περιεχομένη μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων ΒΣΓ, ΔΣΓ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἠθέλαμεν εὕρη ὅτι διὰ τὴν προσδιόρισιν ςερεᾶς πενταπλῆς γωνίας, πρέπει νὰ ἦναι γνωςαὶ ἐκ τὸς τῶν πέντε ἐπιπέδων γωνιῶν αἵτινες τὴν συνθέτουν δύο ἀμοιβαῖαι κλίσεις τῶν ἐπιπέδων των· ἤθελον χρειασθῆ τρεῖς εἰς τὴν ἑξαπλῆν ςερεὰν γωνίαν καὶ οὕτως ἐφεξῆς. σχ. 199.

ΒΙΒΛΙΟΝ Ϛ.

ΤΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Καλεῖται ςερεὸν πολύεδρον, ἢ ἁπλῶς πολύεδρον, κάθε ςερεὸν περατούμενον ἀπὸ ἐπίπεδα ἢ ἕδρας ἐπιπέδους. (Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα ἀναγκαίως περατοῦνται ἀπὸ εὐθείας γραμμάς). Εν μέρει καλεῖται τετράεδρον τὸ ἔχον τέσσαρας ἕδρας ςερεόν· ἑξάεδρον τὸ ἕξ· ὀκτάεδρον τὸ ὀκτώ· δωδεκάεδρον τὸ δώδεκα· εἰκοσάεδρον τὸ εἴκοσι κ. τ. λ.

Τὸ τετράεδρον εἶναι τὸ ἁπλούςερον τῶν πολυέδρων· διότι τοὐλάχιςον χρειάζονται τρία ἐπίπεδα διὰ τὸν σχηματισμὸν ςερεᾶς γωνίας, καὶ τὰ τρία ταῦτα ἐπίπεδα ἀφίνουσι κενόν τι, τὸ ὁποῖον διὰ νὰ κλεισθῇ, ἀπαιτεῖ τοὐλάχιςον τέταρτον ἐπίπεδον.

Β'. Η κοινὴ τομὴ δύο προσκειμένων ἑδρῶν πολυέδρου τινὸς καλεῖται πλευρὰ ἢ κόψις (1) τοῦ πολυέδρου.

---

(1) Κόψιν ὠνόμασα τὴν ὁποίαν ὁ συγγραφεὺς λέγει (arête)· διότι ἡ λέξις αὕτη μὲ ἐφάνη καταληπτὴ καὶ συνήθης εἰς τὴν γλῶσσάν μας.

Γʹ. Καλεῖται κανονικὸν πολύεδρον τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι κανονικὰ ἴσα πολύγωνα, καὶ ὅλαι αἱ ςερεαὶ γωνίαι, εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Τὰ πολύεδρα ταῦτα εἶναι πέντε τὸν ἀριθμόν. Ορα τὸ παράρτημα εἰς τὰ βιβλία Ϛʹ καὶ Ζʹ.

Δʹ. Πρίσμα εἶναι τὸ περιεχόμενον ςερεὸν ὑπὸ πολλῶν παραλληλογράμμων ἐπιπέδων, περατουμένων ἀπὸ τὸ ἓν καὶ τὸ ἄλλο μέρος ἀπὸ δύο ἐπίπεδα πολύγωνα ἴσα καὶ παράλληλα.

Πρὸς κατασκευὴν τούτου τοῦ ςερεοῦ, ἔςω ΑΒΓΔΕ ὁποιονδήποτε πλύγωνον· ἐὰν εἰς ἐπίπεδον παράλληλον τοῦ ΑΒΓ, ἀχθῶσιν αἱ γραμμαὶ ΖΗ, ΗΘ, ΘΙ, κ. τ. λ. ἴσαι καὶ παράλληλοι μὲ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κ.τ.λ. θέλει σχηματισθῇ τὸ πολύγωνον ΖΗΘΙΚʹ ἴσον μὲ τὸ ΑΒΓΔΕ· ἐὰν ἀκολούθως ἑνωθῶσιν ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου ἕως τοῦ ἄλλου αἱ κορυφαὶ τῶν ὁμολόγων γωνιῶν διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΖ, ΒΗ, ΓΘ, κ. τ. λ, αἱ ἕδραι ΑΒΗΖ, ΒΓΘΖ, κ. τ. λ, θέλουν εἶναι παραλληλόγραμμα, καὶ τὸ οὕτως σχηματιζόμενον ςερεὸν ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚʹ θελει εἶναι πρίσμα. σχ. 200.

Εʹ. Τὰ ἴσα καὶ παράλληλα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΙΚʹ, καλοῦνται βάσεις τοῦ πρισματος· τὰ ἄλλα παραλληλόγραμμα ἐπίπεδα ὁμοῦ λαμβανόμενα συνιςοῦν τὴν παράπλευρον (laterale) ἢ κυρτὴν ἐπιφάνειάν τοῦ πρίσματος. Αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ΑΖ, ΒΗ, ΓΘ, κ. τ. λ., καλοῦνται πλευραὶ τοῦ πρίσματος.

Ϛʹ. Τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι τὸ ἀπόςημα τῶν δύο του βάσεων, ἢ ἡ ἠγμένη κάθετος ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς ἄνω βάσεως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς κάτω.

Ζʹ. Τὸ πρίσμα εἶναι ὀρθὸν ὅταν αἱ πλευραὶ ΑΖ, ΒΗ, κ. τ. λ. ἦναι κάθετοι εἰς τὰ ἐπίπεδα τῶν βάσεων: τότε ἑκάςη τούτων εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος· εἰς κάθε ἄλλην περίςασιν τὸ πρίσμα εἶναι πλάγιον, καὶ τὸ ὕψος εἶναι μικρότερον τῆς πλευρᾶς· διότι ἐκεῖνο μὲν εἶναι κάθετος, αὕτη δὲ πλαγία.

Η΄. Τὸ πρίσμα εἶναι τριγωνικὸν, τετραγωνικὸν, πενταγωνικὸν, ἑξαγωνικὸν, κ. τ. λ, καθὼς ἡ βάσις εἶναι τρίγωνον, τετράγωνον, πεντάγωνον, ἑξάγωνον, κ.τ.λ.

Θ΄. Τὸ πρίσμα τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν παραλληλόγραμμον, ἔχει ὅλας του τὰς ἕδρας παραλληλογραμμικάς· καλεῖται δὲ παραλληλεπίπεδον. σχ. 206.

Τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθογώνιον ὅταν ὅλαι του αἱ ἕδραι ἦναι ὀρθογώνια.

Ι΄. Μεταξὺ τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων διακρίνεται ὁ κύβος ἢ τὸ κανονικὸν ἑξάεδρον περιεχόμενον ὑπὸ ἓξ ἴσων τετραγώνων.

ΙΑ΄. Πυραμὶς εἶναι τὸ σχηματιζόμενον ϛερεὸν ὅταν πολλὰ τριγωνικὰ ἐπίπεδα ἀναχωροῦντα ἀπὸ τὴν αὐτὴν ϛιγμὴν Σ, τελειόνουν εἰς τὰς διαφόρους πλευρὰς τοῦ αὐτοῦ πολυγωνικοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔΕ. σχ. 196.

Τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ καλεῖται βάσις τῆς πυραμίδος, ἡ ϛιγμὴ Σ κορυφὴ, καὶ ἡ ἕνωσις τῶν τριγώνων ΑΣΒ, ΒΣΓ, κ. τ. λ, σχηματίζει τὴν κυρτὴν ἢ παράπλευρον ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος.

ΙΒ΄. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι ἡ κατεβαζομένη κάθετος ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, προεκβαλλομένου ἐὰν ἦναι ἀναγκαῖον.

ΙΓ΄. Η πυραμὶς εἶναι τριγωνικὴ, τετραγωνικὴ, κ τ.λ, καθὼς ἡ βάσις εἶναι τρίγωνον, τετράγωνον (εἰς γενικὴν σημασίαν). κ. τ. λ.

ΙΔ΄. Η πυραμὶς εἶναι κανονικὴ, ὅταν ἡ βάσὶς ἦναι κανονικὸν πολύγωνον, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἡ κατεβαζομένη κάθετος ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου ταύτης τῆς βάσεως: ἡ γραμμὴ αὕτη καλεῖται τότε ἄξων τῆς πυραμίδος.

ΙΕ΄. Διαγώνιος ἑνὸς πολυέδρου εἶναι ἡ εὐθεῖα ἥτις ἑνόνει τὰς κορυφὰς δύο μὴ προσκειμένων ςερεῶν γωνιῶν.

ΙϚ΄. Καλῶ συμμετρικὰ πολύεδρα δύο πολύεδρα τὰ ὁποῖα, ἔχοντα μίαν κοινὴν βάσιν, εἶναι ὁμοίως κατασκευασμένα, τὸ μὲν ἄνω τοῦ ἐπιπέδου ταύτης τῆς βάσεως, τὸ δὲ ὑποκάτω, μὲ ταύτην τὴν συνθήκην, ὅτι αἱ κορυφαὶ τῶν ὁμολόγων ςερεῶν γωνιῶν νὰ κεῖνται εἰς ἴσα διαςήματα ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον ταύτης τῆς βάσεως, μετρούμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καθέτου εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον.

Ἐὰν, παραδείγματος χάριν, ἡ εὐθεῖα ΣΤ ἦναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, καὶ εἰς τὴν ςιγμὴν Ο, ὅπου συναπαντᾷ τοῦτο τὸ ἐπίπεδον, διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη, αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΤΑΒΓ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν τὴν βάσιν ΑΒΓ, θέλουν εἶναι δύο συμμετρικὰ πολύεδρα. σχ. 202.

ΙΖ΄. Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες λέγονται ὅμοιαι ὅταν ἔχουν δύο ἕδρας ὁμοίας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, ὁμοίως κειμένας καὶ ἰσάκις κλινούσας.

Οὕτως, ὑποτιθεμένου ὅτι αἱ γωνίαι ΑΒΓ$=$ΔΕΖ, ΒΑΓ$=$ΕΔΖ, ΑΒΣ$=$ΔΕΤ, ΒΑΣ$=$ΕΔΤ, ἐὰν περιπλέον ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων ΑΒΣ, ΑΒΓ, ἦναι ἴση μὲ τὴν τῶν ὁμολόγων των ΔΤΕ, ΔΕΖ, αἱ πυραμίδες ΣΑΒΓ, ΤΔΕΖ, θέλουν εἶναι ὅμοιαι. σχ. 203.

ΙΗ΄. Ἀφ' οὗ σχηματισθῇ τρίγωνον μὲ τὰς κορυφὰς τριῶν γωνιῶν εἰλημμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας ἢ βάσεως ἑνὸς πολυέδρου, ἠμπορεῖ τις νὰ φαντασθῇ ὅτι αἱ κορυφαὶ τῶν διαφόρων ςερεῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου, τῶν ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ταύτης τῆς βάσεως κειμένων, εἶναι κορυφαὶ τόσων τριγωνικῶν πυραμίδων αἵτινες ἔχουν κοινὴν βάσιν τὸ σημειωθὲν τρίγωνον· ἑκάςη δὲ τούτων τῶν πυραμίδων θέλει προσδιορίζει τὴν θέσιν καθεμιᾶς ςερεᾶς γωνίας τοῦ πολυέδρου ὡς πρὸς ταύτην τὴν βάσιν. Τούτου τεθέντος:

Δύο πολύεδρα εἶναι ὅμοια ὅταν ἐν ᾧ ἔχουν βάσεις ὁμοίας, αἱ κορυφαὶ τῶν ὁμολόγων ςερεῶν γωνιῶν, ἐκτὸς τούτων τῶν βάσεων, προσδιορίζωνται ἀπὸ τριγωνικὰς πυραμίδας ὁμοίας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν.

ΙΘʹ. Καλῶ κορυφὰς ἑνὸς πολυέδρου τὰς ςιγμὰς αἱ ὁποῖαι κεῖνται εἰς τὰς κορυφὰς τῶν διαφόρων ςερεῶν γωνιῶν του.

Σ. Κ. Ολα τὰ πολύεδρα τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν εἶναι πολύεδρα μὲ γωνίας ἐξεχούσας ἢ κυρτὰ πολύεδρα. Καλοῦμεν οὕτως ἐκεῖνα τῶν ὁποίων ἡ ἐπιφάνεια δὲν ἠμπορεῖ νὰ συναπαντηθῇ ἀπὸ εὐθεῖαν γραμμὴν εἰς περισσότερα ἀπὸ δύο σημεῖα. Εἰς τοιούτου εἴδους πολύεδρα τὸ ἐπίπεδον μιᾶς ἕδρας ἐὰν προεκβληθῇ, δὲν ἠμπορεῖ νὰ τέμνῃ τὸ πολύεδρον· ἀδύνατον λοιπὸν εἶναι μέρος τοῦ πολυέδρου νὰ εὑρίσκεται ἄνω τοῦ ἐπιπέδου μιᾶς ἕδρας, καὶ μέρος ὑποκάτω· τὸ πολύεδρον εἶναι ὅλον ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τούτου τοῦ ἐπιπέδου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΠΡΩΤΗ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο πολύεδρα δὲν ἠμποροῦν νὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κορυφῶν καὶ τὰς αὐτὰς κορυφὰς χωρὶς νὰ ἐφαρμόζεται τὸ ἓν μὲ τὸ ἄλλο.

Διότι ἂς ὑποθέσωμεν ἓν τῶν πολυέδρων κατασκευασμένον. Ἐὰν θέλωμεν νὰ κατασκευάσωμεν ἓν ἄλλο τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κορυφῶν καὶ τὰς αὐτὰς κορυφάς, πρέπει τὰ ἐπίπεδα τούτου νὰ μὴ διέρχωνται ἀπὸ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἀπὸ τὰ ὁποῖα διέρχονται τὰ ἐπίπεδα τοῦ πρώτου· διότι ἄλλως δὲν ἤθελε διαφέρει τὸ ἓν ἀπὸ τὸ ἄλλο: πλὴν τότε φανερὸν εἶναι ὅτι μερικὰ τῶν νέων ἐπιπέδων ἤθελον τέμνει τὸ πρῶτον πολύεδρον· ἤθελον ὑπάρχει κορυφαὶ ἄνω τούτων τῶν ἐπιπέδων, καὶ κορυφαὶ ὑποκάτω, τὸ ὁποῖον δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἀνήκῃ εἰς κυρτὸν πολύεδρον: λοιπὸν ἐὰν δύο πολύεδρα ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κορυφῶν καὶ τὰς αὐτὰς κορυφάς, ἀναγκαίως πρέπει νὰ ἐφαρμόζεται τὸ ἓν μὲ τὸ ἄλλο.

Σχόλιον. Δεδομένων κατὰ θέσιν τῶν σημείων Α, Β, Γ, Κ', κ.τ.λ, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ χρησιμεύσουν ὡς κορυφαὶ ἑνὸς πολυέδρου, εὔκολον εἶναι νὰ διαγράψωμεν τὸ πολύεδρον.

Εκλέγομεν τρία πλησίον σημεῖα Δ, Ε, Θ, τοιαῦτα ὥςε τὸ ἐπίπεδον ΔΕΘ νὰ διέρχεται, ἐὰν τοῦτο ἔχῃ χώραν, διὰ νέων σημείων Κ', Γ, ἀλλ' ὅλα τὰ ἄλλα νὰ ἀφίνῃ ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ ὅλα ἄνω τοῦ ἐπιπέδου ἢ ὅλα ὑποκάτω· τὸ ἐπίπεδον ΔΕΘ ἢ ΔΕΘΚ'Γ, οὕτω προσδιωρισμένον, θέλει εἶναι μία ἕδρα τοῦ ςερεοῦ. Διὰ μιᾶς τῶν πλευρῶν του ΕΘ περνοῦμεν ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον περιςρέφομεν ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ νέαν κορυφὴν Ζ, ἢ πολλὰς ἐνταυτῷ Ζ, Ι· θέλομεν ἔχει μίαν δευτέραν ἕδραν τὴν ΖΕΘ ἢ ΖΕΘΙ· ἐξακολουθοῦμεν νὰ περνοῦμεν ἐπίπεδα διὰ τῶν εὑρημένων πλευρῶν, ἕως οὗ τὸ ςερεὸν νὰ περατωθῇ πανταχόθεν: τὸ ςερεὸν τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον πολύεδρον, διότι δὲν ὑπάρχουν δύο τὰ ὁποῖα νὰ ἠμποροῦν νὰ ἔχουν τὰς αὐτὰς κορυφάς. σχ. 204.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς δύο συμμετρικὰ πολύεδρα αἱ ὁμόλογοι ἕδραι εἶναι ἴσαι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ ἡ κλίσις δύο προσκειμένων ἑδρῶν εἰς τὸ ἓν τούτων τῶν ςερεῶν, εἶναι ἴση μὲ τὴν κλίσιν τῶν ὁμολόγων ἑδρῶν εἰς τὸ ἄλλο.

Εςω ΑΒΓΔΕ ἡ κοινὴ βάσις εἰς τὰ δύο πολύεδρα, ἔςωσαν Μ καὶ Ν αἱ κορυφαὶ δύο ὁποιωνδήποτε ςερεῶν γωνιῶν τοῦ ἑνὸς πολυέδρου, Μ' καὶ Ν' αἱ ὁμόλογοι κορυφαὶ τοῦ ἄλλου· πρέπει κατὰ τὸν ὁρισμὸν, αἱ εὐθεῖαι ΜΜ', ΝΝ', νὰ ἦναι κάθετοι εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, καὶ νὰ διαιρῶνται εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὰς ςιγμὰς μ καὶ ν ὅπου συναπαντοῦν τοῦτο τὸ ἐπίπεδον. Τούτου τεθέντος, λέγω ὅτι τὸ διάςημα ΜΝ εἶναι ἴσον μὲ τὸ Μ'Ν'. σχ. 205.

Διότι ἐὰν γραφῇ τὸ τραπέζιον μΜ'Ν'ν ὁλόγυρα τῆς μν ἕως οὗ τὸ ἐπίπεδόν του νὰ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου μΜΝν· ἐξ αἰτίας τῶν ὀρθῶν γωνιῶν εἰς μ καὶ εἰς ν, ἡ πλευρὰ μΜ' θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν μΜ, καὶ ἡ νΝ' ἐπὶ τῆς νΝ· λοιπὸν τὰ δύο τραπέζια θέλουν ἐφαρμόσει, καὶ θέλει εἶναι ΜΝ=Μ'Ν'.

Ἔστω Π μία τρίτη κορυφὴ τοῦ ἄνω πολυέδρου, καὶ Π' ἡ ὁμόλογος αὐτῇ εἰς τὸ κάτω, ὡσαύτως θέλει εἶναι ΜΠ=Μ'Π καὶ ΝΠ=Ν'Π'· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΜΝΠ, τὸ ὁποῖον ἑνόνει τρεῖς ὁποιασδήποτε κορυφὰς τοῦ ἄνω πολυέδρου, εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον Μ'Ν'Π' τὸ ὁποῖον ἑνόνει τὰς τρεῖς ὁμολόγους κορυφὰς τοῦ κάτω πολυέδρου.

Ἐὰν μεταξὺ τούτων τῶν τριγώνων θεωρήσωμεν μόνον τὰ σχηματιζόμενα εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῶν πολυέδρων, ἠμποροῦμεν νὰ συμπεράνωμεν ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο πολυέδρων σύγκεινται ἀπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τριγώνων τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα τὸ κάθε ἓν μὲ τὸ κάθε ἕν.

Λέγω τώρα ὅτι ἐὰν τινὰ ἐκ τούτων τῶν τριγώνων εὑρίσκωνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τῆς μιᾶς ἐπιφανείας καὶ σχηματίζουν τὴν αὐτὴν πολύγωνον ἕδραν, τὰ ὁμόλογα τρίγωνα θέλουν εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τῆς ἄλλης ἐπιφανείας καὶ σχηματίζει μίαν ἴσην πολύγωνον ἕδραν.

Τῷ ὄντι, ἔστωσαν ΜΠΝ, ΝΠΚ, δύο προσκείμενα τρίγωνα τὰ ὁποῖα ὑποτίθενται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ ἔστωσαν Μ'Π'Ν', Ν'Π'Κ' τὰ ὁμόλογά των. Ἔχομεν τὴν γωνίαν ΜΝΠ=Μ'Ν'Π', τὴν γωνίαν ΠΝΚ=Π'Ν'Κ' καὶ ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΜΚ, Μ'Κ', τὸ τρίγωνον ΜΝΚ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ Μ'Ν'Κ', οὕτως ἡ γωνία ΜΝΚ=Μ'Ν'Κ'. Ἀλλ' ἐπειδὴ ΜΠΝΚ εἶναι ἓν μόνον ἐπίπεδον, ἔχομεν τὴν γωνίαν ΜΝΚ=ΜΝΠ+ΠΝΚ· λοιπὸν ὡσαύτως Μ'Ν'Κ'=Μ'Ν'Π'+Π'Ν'Κ'. Τώρα, ἐὰν τὰ τρία ἐπίπεδα M'N'Π', Π'N'K', M'N'K' δὲν ἐταυτίζοντο, ἤθελον σχηματίζει ςερεὰν γωνίαν, καὶ ἤθελεν εἶναι (20, 5) $M'N'K' < M'N'\Pi' + \Pi'N'K'$· λοιπὸν, ἐπειδὴ αὕτη ἡ συνθήκη δὲν ἔχει χώραν, τὰ δύο τρίγωνα M'N'Π', Π'N'K', εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Εντεῦθεν ἕπεται ὅτι κάθε ἕδρα, εἴτε τριγωνικὴ εἴτε πολύγωνος, εἰς τὸ ἓν πολύεδρον, ἀντιςοιχεῖ εἰς μίαν ἴσην ἕδραν εἰς τὸ ἄλλο, καὶ οὕτως τὰ δύο πολύεδρα περιέχονται ὑπὸ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα τὸ κάθε ἓν μὲ τὸ κάθε ἕν.

Μένει νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ κλίσις δύο ὁποιωνδήποτε προσκειμένων ἑδρῶν εἰς τὸ ἓν πολύεδρον εἶναι ἴση μὲ τὴν κλίσιν τῶν δύο ὁμολόγων ἑδρῶν εἰς τὸ ἄλλο.

Εςωσαν MΠN, NΠK, δύο τρίγωνα σχηματισμένα ἐπὶ τῆς κοινῆς κόψεως NΠ εἰς τὰ ἐπίπεδα δύο προσκειμένων ἑδρῶν· ἔςωσαν M'Π'N', N'Π'K', τὰ ὁμόλογά των· ἠμποροῦμεν νὰ φαντασθῶμεν εἰς N γωνίαν ςερεὰν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας MNK, MNΠ, ΠNK, καὶ εἰς N' γωνίαν ςερεὰν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰς τρεῖς M'N'K', M'N'Π', Π'N'K'. Τώρα, ἐδείξαμεν ὅτι αἱ ἐπίπεδοι αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι ἡ καθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν· λοιπὸν ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων MNΠ, ΠNK, εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν ὁμολόγων των M'N'Π', Π'N'K' (22, 5).

Λοιπὸν εἰς τὰ συμμετρικὰ πολύεδρα, αἱ ἕδραι εἶναι ἴσαι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, καὶ τὰ ἐπίπεδα δύο ὁποιωνδήποτε προσκειμένων ἑδρῶν τοῦ ἑνὸς τῶν ςερεῶν, ἔχουν μεταξύ των τὴν αὐτὴν κλίσιν τὴν ὁποίαν τὰ ἐπίπεδα τῶν δύο ὁμολόγων ἑδρῶν τοῦ ἄλλου.

Σχόλιον. Δυνάμεθα νὰ σημειώσωμεν ὅτι αἱ ςερεαὶ γωνίαι τοῦ ἑνὸς πολυέδρου εἶναι αἱ συμμετρικαὶ τῶν ςερεῶν γωνιῶν τοῦ ἄλλου· διότι ἐὰν ἡ ςερεὰ γωνία N σχηματίζεται ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα MNΠ, ΠΝΚ, ΚΝΡ κ. τ. λ. ἡ ὁμόλογος αὐτῇ Ν′ σχηματίζεται ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα Μ′Ν′Π′, Π′Ν′Κ′, Κ′Ν′Ρ′, κ. τ. λ. Ταῦτα φαίνονται διατεταγμένα κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν ὡς καὶ τὰ ἄλλα· πλὴν ἐπειδὴ αἱ δύο ςερεαὶ γωνίαι εἶναι εἰς θέσιν ἀντίςροφον ἡ μία ὡς πρὸς τὴν ἄλλην, ἕπεται ὅτι ἡ πραγματικὴ διάταξις τῶν ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὴν ςερεὰν γωνίαν Ν′ εἶναι ἀντίςροφος τῆς διατάξεως ἥτις ὑπάρχει εἰς τὴν ὁμόλογον γωνίαν Ν. Αλλως ἡ κλίσις τῶν προσεχῶν ἐπιπέδων εἶναι ἴση εἰς τὴν μίαν καὶ τὴν ἄλλην ςερεὰν γωνίαν· λοιπὸν αἱ ςερεαὶ αὗται γωνίαι εἶναι συμμετρικαὶ ἡ μία τῆς ἄλλης. Βλέπε τὸ σχόλιον τῆς ΚΓ′ προτάσεως, βιβλ. Ε′.

Η σημείωσις αὕτη δεικνύει ὅτι ὁποιονδήποτε πολύεδρον ἓν μόνον συμμετρικὸν δύναται νὰ ἔχῃ. Διότι ἐὰν ἐπὶ ἄλλης βάσεως κατασκευασθῇ νέον πολύεδρον συμμετρικὸν μὲ τὸ δεδομένον, αἱ ςερεαί του γωνίαι πάντοτε θέλουν εἶναι συμμετρικαὶ τῶν γωνιῶν τοῦ δεδομένου· λοιπὸν θέλουν εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τοῦ συμμετρικοῦ πολυέδρου τοῦ ἐπὶ τῆς πρώτης βάσεως κατασκευασμένου. Αλλως αἱ ὁμόλογοι ἕδραι θέλουν εἶναι ἴσαι· λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα συμμετρικὰ πολύεδρα ἐπὶ μιᾶς ἢ ἄλλης βάσεως κατασκευασμένα θέλουν ἔχει τὰς ἕδρας καὶ τὰς ςερεὰς γωνίας ἴσας· λοιπὸν θέλουν ἐφαρμόσει διὰ τῆς ἐπιθέσεως, καὶ σχηματίσει ἓν μόνον καὶ τὸ αὐτὸ πολύεδρον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ′.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο πρίσματα εἶναι ἴσα ὅταν ἔχουν μίαν ςερεὰν γωνίαν περιεχομένην μεταξὺ τριῶν ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα τὸ κάθε ἓν μὲ τὸ κάθε ἓν καὶ ὁμοίως κείμενα.

Εςω ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ ἴση μὲ τὴν βάσιν αβγδε, τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΗΖ ἴσον μὲ τὸ παραλληλόγραμμον αβηζ, καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΒΓΘΗ ἴσον μὲ τὸ παραλληλόγραμμον βγθη· λέγω ὅτι τὸ πρίσμα ΑΒΓΙ θέλει εἶναι ἴσον με τὸ πρίσμα αβγι. σχ. 200.

Διότι ἄς τεθῇ ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν αβγδε, αἱ δύο αὗται βάσεις θέλουν ἐφαρμόσει: ἀλλ' αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν ςερεὰν γωνίαν Β εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν ςερεὰν γωνίαν β, ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, τουτέςι, ΑΒΓ=αβγ, ΑΒΗ=αβη, καὶ ΗΒΓ=ηβγ· περιπλέον αἱ γωνίαι αὗται κεῖνται ὁμοίως· λοιπὸν αἱ ςερεαὶ γωνίαι Β καὶ β εἶναι ἴσαι, καὶ ἑπομένως ἡ πλευρὰ ΒΗ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν βη. Βλέπομεν ὡσαύτως ὅτι ἐξ αἰτίας τῶν ἴσων παραλληλογράμμων ΑΒΗΖ, αβηζ, ἡ πλευρὰ ΗΖ θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ηζ, καὶ ὁμοίως ἡ ΗΘ ἐπὶ τῆς ηθ· λοιπὸν ἡ ἄνω βάσις ΖΗΘΙΚ θέλει ἐφαρμόσει ἐντελῶς μὲ τὴν ἴσην μὲ αὐτὴν ζηθικ, καὶ τὰ δύο ςερεὰ θέλουν ταυτισθῇ· διότι θέλουν ἔχει τὰς αὐτὰς κορυφὰς (πρό. 1).

Πόρισμα. Δύο ὀρθὰ πρίσματα τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις ἴσας καὶ ὕψη ἴσα εἶναι ἴσα. Διότι οὔσης τῆς ΑΒ ἴσης μὲ τὴν αβ, καὶ τοῦ ὕψους ΒΗ ἴσου μὲ τὸ βη, τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΗΖ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀρθογώνιον αβηζ· τὸ αὐτὸ θέλει ὑπάρχει διὰ τὰ ὀρθογώνια ΒΗΘΓ, βηθγ. Οὕτως τὰ τρία ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὴν ςερεὰν γωνίαν Β εἶναι ἴσα μὲ τὰ τρία τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὴν ςερεὰν γωνίαν β. Λοιπὸν τὰ δύο πρίσματα εἶναι ἴσα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς κάθε παραλληλεπίπεδον τὰ ἀπέναντι ἐπίπεδα εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τούτου τοῦ ϛερεοῦ, αἱ βάσεις ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, εἶναι παραλληλόγραμμα ἴσα, καὶ αἱ πλευραί των εἶναι παράλληλοι: μένει λοιπὸν νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ δύο ἀπέναντι παραπλεύρους ἕδρας, ὡς ΑΕΘΔ, ΒΖΗΓ. Τώρα ΑΔ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΒΓ· διότι τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΑΕ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΒΖ: λοιπὸν ἡ γωνία ΔΑΕ εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ ΓΒΖ (13, 5), καὶ τὸ ἐπίπεδον ΔΑΕ παράλληλον τοῦ ΓΒΖ· λοιπὸν ὡσαύτως τὸ παραλληλόγραμμον ΔΑΕΘ εἶναι ἴσον μὲ τὸ παραλληλόγραμμον ΓΒΖΗ. Ὁμοίως θέλομεν δείξει ὅτι τὰ ἀπέναντι παραλληλόγραμμα ΑΒΖΕ, ΔΓΗΘ, εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα. σχ. 206.

Πόρισμα. Ἐπειδὴ τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ϛερεὸν περιεχόμενον ὑπὸ ἓξ ἐπιπέδων ἐκ τῶν ὁποίων τὰ ἀπέναντι εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα, ἕπεται ὅτι μία ὁποιαδήποτε ἕδρα καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς ἠμποροῦν νὰ ληφθοῦν ὡς βάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Σχόλιον. Δεδομένων τριῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΕ, ΑΔ αἵτινες διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς ϛιγμῆς Α, καὶ κάμνουν μεταξύ των γωνίας δεδομένας, δυνατὸν εἶναι ἐπὶ τῶν τριῶν τούτων εὐθειῶν νὰ κατασκευασθῇ παραλληλεπίπεδον· πρὸς τοῦτο πρέπει ἀπὸ τὸ ἄκρον ἑκάϛης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον τοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο ἄλλων· τουτέϛιν ἀπὸ τὴν ϛιγμὴν Β ἐπίπεδον παράλληλον τοῦ ΔΑΕ, ἀπὸ τὴν ϛιγμὴν Δ ἐπίπεδον παράλληλον τοῦ ΒΑΕ· καὶ ἀπὸ τὴν ϛιγμὴν Ε ἐπίπεδον πράλληλον τοῦ ΒΑΔ· αἱ ἀμοιβαῖαι συναπαντήσεις τούτων τῶν ἐπιπέδων θέλουν σχηματίσει τὸ ζητούμενον παραλληλεπίπεδον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἰς κάθε παραλληλεπίπεδον αἱ ἀπέναντι ϛερεαὶ γωνίαι εἶναι συμμετρικαὶ ἡ μία τῆς ἄλλης· καὶ αἱ ἠγμέναι διαγώνιοι ἀπὸ τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν τούτων τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἂς συγκρίνωμεν, παραδείγματος χάριν, τὴν ϛερεὰν γωνίαν Α μὲ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς Η· ἡ γωνία ΕΑΒ, ἴση τῇ ΕΖΒ, εἶναι ὁμοίως ἴση τῇ ΘΗΓ, ἡ γωνία ΔΑΕ = ΔΘΕ = ΓΗΖ, καὶ ἡ γωνία ΔΑΒ = ΔΓΒ = ΘΗΖ· λοιπὸν αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν ϛερεὰν γωνίαν Α εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τρεῖς αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν ϛερεὰν γωνίαν Η, ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν· ἄλλως εὔκολον εἶναι νὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ διάταξίς των διαφέρει εἰς τὴν μίαν καὶ τὴν ἄλλην· λοιπὸν 1.ον αἱ δύο ϛερεαὶ γωνίαι Α καὶ Η εἶναι συμμετρικαὶ ἡ μία τῆς ἄλλης (23, 5).

Ἂς φαντασθῶμεν τώρα δύο διαγωνίους ΕΓ, ΑΗ, ἠγμένας ἀπὸ δύο ἀπέναντι κορυφάς: ἐπειδὴ ΑΕ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΓΗ, τὸ σχῆμα ΑΕΗΓ εἶναι παραλληλόγραμμον· λοιπὸν αἱ διαγώνιοι ΕΓ, ΑΗ, τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη. Ὁμοίως θέλομεν δείξει ὅτι ἡ διαγώνιος ΕΓ καὶ μία ἄλλη ΔΖ τέμνονται ὡσαύτως εἰς δύο ἴσα μέρη· λοιπὸν 2.ον αἱ τέσσαρες διαγώνιοι τέμνονται ἀμοιβαίως εἰς δύο ἴσα μέρη, εἰς τὴν αὐτὴν ϛιγμὴν ἥτις δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ κέντρον τοῦ παραλληλεπιπέδου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ ἐπίπεδον ΒΔΘΖ, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ δύο ἀπέναντι παραλλήλων κόψεων ΒΖ, ΔΘ, διαιρεῖ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ εἰς δύο πρίσματα τριγωνικὰ ΑΒΔΘΕΖ, ΗΘΖΒΓΔ, συμμετρικὰ τὸ ἓν τοῦ ἄλλου. σχ. 207.

Κατὰ πρῶτον τὰ δύο ταῦτα ϛερεὰ εἶναι πρίσματα· διότι τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΕΖΘ, ἔχοντα τὰς πλευράς των ἴσας καὶ παραλλήλους, εἶναι ἴσα, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν αἱ παράπλευροι ἕδραι ΑΒΖΕ, ΑΔΘΕ, ΒΔΘΖ, εἶναι παραλληλόγραμμα· λοιπὸν τὸ ςερεὸν ΑΒΔΘΕΖ εἶναι πρίσμα: τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὸ ςερεὸν ΗΘΖΒΓΔ· λέγω τώρα ὅτι τὰ δύο ταῦτα πρίσματα εἶναι συμμετρικὰ τὸ ἓν τοῦ ἄλλου.

Ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒΔ ἂς γίνη τὸ πρίσμα ΑΒΔΕ′Ζ′Θ′ τὸ ὁποῖον νὰ ἦναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ πρίσματος ΑΒΔΕΖΘ. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα (πρό. 2) τὸ ἐπίπεδον ΑΒΖ′Ε′ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΖΕ, καὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΔΘ′Ε′ ἴσον μὲ τὸ ἐπίπεδον ΑΔΘΕ· ἀλλ' ἡ σύγκρισις τοῦ πρίσματος ΗΘΖΒΓΔ μὲ τὸ πρίσμα ΑΒΔΘ′Ε′Ζ′, δεικνύει ὅτι ἡ βάσις ΗΘΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒΔ· τὸ παραλληλόγραμμον ΗΘΔΓ, ἴσον μὲ τὸ ΑΒΖΕ, ἰσοῦται ὡσαύτως μὲ τὸ ΑΒΖ′Ε′, καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΗΖΒΓ, ἴσον μὲ τὸ ΑΔΘΕ, ἰσοῦται ὡσαύτως μὲ τὸ ΑΔΘ′Ε′· λοιπὸν τὰ τρία ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὴν ςερεὰν γωνίαν Η εἰς τὸ πρίσμα ΗΘΖΒΓΔ, εἶναι ἴσα μὲ τὰ τρία ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὴν ςερεὰν γωνίαν Α εἰς τὸ πρίσμα ΑΒΔΘ′Ε′Ζ′, τὸ κάθε ἓν μὲ τὸ κάθε ἓν· ἄλλως εἶναι ὁμοίως διατεταγμένα· λοιπὸν τὰ πρίσματα ταῦτα εἶναι ἴσα (πρό. 3), καὶ ἠμποροῦν νὰ ἐπιτεθῶσιν. Ἀλλὰ τὸ πρίσμα ΑΒΔΘ′Ε′Ζ′ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ πρίσματος ΑΒΔΘΕΖ· λοιπὸν καὶ τὸ πρίσμα ΗΘΖΒΓΔ, εἶναι ὡσαύτως τὸ συμμετρικὸν τοῦ ΑΒΔΘΕΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ′.

ΛΗΜΜΑ.

Εἰς κάθε πρίσμα ΑΒΓΙ, αἱ γινόμεναι τομαὶ ΝΟΠΚΡ ΣΤΦΧΨ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, εἶναι πολύγωνα ἴσα. σχ. 201.

Διότι αἱ πλευραὶ ΝΟ, ΣΤ, εἶναι παράλληλοι, ὡς κοιναὶ τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου ΑΒΗΖ· αἱ ἴδιαι πλευραὶ ΝΟ, ΣΤ περιέχονται μεταξὺ τῶν παραλλήλων ΝΣ, ΟΤ αἵτινες εἶναι πλευραὶ τοῦ πρίσματος· λοιτὸν ΝΟ εἶναι ἴση τῇ ΣΤ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον αἱ πλευραὶ ΟΠ, ΠΚ, ΚΡ, κ. τ. λ. τῆς τομῆς ΝΟΠΚΡ εἶναι ἀμοιβαίως ἴσαι μὲ τὰς πλευρὰς ΤΦ, ΦΧ, ΧΨ κ.τ.λ. τῆς τομῆς ΣΤΦΧΨ. Ἄλλως ἐπειδὴ αἱ ἴσαι πλευραὶ εἶναι καὶ παράλληλοι, ἕπεται ὅτι αἱ γωνίαι ΝΟΠ, ΟΠΚ, κ. τ. λ. τῆς πρώτης τομῆς, εἶναι ἀμοιβαίως ἴσαι μὲ τὰς γωνίας ΣΤΦ, ΤΦΧ, κ.τ.λ. τῆς δευτέρας. Λοιπὸν αἱ δύο τομαὶ ΝΟΠΚΡ, ΣΤΦΧΨ, εἶναι πολύγωνα ἴσα.

Πόρισμα. Κάθε τομὴ γινομένη εἰς ἓν πρίσμα παραλλήλως τῆς βάσεως αὐτοῦ, εἶναι ἴση μὲ αὐτὴν τὴν βάσιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η′.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὰ δύο συμμετρικὰ τριγωνικὰ πρίσματα ΑΒΔΘΕΖ, ΒΓΔΖΗΘ, εἰς τὰ ὁποῖα ἀποσυντίθεται τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ, εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των. σχ. 208.

Ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β καὶ Ζ ἂς ἀχθῶσι τὰ ἐπίπεδα Βαδγ, Ζεθη κάθετα ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΖ, τὰ ὁποῖα συναπαντοῦν ἀπὸ τὸ ἓν μέρος εἰς α, δ, γ, καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο εἰς ε, θ, η, τὰς τρεῖς ἄλλας πλευρὰς ΑΕ, ΔΘ, ΓΗ τοῦ ἰδίου παραλληλεπιπέδου· αἱ τομαὶ Βαδγ, Ζεθη εἶναι παραλληλόγραμμα ἴσα. Αἱ τομαὶ αὗται εἶναι ἴσαι, ὡς τομαὶ ὑπὸ ἐπιπέδων καθέτων εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν καὶ ἑπομένως παραλλήλων (πρό. 7)· εἶναι παραλληλόγραμμα, διότι δύο ἀπέναντι πλευραὶ τῆς αὐτῆς τομῆς αΒ, δγ, εἶναι αἱ κοιναὶ τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΖΕ, ΔΓΗΘ, ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Διὰ λόγον παρόμοιον, τὸ σχῆμα ΒαεΖ εἶναι παραλληλόγραμμον, καθὼς καὶ αἱ ἄλλαι παράπλευροι ἕδραι ΒΖηγ, γδθη, αδθε, τοῦ στερεοῦ ΒαδγΖεθη· λοιπὸν τὸ στερεὸν τοῦτο εἶναι πρίσμα (ὁρ. 4)· καὶ τὸ πρίσμα τοῦτο εἶναι ὀρθὸν, διότι ἡ πλευρὰ ΒΖ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΒΖΘΔ μοιρασθῇ τὸ ὀρθὸν πρίσμα Βθ εἰς δύο τριγωνικὰ ὀρθὰ πρίσματα αΒδεΖθ, ΒδγΖθη· λέγω ὅτι τὸ πλάγιον τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΔΕΖΘ, θέλει ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ τριγωνικὸν ὀρθὸν αΒδεΖθ.

Τῷ ὄντι ἐπειδὴ τὰ δύο ταῦτα πρίσματα ἔχουν κοινὸν τὸ ςερεὸν ΑΒΔθεΖ, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ ὑπόλοιπα μέρη, δηλαδὴ, τὰ ςερεὰ ΒαΑΔδ, ΖεΕΘθ εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των.

Τώρα, ἐξ αἰτίας τῶν παραλληλογράμμων ΑΒΖΕ, αΒΖε, αἱ πλευραὶ ΑΕ, αε, ἴσαι μὲ τὴν παράλληλόν των ΒΖ, εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσαι· οὕτω, μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ κοινοῦ μέρους Αε, μένει Αα = Εε. Ὁμοίως δείξομεν ὅτι Δδ = Θθ.

Ηδη, διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἐπίθεσιν τῶν δύο ςερεῶν ΒαΑΔδ, ΖεΕΘθ, ἄς θέσωμεν τὴν βάσιν Ζεθ ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν Βαδ· τότε ἐπειδὴ ἡ ςιγμὴ ε πίπτει εἰς α, καὶ ἡ θ εἰς δ, αἱ πλευραὶ εΕ, Θθ, θέλουν πέσει ἐπὶ τῶν ἴσων μὲ αὐτὰς αΑ, Δδ, διότι εἶναι κάθετοι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον Βαδ· λοιπὸν τὰ δύο ςερεὰ περὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος κατὰ πάντα θέλουν ἐφαρμόσει τὸ ἓν μὲ τὸ ἄλλο· λοιπὸν τὸ πλάγιον πρίσμα ΒΑΔΖΕΘ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ὀρθὸν ΒαδΖεθ.

Μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον θέλομεν δείξει ὅτι τὸ πλάγιον πρίσμα ΒΔΓΖΘΗ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ὀρθὸν ΒδγΖθη. Ἀλλὰ τὰ δύο ὀρθὰ πρίσματα ΒαδΖεθ, ΒδγΖθη εἶναι ἴσα μεταξύ των, διότι ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος ΒΖ καὶ αἱ βάσεις των Βαδ, Βδγ εἶναι ἡμίσεα τοῦ αὐτοῦ παραλληλογράμμου (πρ. 3. πόρ.). Λοιπὸν τὰ δύο τριγωνικὰ πρίσματα ΒΑΔΖΕΘ, ΒΔΓΖΘΗ, ἰσοδύναμα μὲ ἴσα πρίσματα, εἶναι καὶ μεταξύ των ἰσοδύναμα.

Πόρισμα. Κάθε τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΔΘΕΖ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΗ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς ςερεᾶς γωνίας Α, μὲ τὰς αὐτὰς κόψεις ΑΒ, ΑΔ, ΑΕ κατασκευαζομένου.