντι, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ βάσις ΑΒΝΟ καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς ΙΚ΄ΠΚ εἶναι ὀρθογώνια· αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι ὁμοίως, διότι αἱ κόψεις ΑΙ, ΟΚ κ. τ. λ. εἶναι κάθετοι εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως· λοιπὸν τὸ ϛερεὸν ΑΠ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Ἀλλὰ τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΑΠ, ΑΛ ἠμποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒΚ΄Ι καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΟ: λοιπὸν εἶναι ἰσοδύναμα· λοιπὸν τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ, τὸ ὁποῖον κατὰ πρῶτον ἐτρέφθη (σχ. 210 καὶ 211) εἰς ἰσοδύναμον παραλληλεπίπεδον ΑΛ, ἰσοδυναμεῖ τώρα μὲ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΠ, ὕψος τοῦ ὁποίου εἶναι ΑΙ καὶ βάσις ΑΒΝΟ ἰσοδύναμος μὲ τὴν βάσιν ΑΒΓΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ΑΗ, ΑΛ τῆς αὐτῆς βάσεως ΑΒΓΔ, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των ΑΕ, ΑΙ. σχ. 212.

Ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι τὰ ὕψη ΑΕ, ΑΙ εἶναι μεταξύ των ὡς δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί, παραδείγματος χάριν, ὡς 15 πρὸς 8. Διαιροῦμεν τὸ ὕψος ΑΕ εἰς 15 ἴσα μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων ΑΙ θέλει περιέχει 8, καὶ ἐκ τῶν ςιγμῶν τῆς διαιρέσεως χ, ψ, ω, κ. τ. λ. ἄγομεν ἐπίπεδα παράλληλα τῆς βάσεως. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα θέλουν μοιράσει τὸ ςερεὸν ΑΗ εἰς 15 μερικὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ὁποῖα ὅλα θέλουν εἶναι ἴσα μεταξύ των, ὡς ἔχοντα βάσεις ἴσας καὶ ὕψη ἴσα· βάσεις ἴσας, διότι κάθε τομὴ ὡς ΜΙΚ'Μ γινομένη εἰς ἓν πρίσμα παραλλήλως τῆς βάσεώς του ΑΒΓΔ, εἶναι ἴση μὲ αὐτὴν τὴν βάσιν (πρό. 7)· ὕψη ἴσα, διότι ταῦτα τὰ ὕψη εἶναι αἱ ἴδιαι διαιρέσεις Αχ, χψ, χω, κ. τ. λ. Τώρα, ἀπὸ ταῦτα τὰ 15 ἴσα παραλληλεπίπεδα, ὀκτὼ περιέχονται εἰς ΑΛ· λοιπὸν τὸ ςερεὸν ΑΗ εἶναι πρὸς τὸ ςερεὸν ΑΛ ὡς 15 πρὸς 8, ἢ ἐν γένει ὡς τὸ ὕψος ΑΕ πρὸς τὸ ὕψος ΑΙ.

Δεύτερον, ἐὰν ὁ λόγος τοῦ ὕψους ΑΕ πρὸς ΑΙ δὲν ἠμπορῇ νὰ ἐκφρασθῇ δι' ἀριθμῶν, λέγω ὅτι ἐπίσης θέλομεν ἔχει ςερ. ΑΗ : ςερ. ΑΛ :: ΑΕ : ΑΙ. Διότι, ἐὰν ἡ ἀναλογία αὕτη δὲν ὑπάρχῃ, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ςερ. ΑΗ : ςερ. ΑΛ :: ΑΕ : ΑΟ. Ἂς διαιρεθῇ ΑΕ εἰς ἴσα μέρη ἕκαςον τῶν ὁποίων νὰ ἦναι μικρότερον παρὰ ΟΙ· τουλάχιςον θέλει ὑπάρχει ἓν σημεῖον διαιρέσεως μ μεταξὺ Ο καὶ Ι. Εςω Π τὸ παραλληλεπίπεδον τὸ ὁποῖον ἔχει διὰ βάσιν ΑΒΓΔ καὶ ὕψος Αμ· ἐπειδὴ τὰ ὕψη ΑΕ, Αμ εἶναι μεταξύ των ὡς δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί, θέλομεν ἔχει ςερ. ΑΗ : Π :: ΑΕ : Αμ.

Αλλ' ἐξ ὑποθέσεως, ϛερ. ΑΗ : ϛερ. ΑΛ : : ΑΕ : ΑΟ· ἐνταῦθεν ἕπεται ϛερ. ΑΛ : Π : : ΑΟ : Αμ. Αλλὰ ΑΟ > Αμ ἔπρεπε λοιπὸν, διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἀναλογία, τὸ ϛερεὸν ΑΛ νὰ ἦναι > Π. Αλλ' ἐξ ἐναντίας εἶναι μικρότερον: ἀδύνατον λοιπὸν ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας ϛερ. ΑΗ : ϛερ. ΑΛ : : ΑΕ : χ νὰ ἦναι γραμμὴ μείζων τῆς ΑΙ. Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ ἠθέλαμεν δείξει ὅτι ὁ τέταρτος ὅρος δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι γραμμὴ ἐλάσσων τῆς ΑΙ· λοιπὸν εἶναι ἴση μὲ ΑΙ· λοιπὸν τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ΑΗ, ΑΚ', τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΕ, εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των ΑΒΓΔ, ΑΜΝΟ. σχ. 213.

Αφ' οὗ τεθῶσι τὰ δύο ϛερεὰ τὸ ἓν πλησίον τοῦ ἄλλου, ὡς τὸ σχῆμα τὰ παριϛάνει, ἂς προεκβληθῇ τὸ ἐπίπεδον ΟΝΚ'Λ, ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὸ ἐπίπεδον ΔΓΗΘ κατὰ τὴν ΠΚ· θέλει προκύψει τρίτον παραλληλεπίπεδον ΑΚ, τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ συγκριθῇ μὲ ἕκαϛον τῶν παραλληλεπιπέδων ΑΗ, ΑΚ'. Τὰ δύο ϛερεὰ ΑΗ, ΑΚ, ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΕΘΔ, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των ΑΒ, ΑΟ. παρομοίως τὰ δύο ϛερεὰ ΑΚ, ΑΚ', ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΟΛΕ, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των ΑΔ, ΑΜ. Οὕτω θέλομεν ἔχει τὰς δύο ἀναλογίας,

ϛερ. ΑΗ : ϛερ. ΑΚ : : ΑΒ : ΑΟ,

ϛερ. ΑΚ : ϛερ. ΑΚ' : : ΑΔ : ΑΜ.

Πολλαπλασιάζοντες τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας κατὰ τάξιν, καὶ ἐξαλείφοντες, εἰς τὸ ἐξαγόμενον, τὸν κοινὸν πολλαπλασιαϛὴν ϛερ. ΑΚ, θέλομεν ἔχει,

ϛερ. ΑΗ : ϛερ. ΑΚ' : : ΑΒ × ΑΔ : ΑΟ × ΑΜ.

Ἀλλὰ ΑΒ × ΑΔ παριςάνει τὴν βάσιν ΑΒΓΔ, καὶ ΑΟ × ΑΜ τὴν βάσιν ΑΜΝΟ· λοιπὸν δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδον τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ὁποιαδήποτε ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ γινόμενα τῶν βάσεών των ἐπὶ τῶν ὕψῶν των, ἢ ὡς τὰ γινόμενα τῶν τριῶν διαςάσεών των.

Διότι ἀφ' οὗ τεθῶσι τὰ δύο ςερεὰ ΑΗ, ΑΩ, εἰς τρόπον ὥςε αἱ ἐπιφάνειαί των νὰ ἔχουν κοινὴν τὴν γωνίαν ΒΑΕ, ἂς προεκβληθῶσι τὰ ἀναγκαῖα ἐπίπεδα διὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ τρίτου παραλληλεπιπέδου ΑΚ′ τοῦ αὐτοῦ ὕψους μὲ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ. Κατὰ τὴν προλαβοῦσαν πρότασιν, θέλομεν ἔχει,

ςερ. ΑΗ : ςερ. ΑΚ′ :: ΑΒΓΔ : ΑΜΝΟ.

Ἀλλὰ τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΑΚ, ΑΩ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΜΝΟ, εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των ΑΕ, ΑΧ· οὕτως ἔχομεν,

ςερ. ΑΚ′ : ςερ. ΑΩ :: ΑΕ : ΑΧ.

Πολλαπλασιάζοντες κατὰ τάξιν τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας, καὶ ἐξαλείφοντες, εἰς τὸ ἐξαγόμενον, τὸν κοινὸν πολλαπλασιαςὴν ςερ. ΑΚ′, θέλομεν ἔχει,

ςερ. ΑΗ : ςερ. ΑΩ :: ΑΒΓΔ × ΑΕ : ΑΜΝΟ × ΑΧ.

Ἀντὶ τῶν βάσεων ΑΒΓΔ καὶ ΑΜΝΟ, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ΑΒ × ΑΔ καὶ ΑΟ × ΑΜ, καὶ οὕτως ἔχομεν,

ςερ. ΑΗ : ςερ. ΑΩ :: ΑΒ × ΑΔ × ΑΕ : ΑΟ × ΑΜ × ΑΧ.

Λοιπὸν δύο ὁποιαδήποτε ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα εἶναι μεταξύ των, κ. τ. λ. σχ. 213.

Σχόλιον. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ λάβωμεν διὰ μέτρον ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του, ἢ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν του διαςάσεων. Καὶ ἐπὶ ταύτης τῆς ἀρχῆς θέλομεν ἐκτιμήσει ὅλα τὰ ἄλλα ςερεά.

Πρὸς κατάληψιν τούτου τοῦ μέτρου πρέπει νὰ ἐνθυμηθῶμεν ὅτι διὰ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων γραμμῶν, ἐννοοῦμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν· οἵτινες παριςάνουν ταύτας τὰς γραμμὰς, καὶ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἐξαρτῶται ἀπὸ τὴν γραμμικὴν μονάδα, τὴν ὁποίαν ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν κατ' ἀρέσκειαν: τούτου τεθέντος, τὸ γινόμενον τῶν τριῶν διαςάσεων ἑνὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι ἀριθμὸς ὅςις καθ' ἑαυτὸν δὲν σημαίνει τίποτε, καὶ ὅςις ἤθελεν εἶναι διαφορετικὸς ἐὰν ἐλαμβάνετο μία ἄλλη γραμμικὴ μονάς. Ἀλλ' ἐὰν ὁμοίως πολλαπλασιάσωμεν τὰς τρεῖς διαςάσεις ἄλλου παραλληλεπιπέδου, ἐκτιμῶντες αὐτὰς μὲ τὴν αὐτὴν γραμμικὴν μονάδα, τὰ δύο γινόμενα θέλουν εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ςερεὰ, καὶ θέλουν δώσει τὴν ἰδέαν τοῦ σχετικοῦ μεγέθους των.

Τὸ μέγεθος ἑνὸς ςερεοῦ, ὁ ὄγκος του ἢ ἡ ἔκτασίς του συνιςοῦν τὴν ςερεότητά του, καὶ τὴν λέξιν ταύτην μάλιςα μεταχειριζόμεθα διὰ νὰ σημειόνωμεν τὸ μέτρον ἑνὸς ςερεοῦ: οὕτω λέγομεν ὅτι ἡ ςερεότης ἑνὸς παραλληλεπιπέδου ὀρθογωνίου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους τού ἢ μὲ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν του διαςάσεων.

Ἐπειδὴ αἱ τρεῖς διαςάσεις τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ἐὰν ἡ πλευρὰ ἦναι 1, ἡ ςερεότης θέλει εἶναι $1 \times 1 \times 1$ ἢ 1· ἐὰν ἡ πλευρὰ ἦναι 2, ἡ ςερεότης θέλει εἶναι $2 \times 2 \times 2$, ἢ 8· ἐὰν δὲ 3, ἡ ςερεότης θέλει εἶναι $3 \times 3 \times 3$, ἢ 27, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· ὅθεν ἐὰν αἱ πλευραὶ τῶν κύβων ἦναι ὡς οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, κ. τ. λ, οἱ κύβοι ἢ αἱ ςερεότητές των εἶναι ὡς οἱ ἀριθμοὶ 1, 8, 27, κ.τ.λ. Ἐκ τούτου προῆλθε νὰ ὀνομάζεται εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν κύβος ἑνὸς ἀριθμοῦ τὸ προκύπτον γινόμενον ἀπὸ τρεῖς ἴσους παράγοντας μὲ αὐτὸν τὸν ἀριθμόν·

Εάν επροτείνετο νά κατασκευασθῇ κύβος διπλάσιος δεδομένου, έπρεπεν ή πλευρά τοῦ ζητουμένου νά ἦναι πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ δεδομένου ὡς ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 2 πρὸς τὴν μονάδα. Τώρα εὐκόλως εὑρίσκεται, διὰ γεωμετρικῆς κατασκευῆς, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2· πλὴν δὲν εἶναι δυνατὸν ὡσαύτως νὰ εὑρεθῇ ἡ κυβική του, τοὐλάχιστον διὰ τῶν ἁπλῶν ἐργασιῶν τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας, αἱ ὁποῖαι συνίστανται εἰς τὴν χρῆσιν εὐθειῶν γραμμῶν τῶν ὁποίων εἶναι γνωστὰ δύο σημεῖα, καὶ κύκλων τῶν ὁποίων τὰ κέντρα καὶ αἱ ἀκτῖνες εἶναι προσδιωρισμένα.

Διὰ τὴν δυσκολίαν ταύτην τὸ πρόβλημα τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου ἐστάθη περίφημον παρὰ τοῖς ἀρχαίοις γεωμέτραις, ὡς τὸ τῆς τριτομῆς τῆς γωνίας, τὸ ὁποῖον εἶναι σχεδὸν τῆς αὐτῆς κατηγορίας. Ἀλλὰ πρὸ πολλοῦ εἶναι γνωσταὶ αἱ λύσεις τῶν ὁποίων τὰ τοιαῦτα προβλήματα εἶναι δεκτικά, αἱ ὁποῖαι ἐὰν καὶ δὲν φέρουσι τὴν ἁπλότητα τῶν κατασκευῶν τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας, δὲν εἶναι ὅμως ὀλιγώτερον ἀκριβεῖς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Η στερεότης ἑνὸς παραλληλεπιπέδου, καὶ ἐν γένει ἡ στερεότης ὁποιουδήποτε πρίσματος, εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του.

Διότι 1.ον ὁποιονδήποτε παραλληλεπίπεδον ἰσοδυναμεῖ μὲ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον τοῦ αὐτοῦ ὕψους καὶ ἰσοδυνάμου βάσεως (πρό. 11)· ἀλλ' ἡ στερεότης τούτου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του· λοιπὸν καὶ ἡ στερεότης ἐκείνου ἰσοῦται παρομοίως μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του.

2.ον Κάθε τριγωνικὸν πρίσμα εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ κατασκευαζομένου παραλληλεπιπέδου εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν διπλασίαν (πρό. Β). Ἀλλ' ἡ ςερεότης τούτου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του· λοιπὸν ἡ τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του, ἡμισείας τῆς τοῦ παραλληλεπιπέδου, ἐπὶ τοῦ ὕψους του.

3.ον Ὁποιονδήποτε πρίσμα ἠμπορεῖ νὰ μοιρασθῇ εἰς τόσα τριγωνικὰ πρίσματα τοῦ αὐτοῦ ὕψους ὅσα τρίγωνα εἶναι δυνατὸν νὰ σχηματισθοῦν εἰς τὸ πολύγωνον τὸ ὁποῖον χρησιμεύει εἰς αὐτὸ ὡς βάσις. Ἀλλ' ἡ ςερεότης ἑκάςου τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴση μὲ τὴν βάσιν του πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τοῦ ὕψους του· ἐπειδὴ δὲ τὸ ὕψος εἶναι τὸ αὐτὸ δι' ὅλα, ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν μερικῶν πρισμάτων θέλει ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν τριγώνων τὰ ὁποῖα χρησιμεύουν εἰς αὐτὰ ὡς βάσεις, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τοῦ κοινοῦ ὕψους· καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν μερικῶν πρισμάτων συγκροτεῖ τὸ ὅλον πρίσμα· ἄρα ἡ ςερεότης ὁποιουδήποτε πολυγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τοῦ ὕψους του.

Πόρισμα. Ἐὰν παραβληθῶσι δύο πρίσματα τοῦ αὐτοῦ ὕψους, τὰ γινόμενα τῶν βάσεων ἐπὶ τῶν ὑψῶν θέλουν εἶναι ὡς αἱ βάσεις· λοιπὸν δύο πρίσματα τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των· διὰ λόγον παρόμοιον, δύο πρίσματα τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ιϛʹ.

ΛΗΜΜΑ.

Ἐὰν μία πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου αβδ παραλλήλου τῆς βάσεώς της. σχ. 214.

1.ον αἱ πλευραὶ ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, ... καὶ τὸ ὕψος ΣΟ, θέλουν διαιρεθῇ ἀναλόγως εἰς α, β, γ, . . . καὶ ο.

2.ον ἡ τομὴ αβγδε θέλει εἶναι πολύγωνον ὅμοιον μὲ τὴν βάσιν ΑΒΓΔΕ.

Διότι 1.ον ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ, αϐγ, εἶναι παράλληλα, αἱ κοιναὶ τομαί των ΑΒ, αϐ, ὑπὸ τοῦ τρίτου ἐπιπέδου ΣΑΒ, εἶναι παράλληλοι (10, 5)· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΣΑΒ, Σαβ εἶναι ὅμοια, καὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν ΣΑ : Σα : : ΣΒ : Σβ· ὡσαύτως ΣΒ : Σβ : : ΣΓ : Σγ· καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Λοιπὸν ὅλαι αἱ πλευραὶ ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, κ. τ. λ. τέμνονται ἀναλόγως εἰς α, ϐ, γ, κ. τ. λ. Τὸ ὕψος ΣΟ τέμνεται κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν εἰς τὴν στιγμὴν ο· διότι ΒΟ καὶ βο εἶναι παράλληλοι, καὶ οὕτως ΣΟ : Σο : : ΣΒ : Σβ.

2.ον Ἐπειδὴ αβ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ, ἡ ϐγ τῇ ΒΓ, ἡ γδ τῇ ΓΔ, κ. τ. λ., ἡ γωνία αβγ═ΑΒΓ, ἡ γωνία βγδ═ΒΓΔ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Περιπλέον, ἐξ αἰτίας τῶν ὁμοίων τριγώνων ΣΑΒ, Σαβ, ἔχομεν ΑΒ : αβ : : ΣΒ : Σβ· καὶ ἐξ αἰτίας τῶν ὁμοίων τριγώνων ΣΒΓ, Σβγ, ΣΒ : Σβ : : ΒΓ : βγ· λοιπὸν ΑΒ : αβ : : ΒΓ : ϐγ. Ὡσαύτως ΒΓ : βγ : : ΓΔ : γδ, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. Λοιπὸν τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, αϐγδε, ἔχουν τὰς γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· λοιπὸν εἶναι ὅμοια.

Πόρισμα. Ἔστωσαν ΣΑΒΓΔΕ, ΣΧΨΩ, δύο πυραμίδες τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ εἶναι κοινὴ, καὶ τὸ ὕψος τὸ αὐτὸ, ἢ τῶν ὁποίων αἱ βάσεις κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ἐὰν αἱ πυραμίδες αὗται τμηθῶσιν ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου παραλλήλου τοῦ ἐπιπέδου τῶν βάσεων, καὶ προκύψωσιν αἱ τομαὶ αβγδε, χψω· λέγω ὅτι αἱ τομαὶ αβγδε, χψω, θέλουν εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ, ΧΨΩ.

Διότι ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, αβγδε, εἶναι ὅμοια, αἱ ἐπιφάνειαί των εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΑΒ, αβ· ἀλλὰ ΑΒ : αβ : : ΣΑ : Σα· λοιπὸν ΑΒΓΔΕ : αϐγδε : : $\overline{ΣΑ}^2$: $\overline{Σα}^2$. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΧΨΩ : χψω : : $\overline{ΣΧ}^2$: $\overline{Σχ}^2$. Ἀλλ' ἐπειδὴ αϐγχψω εἶναι ἓν μόνον ἐπίπεδον, ἕπεται ὅτι ΑΧ καὶ αχ εἶναι παράλληλοι ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τοῦ ΣΑΧ· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΣΑΧ, Σαχ εἶναι ὅμοια καὶ δίδουν ΣΑ : Σα : : ΣΧ : Σχ· ἑπομένως ΧΨΩ : χψω :: $\overline{ΣΑ}^2 : \overline{Σα}^2$· καὶ ἐπειδὴ ὡσαύτως ΑΒΓΔΕ : αβγδε :: $\overline{ΣΑ}^2 : \overline{Σα}^2$· ἄρα ΑΒΓΔΕ : αβγδε :: ΧΨΩ : χψω· λοιπὸν αἱ τομαὶ αβγδε, χψω, εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ, ΧΨΩ. Εἀν λοιπὸν αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ, ΧΨΩ ἦναι ἰσοδύναμοι, αἱ γινόμεναι τομαὶ εἰς ἴσον ὕψος εἶναι παρομοίως ἰσοδύναμοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες βάσεις ἔχουσαι ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα, εἶναι ἰσοδύναμοι.

Εςωσαν ΣΑΒΓ, σαβγ αἱ δύο πυραμίδες τῶν ὁποίων αἱ βάσεις ΑΒΓ, αβγ, τὰς ὁποίας ὑποθέτομεν εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, εἶναι ἰσοδύναμοι καὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος ΤΑ· ἐὰν αἱ πυραμίδες αὗται δὲν ἦναι ἰσοδύναμοι, ἔςω σαβγ ἡ μικροτέρα καὶ ΑΧ τὸ ὕψος ἑνὸς πρίσματος, τὸ ὁποῖον κατασκευασθὲν ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒΓ, ἤθελεν εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφοράν των (1). σχ. 215.

---

(1) Τοῦτο πάντοτε ἠμποροῦμεν νὰ ὑποθέσωμεν· διότι ἂς παριςάνῃ α τὸν ἀριθμὸν τῶν φορῶν ὁποῦ εἷς προσδιωρισμένος ὄγκος περιέχεται εἰς τὴν πρώτην πυραμίδα· β τὸν ἀριθμὸν τῶν φορῶν ὁποῦ ὁ αὐτὸς ὄγκος περιέχεται εἰς τὴν δευτέραν τὴν ἐξ ὑποθέσεως μικροτέραν: α—β παριςάνει τὴν διαφορὰν τῶν ὄγκων τῶν πυραμίδων· τὸν ἀριθμὸν τοῦτον δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς γινόμενον δύο παραγόντων τοῦ ἀριθμοῦ ὅςις παραςάνει τὴν βάσιν καὶ ἑνὸς ἄλλου ὅςις προσδιορίζεται· τώρα ἐὰν δώσωμεν εἰς πρίσμα διὰ βάσιν τὴν βάσιν τῶν πυραμίδων, καὶ διὰ ὕψος τὸν δεύτερον παράγοντα, ὁ ὄγκος τούτου τοῦ πρίσματος θέλει ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τούτων τῶν δύο ἀριθμῶν ἢ μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ὄγκων τῶν πυραμίδων. Ο. Μ.

Ἀς διαιρεθῇ τὸ κοινὸν ὕψος ΑΤ εἰς μέρη ἴσα μικρότερα τοῦ Αχ, καὶ ἔσω κ ἓν τούτων τῶν μερῶν· ἐκ τῶν ϛιγμῶν τῆς διαιρέσεως τοῦ ὕψους, ἄς διέλθωσιν ἐπίπεδα παράλληλα τοῦ ἐπιπέδου τῶν βάσεων· αἱ γινόμεναι τομαὶ ἀπὸ καθὲν τούτων τῶν ἐπιπέδων, θέλουν εἶναι ἰσοδύναμοι (πρό. 16. πορ.), ὡς, παραδείγματος χάριν, ΔΕΖ καὶ δεζ, ΗΘΙ καὶ ηθι κ. τ. λ. Τούτου τεθέντος, ἐπὶ τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΙ, κ. τ. λ. λαμβανομένων ὡς βάσεων, ἄς κατασκευασθῶσιν ἐξωτερικὰ πρίσματα τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν διὰ κόψεις τὰ μέρη ΑΔ, ΔΗ, ΗΚ′, κ. τ. λ. τῆς πλευρᾶς ΣΑ· ὡσαύτως ἐπὶ τῶν τριγώνων δεζ, ηθι, κλμ, κ. τ. λ. ὡς βάσεων λαμβανομένων, ἄς κατασκευασθῶσιν εἰς τὴν δευτέραν πυραμίδα πρίσματα ἐσωτερικὰ τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν διὰ κόψεις τὰ ἀντιϛοιχοῦντα μέρη τῆς πλευρᾶς Σα· ὅλα ταῦτα τὰ μερικὰ πρίσματα θέλουν ἔχει διὰ κοινὸν ὕψος κ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκτὸς τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ πρισμάτων, εἶναι μεῖζον ταύτης τῆς πυραμίδος· τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς τῆς πυραμίδος σαβγ πρισμάτων εἶναι μικρότερον ταύτης τῆς πυραμίδος· λοιπὸν διὰ τοὺς δύο τούτους λόγους ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν δύο ἀθροισμάτων τῶν πρισμάτων πρέπει νὰ ἦναι μεγαλητέρα τῆς μεταξὺ τῶν δύο πυραμίδων.

Τώρα ἐὰν ἀναχωρήσωμεν ἀπὸ τὰς βάσεις ΑΒΓ, αβγ ἀπαντῶμεν τὸ δεύτερον ἐξωτερικὸν πρίσμα ΔΕΖΗ ἰσοδύναμον μὲ τὸ πρῶτον ἐσωτερικὸν δεζα, διότι αἱ βάσεις των ΔΕΖ, δεζ, εἶναι ἰσοδύναμοι καὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος κ· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι ἰσοδύναμα τὸ τρίτον ἐξωτερικὸν πρίσμα ΗΘΙΚ′ καὶ τὸ δεύτερον ἐσωτερικὸν ηθιδ, τὸ τέταρτον ἐξωτερικὸν καὶ τὸ τρίτον ἐσωτερικόν, καὶ οὕτως ἐφεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου τῶν πρώτων, καὶ τοῦ τελευταίου τῶν δευτέρων. Λοιπὸν ὅλα τὰ ἐκτὸς τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ πρίσματα, ἐξαιρουμένου τοῦ πρώτου ΑΒΓΔ, ἔχουν τὰ ἰσοδύναμά των εἰς τὰ ἐντὸς τῆς πυραμίδος σαβγ πρίσματα. Λοιπὸν τὸ πρίσμα ΑΒΓΔ εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐκτὸς τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ πρισμάτων καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐντὸς τῆς πυραμίδος σαβγ· ἀλλ' ἡ διαφορὰ τῶν δύο τούτων ἀθροισμάτων εἶναι μεγαλητέρα τῆς διαφορᾶς τῶν δύο πυραμίδων· ἔπρεπε λοιπὸν τὸ πρίσμα ΑΒΓΔ νὰ ἦναι μεγαλήτερον τοῦ πρίσματος ΑΒΓΧ· ἀλλ' ἐξ ἐναντίας εἶναι μικρότερον· διότι τὰ δύο ταῦτα πρίσματα ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των κ καὶ Αχ· ἀλλὰ κ εἶναι ἔλασσον τοῦ ΑΧ· ἄρα τὸ πρίσμα ΑΒΓΔ εἶναι ἔλασσον τοῦ πρίσματος ΑΒΓΧ· λοιπὸν ἡ ὑπόθεσις ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀνεχωρήσαμεν εἶναι ἀδύνατον νὰ ὑπάρξῃ· λοιπὸν αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΒΓ, σαβγ τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι καὶ τὰ ὕψη ἴσα, δὲν διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων· ἄρα ἰσοδυναμοῦσι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Κάθε τριγωνικὴ πυραμὶς εἶναι τὸ τριτημόριον τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους.

Εςω ΣΑΒΓ τριγωνικὴ πυραμὶς, ΑΒΓΔΕΣ τριγωνικὸν πρίσμα τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους· λέγω ὅτι ἡ πυραμὶς εἶναι τὸ τριτημόριον τοῦ πρίσματος.

Αφαιρεθείσης ἀπὸ τὸ πρίσμα τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ, μένει τὸ ςερεὸν ΣΑΓΔΕ τὸ ὁποῖον ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς τετραγωνικὴ πυραμὶς τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ εἶναι Σ καὶ ἡ βάσις τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΔΕ· ἄς ἐπιζευχθῇ ἡ διαγώνιος ΓΕ, καὶ ἄς ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον ΣΓΕ τὸ ὁποῖον μοιράζει τὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα εἰς δύο τριγωνικὰς ΣΑΓΕ, ΣΔΓΕ. Αἱ δύο αὗται πυραμίδες ἔχουν κοινὸν ὕψος τὴν κατεβαζομένην κάθετον ἀπὸ τὴν κορυφὴν Σ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΓΔΕ· ἔχουν βάσεις ἴσας, διότι τὰ τρίγωνα ΑΓΕ, ΔΓΕ, εἶναι τὰ δύο ἡμίσεα τοῦ αὐτοῦ παραλληλογράμμου· λοιπὸν αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΓΕ, ΣΔΓΕ, εἶναι ἰσοδύναμοι μεταξύ των· ἀλλ' ἡ πυραμὶς ΣΔΓΕ καὶ ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓ ἔχουν βάσεις ἴσας ΑΒΓ, ΔΕΣ· ἔχουν ὁμοίως τὸ αὐτὸ ὕψος, διότι τὸ ὕψος τοῦτο εἶναι ἡ ἀπόςασις τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΓ, ΔΕΣ. λοιπον αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΣΔΓΕ εἶναι ἰσοδύναμοι· ἀλλ' ἀπεδείχθη ὅτι ἡ πυραμὶς ΣΑΓΕ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν πυραμίδα ΣΑΓΕ· λοιπὸν αἱ τρεῖς πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΣΔΓΕ, ΣΑΓΕ αἱ ὁποῖαι συγκροτοῦν τὸ πρίσμα ΑΒΔ εἶναι ἰσοδύναμοι μεταξύ των. Λοιπὸν ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓ εἶναι τὸ τριτημόριον τοῦ πρίσματος ΑΒΔ τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Πόρισμα. Η ςερεότης μιᾶς τριγωνικῆς πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸ τριτημόριον τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς της ἐπὶ τοῦ ὕψους της.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Κάθε πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ ἔχει μέτρον τὸ τριτημόριον τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς της ΑΒΓΔΕ ἐπὶ τοῦ ὕψους της ΔΟ. σχ. 214.

Διότι ἐὰν διὰ τῶν διαγωνίων ΕΒ, ΕΓ διέλθωσι τὰ ἐπίπεδα ΣΕΒ, ΣΕΓ, ἡ πολυγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ, θέλει μοιρασθῇ εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας αἱ ὁποῖαι ὅλαι θέλουν ἔχει τὸ αὐτὸ ὕψος ΣΟ. Αλλὰ, κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ προλαβόντος θεωρήματος, ἑκάςη τούτων μετρεῖται ἀπὸ τὸ γινόμενον κάθε μιᾶς τῶν βάσεων ΑΒΕ, ΒΓΕ, ΓΔΕ, ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους της ΣΟ· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τριγωνικῶν πυραμίδων, ἢ ἡ πολυγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ θέλει ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΑΒΕ, ΒΓΕ, ΓΔΕ ἢ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ ΙΣΟ· λοιπὸν κάθε πυραμὶς ἔχει διὰ μέτρον τὸ τριτημόριον τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς της ἐπὶ τοῦ ὕψους της.

Πόρισμα Α'. Κάθε πυραμὶς εἶναι τὸ τριτημόριον τοῦ πρίσματος τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τοῦ ἰδίου ὕψους.

Πόρισμα Β'. Δύο πυραμίδες τοῦ αὐτοῦ ὕψους εἶναι μεταξύ των ὡς αἱ βάσεις των, καὶ δύο πυραμίδες τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι μεταξύ των ὡς τὰ ὕψη των.

Σχόλιον. Ἠμποροῦμεν νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν ςερεότητα κάθε πολυέδρου σώματος ἀναλύοντές το εἰς πυραμίδας, καὶ ἡ ἀνάλυσις αὕτη ἠμπορεῖ νὰ γένῃ κατὰ πολλοὺς τρόπους. Ο ἁπλούςερος συνίςαται εἰς τὸ νὰ διέλθωσι τὰ ἐπίπεδα τῆς διαιρέσεως ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς αὐτῆς ςερεᾶς γωνίας, ἢ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, νὰ ἑνωθῇ ἡ κορυφὴ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ςερεᾶς γωνίας μὲ τὰς κορυφὰς τῶν ἄλλων ςερεῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου· τότε θέλουν προκύψει τόσαι μερικαὶ πυραμίδες ὅσας ἕδρας ἔχει τὸ πολύεδρον, ἐκτὸς ἐκείνων αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν ςερεὰν γωνίαν ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀναχωροῦσι τὰ ἐπίπεδα τῆς διαιρέσεως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο συμμετρικὰ πολύεδρα εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των ἢ ἴσα κατὰ τὴν ςερεότητα.

Διότι 1.ον δύο τριγωνικαὶ συμμετρικαὶ πυραμίδες, ὡς ΣΑΒΓ, ΤΑΒΓ ἔχουν κοινὸν μέτρον τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ΑΒΓ ἐπὶ τοῦ τριτημορίου τοῦ ὕψους ΣΟ ἢ ΤΟ· λοιπὸν αἱ πυραμίδες αὗται εἶναι ἰσοδύναμοι μεταξύ των. σχ. 202.

2.ον Ἐὰν καθ' ὁποιονδήποτε τρόπον μοιρασθῇ ἓν τῶν συμμετρικῶν πολυέδρων εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας, τὸ ἄλλο πολύεδρον ἠμπορεῖ ὡσαύτως νὰ μοιρασθῇ εἰς συμμετρικὰς τριγωνικὰς πυραμίδας. Τώρα αἱ συμμετρικαὶ τριγωνικαὶ πυραμίδες εἶναι ἰσοδύναμοι ἡ κάθε μία μὲ τὴν