κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ προσκείμεναι κάμνουν ὁμοῦ δύο ὀρθάς· ἐὰν λοιπὸν ἐπίπεδον ἦναι κάθετον εἰς ἄλλο, τοῦτο εἶναι κάθετον εἰς ἐκεῖνο. Παρομοίως εἰς τὴν συναπάντησιν παραλλήλων ἐπιπέδων μὲ τρίτον ἐπίπεδον, ὑπάρχουσιν αἱ αὐταὶ ἰσότητες καὶ αἱ αὐταὶ ἰδιότητες ὁποῦ καὶ εἰς τὴν συναπάντησιν δύο παραλλήλων γραμμῶν μὲ τρίτην τινά.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν ΑΠ ἦναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, κάθε ἐπίπεδον ΑΠΒ δι' αὐτῆς διερχόμενον, θέλει εἶναι κάθετον εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ. σχ. 194.

Ἔστω ΒΓ ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ΑΒ, ΜΝ· ἐὰν εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ ἀχθῇ ἡ ΔΕ κάθετος εἰς τὴν ΒΓ, ἡ ΑΠ, οὖσα κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, θέλει εἶναι κάθετος εἰς κάθε μίαν τῶν δύο εὐθειῶν ΒΓ, ΔΕ· ἀλλ' ἡ γωνία ΑΠΔ, σχηματιζομένη ἀπὸ τὰς δύο καθέτους ΠΑ, ΠΔ, ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΒΠ, μετρεῖ τὴν γωνίαν τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΒ, ΜΝ· λοιπὸν ἐπειδὴ ἡ γωνία αὕτη εἶναι ὀρθή, τὰ δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα μεταξύ των (ὁρ. 5).

Σχόλιον. Ὅταν τρεῖς εὐθεῖαι, ὡς ΑΠ, ΒΠ, ΔΠ, ἦναι κάθετοι μεταξύ των, ἑκάστη τούτων εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο ἄλλων καὶ τὰ τρία ἐπίπεδα εἶναι κάθετα μεταξύ των.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον ΑΒ ἦναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒ ἀχθῇ ἡ ΠΑ κάθετος ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΠΒ, λέγω ὅτι ἡ ΠΑ θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ. σχ. 194.

Διότι, ἐὰν εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ ἀχθῇ ἡ ΠΔ κάθετος ἐπὶ τῆς ΠΒ, ἡ γωνία ΑΠΔ θέλει εἶναι ὀρθή, ἐπειδὴ τὰ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΡΟΥ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα μεταξύ των· λοιπὸν ἡ ΑΠ εἶναι κάθετος εἰς τὰς δύο εὐθείας ΠΒ, ΠΔ· λοιπὸν εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδόν των ΜΝ.

Πόρισμα. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον ΑΒ ἦναι κάθετον εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, καὶ ἐκ μιᾶς ςιγμῆς Π τῆς κοινῆς τομῆς ὑψωθῇ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, λέγω ὅτι ἡ κάθετος αὕτη θέλει εὑρίσκεται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒ: διότι, ἄλλως, ἠμπορούσαμεν νὰ ἄξωμεν εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒ μίαν κάθετον ΑΠ ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΒΠ, ἥτις εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἤθελεν εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ· λοιπὸν εἰς τὴν αὐτὴν ςιγμὴν Π ἤθελον ὑπάρχει δύο κάθετοι εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ: ὅπερ ἀδύνατον (πρό. 4).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ΑΒ, ΑΔ ἦναι κάθετα εἰς ἄλλο τρίτον ΜΝ, ἡ κοινὴ τομή των ΑΠ θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὸ τρίτον τοῦτο ἐπίπεδον. σχ. 194.

Διότι ἐὰν ἐκ τῆς ςιγμῆς Π ὑψωθῇ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, ἡ κάθετος αὕτη πρέπει ἐνταυτῷ νὰ εὑρεθῇ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒ καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΔ (πορ. 19)· λοιπὸν εἶναι ἡ κοινὴ τομή των ΑΠ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν μία ςερεὰ γωνία ἦναι σχηματισμένη ἀπὸ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας, τὸ ἄθροισμα δύο ὁποιωνδήποτε τούτων τῶν γωνιῶν, θέλει εἶναι μεῖζον τῆς τρίτης. σχ. 195.

Ἐὰν αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι ἦναι ἴσαι μεταξύ των, φανερὸν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εἶναι μεῖζον τῆς τρίτης. Ἐὰν δὲ ἄνισοι καὶ ἑκάςη τῶν δύο μείζων τῆς τρίτης, φανερὸν ἀκόμη ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εἶναι μεῖζον τῆς τρίτης. Η μόνη λοιπὸν περίςασις καθ' ἣν ἡ ἐκφωνηθεῖσα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΓΙΑΝΝΗΣ Θ. ΚΑΡΑΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

πρότασις ἔχει χρείαν ἀποδείξεως, εἶναι ἐκείνη εἰς τὴν ὁποίαν ἡ παραβαλλομένη ἐπίπεδος γωνία μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων εἶναι μείζων ἑκάστης τούτων. Εςω λοιπὸν ἡ ςερεὰ γωνία Σ σχηματιζομένη ἀπὸ τρεῖς γωνίας ἐπιπέδους ΑΣΒ, ΑΣΓ, ΒΣΓ, καὶ ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ γωνία ΑΣΒ εἶναι μείζων τῶν ἄλλων δύο· λέγω ὅτι θέλει εἶναι ΑΣΒ < ΑΣΓ + ΒΣΓ.

Εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΣΒ ἄς γένῃ ἡ γωνία ΒΣΔ = ΒΣΓ, ἄς ἀχθῇ κατ' ἀρέσκειαν ἡ εὐθεῖα ΑΔΒ: καὶ, ληφθείσης τῆς ΣΓ = ΣΔ, ἐπιζευχθήτωσαν αἱ ΑΓ, ΒΓ.

Αἱ δύο πλευραὶ ΒΣ, ΣΔ, εἶναι ἴσαι μὲ τὰς δύο ΒΣ, ΣΓ, ἡ γωνία ΒΣΔ = ΒΣΓ· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΒΣΔ, ΒΣΓ εἶναι ἴσα· λοιπὸν ΒΔ = ΒΓ. Ἀλλ' ἔχομεν ΑΒ < ΑΓ + ΒΓ· ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τὸ ἕν μέρος τῆς ΒΔ, καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ΒΓ, μένει ΑΔ < ΑΓ. Αἱ δύο πλευραὶ ΑΣ, ΣΔ, εἶναι ἴσαι μὲ τὰς δύο ΑΣ, ΣΓ, ἡ τρίτη ΑΔ εἶναι μικροτέρα τῆς τρίτης ΑΓ· λοιπὸν (10, 1) ἡ γωνία ΑΣΔ < ΑΣΓ. Προσθέσει τῆς ΒΣΔ = ΒΣΓ, προκύπτει ΑΣΔ + ΒΣΔ ἢ ΑΣΒ < ΑΣΓ + ΒΣΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ'.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν γωνίαν ςερεὰν, εἶναι πάντοτε μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν.

Ας τμηθῇ ἡ ςερεὰ γωνία Σ ἀπὸ ὁποιονδήποτε ἐπίπεδον ΑΒΓΔΕ· εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἄς ληφθῇ σημεῖόν τι Ο, καὶ ἐξ αὐτοῦ ἄς ἀχθῶσιν εἰς ὅλας τὰς γωνίας αἱ γραμμαὶ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ σχ. 196.

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων ΑΣΒ, ΒΣΓ, κ. τ. λ. τὰ ὁποῖα σχηματίζονται ὁλόγυρα τῆς κορυφῆς Σ, ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τριγώνων ΑΟΒ, ΒΟΓ, κ. τ. λ. τὰ ὁποῖα σχημα-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ... ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ...
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

τίζονται ὁλόγυρα τῆς κορυφῆς Ο. Ἀλλ' εἰς τὴν ςιγμὴν Β αἱ γωνίαι ΑΒΟ, ΟΒΓ, ὁμοῦ ληφθεῖσαι, κάμνουν τὴν γωνίαν ΑΒΓ μικροτέραν τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν ΑΒΣ, ΣΒΓ (πρό. κτ)· ὡσαύτως εἰς τὴν ςιγμὴν Γ ἔχομεν ΒΓΟ + ΟΓΔ < ΒΓΣ + ΣΓΔ· καὶ οὕτω διὰ τὰς ἄλλας γωνίας τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ. Εντεῦθεν ἕπεται ὅτι εἰς τὰ τρίγωνα τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ εἶναι εἰς Ο, τὸ ἄθροισμα τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν εἰς τὰ τρίγωνα τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ εἶναι εἰς Σ. Τώρα τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ εἶναι εἰς Σ μοιράζεται εἰς δύο: εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι ἐπίσης εἰς Σ, καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι αἱ τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ· καλοῦντες Α τὸ πρῶτον καὶ Β τὸ δεύτερον, ἔχομεν διὰ τὸ ἄθροισμα τούτων Α + Β· παρομοίως τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ εἶναι εἰς Ο μοιράζεται εἰς δύο: εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι ἐπίσης εἰς Ο, καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι αἱ τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ· καλοῦντες τὸ πρῶτον ἄθροισμα Α′ καὶ τὸ δεύτερον Β′, ἔχομεν Α′ + Β′ διὰ τὸ ἄθροισμα ὅλων τούτων τῶν γωνιῶν· ἐπειδὴ δὲ τὰ δύο ἀθροίσματα Α + Β, καὶ Α′ + Β′ πρέπει νὰ ἦναι ἴσα· διὰ τοῦτο Α + Β = Α′ + Β′· ἀλλὰ δέδεικται ὅτι Β > Α′· λοιπὸν ἀναγκαίως Α < Β′· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν ὁλόγυρα τῆς ςιγμῆς Ο, εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν ὁλόγυρα τῆς ςιγμῆς Σ. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁλόγυρα τῆς ςιγμῆς Ο γωνιῶν ἰσοῦται μὲ τέσσαρας ὀρθὰς (5, ι)· λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν ςερεὰν γωνίαν Σ εἶναι μικρότερον ἀπὸ τέσσαρας ὀρθάς.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Σχόλιον. Η απόδειξις αὕτη προϋποθέτει ὅτι ἡ ςερεὰ γωνία εἶναι κυρτή, ἢ ὅτι τὸ ἐπίπεδον μιᾶς ἕδρας προεκβαλλόμενον δὲν ἠμπορεῖ νὰ τέμνῃ τὴν ςερεὰν γωνίαν Σ· ἄλλως, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν δὲν ἤθελεν ἔχει ὅρια, καὶ ἠμποροῦσε νὰ ἦναι ὁποιουδήποτε μεγέθους.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΘΕΤΙΚΟΣ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ′.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν δύο ςερεαὶ γωνίαι σύγκεινται ἀπὸ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας αἱ ὁποῖαι νὰ ἦναι ἴσαι ἡ κάθε μία μὲ τὴν κάθε μίαν, τὰ ἐπίπεδα εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται αἱ ἴσαι γωνίαι ἰσάκις θέλουν κλίνει τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου.

Εςω ἡ γωνία ΑΣΓ=ΔΤΖ, ἡ γωνία ΑΣΒ=ΔΤΕ, καὶ ἡ γωνία ΒΣΓ=ΕΤΖ· λέγω ὅτι τὰ δύο ἐπίπεδα ΑΣΓ, ΑΣΒ, θέλουν ἔχει μεταξύ των κλίσιν ἴσην μὲ τὴν τῶν ἐπιπέδων ΔΤΖ, ΔΤΕ. σχ. 197.

Ληφθείσης τῆς ΣΒ κατ᾽ ἀρέσκειαν, ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΟ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΣΓ· ἐκ τῆς ςιγμῆς Ο, ὅπου αὕτη ἡ κάθετος συναπαντᾷ τὸ ἐπίπεδον, ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΟΑ, ΟΓ κάθετοι, ἡ μὲν ἐπὶ τῆς ΣΑ, ἡ δὲ ἐπὶ τῆς ΣΓ· ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΒ, ΒΓ· ἂς ληφθῇ ἀκολούθως ΤΕ=ΣΒ· ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΠ κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΤΔΖ· ἐκ τῆς ςιγμῆς Π ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΠΔ, ΠΖ κάθετοι ἐπὶ τῶν ΤΔ, ΤΖ· τέλος ἂς ἑνωθῶσιν αἱ ΔΕ, ΕΖ.

Τὸ τρίγωνον ΣΑΒ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς Α, καὶ τὸ τρίγωνον ΤΔΕ εἰς Δ (πρό. 6), καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΣΒ= ΔΤΕ, ἔχομεν ὡσαύτως ΣΒΑ=ΤΕΔ. Αλλως ΣΒ=ΤΕ· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΣΑΒ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΤΔΕ (5, 1)· λοιπὸν ΣΑ=ΤΔ, καὶ ΑΒ=ΔΕ. Ομοίως θέλομεν δείξει ὅτι ΣΓ=ΤΖ, καὶ ΒΓ=ΕΖ. Τούτου τεθέντος, τὸ τετράπλευρον ΣΑΟΓ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράπλευρον ΤΔΠΖ· διότι τεθείσης τῆς γωνίας ΑΣΓ ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ

Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

αὐτὴν ΔΤΖ, ἐπειδὴ ΣΛ=ΤΔ καὶ ΣΓ=ΤΖ, ἡ ςιγμὴ Λ θέλει πέσει εἰς Δ καὶ ἡ Γ εἰς Ζ. Εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ΛΟ, κάθετος εἰς τὴν ΣΛ, θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ΔΠ καθέτου εἰς τὴν ΤΔ, καὶ παρομοίως ΟΓ ἐπὶ τῆς ΠΖ· λοιπὸν ἡ ςιγμὴ Ο θέλει πέσει ἐπὶ τῆς ςιγμῆς Π, καὶ θέλομεν ἔχει ΛΟ=ΔΠ. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΛΟΒ, ΔΠΕ εἶναι ὀρθογώνια εἰς Ο καὶ Π, ἡ ὑποτείνουσα ΛΒ=ΔΕ, καὶ ἡ πλευρὰ ΛΟ=ΔΠ· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα (18, α)· λοιπὸν ἡ γωνία ΟΛΒ=ΠΔΕ. Η γωνία ΟΛΒ εἶναι ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων ΛΣΒ, ΛΣΓ· ἡ γωνία ΠΔΕ εἶναι ἡ τῶν δύο ἐπιπέδων ΔΤΕ, ΔΤΖ· λοιπὸν αἱ δύο αὗται κλίσεις εἶναι ἴσαι ἀλλήλαις.

Πρέπει ὅμως νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ γωνία Λ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΘΛΒ δὲν εἶναι κυρίως ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων ΛΣΒ, ΛΣΓ, παρ᾽ ὅταν ἡ κάθετος ΒΘ πίπτῃ, ὡς πρὸς τὴν ΣΔ, ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος ὅπου καὶ ἡ ΣΓ. ἐὰν δὲ ἔπιπτεν ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος, τότε ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων ἤθελεν εἶναι ἀμβλεῖα, καὶ μετὰ τῆς γωνίας Λ ἤθελε κάμνει δύο ὀρθάς. Ἀλλ᾽ εἰς τὴν αὐτὴν περίςασιν ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων ΤΔΕ, ΤΔΖ ἤθελεν εἶναι παρομοίως ἀμβλεῖα, καὶ μετὰ τῆς γωνίας Δ τοῦ τριγώνου ΔΠΕ, ἤθελε κάμνει δύο ὀρθάς· λοιπὸν ἐπειδὴ ἡ γωνία Λ πάντοτε ἤθελεν εἶναι ἴση τῇ Δ, ὡσαύτως ἠθέλαμεν συμπεράνει ὅτι ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων ΛΣΒ, ΛΣΓ, εἶναι ἴση μὲ τὴν τῶν δύο ἐπιπέδων ΓΔΕ, ΤΔΖ.

Σχόλιον. Ἐὰν δύο ςερεαὶ γωνίαι σύγκεινται ἀπὸ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας ἴσας τὴν καθε μίαν μὲ τὴν καθε μίαν, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν αἱ ἴσαι ἢ ὁμόλογοι γωνίαι ἦναι διατεταγμέναι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς τὰς δύο ςερεὰς γωνίας, τότε αἱ γωνίαι αὗται θέλουν εἶναι ἴσαι, καὶ ἐὰν τεθῶσιν ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης θέλουν ἐφαρμόσει. Τῷ ὄντι εἴδομεν ὅτι τὸ τετράπλευρον ΣΛΘΓ ἠμπορεῖ νὰ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Κ. ΣΤΑΥΡΙΝΟΣ ΠΕΤΣΙΟΣ

Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

τεθῇ ἐπὶ τοῦ ἴσου μὲ αὐτὸ ΤΔΠΖ· οὕτως τεθείσης τῆς ΣΑ ἐπὶ τῆς ΤΔ, ἡ ΣΓ πίπτει ἐπὶ τῆς ΤΖ, καὶ ἡ στιγμὴ Ο ἐπὶ τῆς στιγμῆς Π. Ἀλλὰ, ἐξ αἰτίας τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΑΟΒ, ΔΠΕ, ἡ κάθετος ΟΒ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΣΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν κάθετον ΠΕ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΤΔΖ· περιπλέον αἱ κάθεται αὗται διευθύνονται κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν· λοιπὸν ἡ στιγμὴ Β θέλει πέσει ἐπὶ τῆς στιγμῆς Ε, ἡ γραμμὴ ΣΒ ἐπὶ τῆς ΤΕ, καὶ αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι κατὰ πάντα θέλουν ἐφαρμόσει ἡ μία μὲ τὴν ἄλλην.

Η ἐφάρμοσις ὅμως αὕτη δὲν ἔχει χώραν παρ' ὁσάκις ὑποτίθεται ὅτι αἱ ἐπίπεδοι ἴσαι γωνίαι εἶναι *διατεταγμέναι κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον* εἰς τὰς δύο στερεὰς γωνίας· διότι ἐὰν αἱ ἐπίπεδοι ἴσαι γωνίαι ἦσαν *διατεταγμέναι εἰς τάξιν ἀντίστροφον*, ἢ, ὅπερ ταὐτὸν, ἐὰν αἱ κάθετοι ΟΒ, ΠΕ ἀντὶ νὰ διευθύνωνται κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα ΑΣΓ, ΔΤΖ, ἐδιευθύνοντο κατ' ἐναντίας, τότε ἀδύνατον ἤθελεν εἶναι νὰ γένῃ ἡ ἐφάρμοσις τῶν δύο στερεῶν γωνιῶν. Ἀλλ' ὄχι ὀλιγώτερον ἤθελεν εἶναι ἀληθὲς, κατὰ τὸ θεώρημα, ὅτι τὰ ἐπίπεδα εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται αἱ ἴσαι γωνίαι ἤθελον κλίνει ἰσάκις τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου· εἰς τρόπον ὥστε αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι ἤθελον εἶναι ἴσαι καθ' ὅλα των τὰ συστατικὰ μέρη, χωρὶς μ' ὅλον τοῦτο νὰ ἠμποροῦν να ἐπιτεθῶσι. Τὸ εἶδος τοῦτο τῆς ἰσότητος, ἥτις δὲν εἶναι ἀπόλυτος ἢ ἐπιθέσεως πρέπει νὰ διακριθῇ μὲ μερικὴν τινὰ ὀνομασίαν: θέλομεν τὴν ὀνομάζει *ἰσότητα ἐκ συμμετρίας*.

Οὕτως αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι περὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος, αἱ ὁποῖαι εἶναι σχηματισμέναι ἀπὸ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας ἴσας τὴν κάθε μίαν μὲ τὴν κάθε μίαν, ἀλλὰ διατεταγμένας κατ' ἀντίστροφον τάξιν θέλουν ὀνομάζεσθαι *γωνίαι ἴσαι ἐκ συμμετρίας* ἢ ἁπλῶς γωνίαι συμμετρικαί.

Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π
ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Η αὐτὴ σημείωσις ἐφαρμόζεται εἰς τὰς ςερεὰς γωνίας κὶ ὁποῖαι εἶναι σχηματισμέναι ἀπὸ περισσότερας παρὰ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας: οὕτως ςερεὰ γωνία σχηματισμένη ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους γωνίας Α, Β, Γ, Δ, Ε, καὶ μία ἄλλη ςερεὰ γωνία σχηματισμένη ἀπὸ τὰς αὐτὰς γωνίας εἰς τάξιν ἀντίςροφον Α, Ε, Δ, Γ, Β, ἠμποροῦν νὰ ἦναι τοιαῦται ὥςε τὰ ἐπίπεδα εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται αἱ ἴσαι γωνίαι νὰ κλίνουν ἰσάκις τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου. Αἱ δύο αὐταὶ ςερεαὶ γωνίαι, αἵτινες ἤθελον εἶναι ἴσαι χωρὶς ἡ ἐπίθεσις νὰ ἦναι δυνατὴ, θέλουν ὀνομάζεσθαι γωνίαι ςερεαὶ ἴσαι ἐκ συμμετρίας, ἢ γωνίαι ςερεαὶ συμμετρικαί.

Εἰς τὰ ἐπίπεδα σχήματα δὲν ὑπάρχει κυρίως ἰσότης ἐκ συμμετρίας, καὶ ὅσας ἤθελε τις ὀνομάσει οὕτως ἤθελον εἶναι ἀπόλυτοι ἰσότητες ἢ ἐπιθέσεως: ὁ λόγος εἶναι ὅτι ἐπίπεδον σχῆμα ἠμπορεῖ νὰ ἀναποδογυρισθῇ, καὶ νὰ ληφθῇ ἀδιαφόρως τὸ ἄνω διὰ τὸ κάτω. Ἀλλὰ δὲν εἶναι τὸ αὐτὸ εἰς τὰ ςερεὰ ὅπου ἡ τρίτη διάςασις ἠμπορεῖ νὰ ληφθῇ κατὰ δύο διαφορετικὰς ἐννοίας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Δεδομένων τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἵτινες σχηματίζουν ςερεὰν τινὰ γωνίαν, νὰ εὕρωμεν δι' ἐπιπέδου κατασκευῆς τὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν δύο τούτων τῶν ἐπιπέδων κάμνουν μεταξύ των.

Εςω Σ ἡ προτεθεῖσα ςερεὰ γωνία, εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι γνωςαὶ αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι ΑΣΒ, ΑΣΓ, ΒΣΓ· ζητεῖται ἡ γωνία τὴν ὁποίαν κάμνουν μεταξύ των δύο τούτων τῶν ἐπιπέδων, παραδείγματος χάριν, τὰ ἐπίπεδα ΑΣΒ, ΑΣΓ. σχ. 198.

Ας φαντασθῶμεν ὅτι ἐκάμαμεν τὴν αὐτὴν κατασκευὴν ὁποῦ καὶ εἰς τὸ προλαβὸν θεώρημα, ἡ γωνία ΟΑΒ ἤθελεν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

εἶναι ἡ ζητουμένη. Πρόκειται λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὴν αὐτὴν γωνίαν δι' ἐπιπέδου κατασκευῆς ἢ ἐπάνω εἰς ἐπίπεδον ἐκτελουμένης.

Πρὸς τοῦτο ἂς γένουν ἐπὶ ἐπιπέδου τινὸς αἱ γωνίαι Β'ΣΑ, ΑΣΓ, Β''ΣΓ, ἴσαι μὲ τὰς γωνίας ΒΣΑ, ΑΣΓ, ΒΣΓ, εἰς τὸ ϛερεὸν σχῆμα· ἂς ληφθῇ ἑκάϛη τῶν Β'Σ, Β''Σ ἴση μὲ τὴν ΒΣ τοῦ ϛερεοῦ σχήματος· ἐκ τῶν ϛιγμῶν Β' καὶ Β'' ἂς καταβαθῶσιν αἱ Β'Α, Β''Γ κάθετοι ἐπὶ τῶν ΣΑ καὶ ΣΓ, αἱ ὁποῖαι θέλουν συναπαντηθῇ εἰς ϛιγμήν τινα Ο. Ἐκ τῆς ϛιγμῆς Α ὡς ἐκ κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα ΑΒ' ἂς γραφθῇ ἡ ἡμιπεριφέρεια Β'βΕ· εἰς τὴν ϛιγμὴν Ο ἂς ὑψωθῇ ἐπὶ τῆς Β'Ε ἡ κάθετος Οϐ, συναπαντῶσα τὴν περιφέρειαν εἰς ϐ, ἂς ἐπιζευχθῇ Αβ, καὶ ἡ γωνία ΕΑβ θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΣΓ, ΑΣΒ, εἰς τὴν ϛερεὰν γωνίαν.

Τὸ πᾶν συνίϛαται εἰς τὸ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΟβ τοῦ ἐπιπέδου σχήματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΟΒ τοῦ ϛερεοῦ. Τώρα τὰ δύο τρίγωνα Β'ΣΑ, ΒΣΑ εἶναι ὀρθογώνια εἰς Α, αἱ ἐν Σ γωνίαι εἶναι ἴσαι· λοιπὸν αἱ ἐν Β καὶ Β γωνίαι εἶναι παρομοίως ἴσαι. Ἀλλ' ἡ ὑποτείνουσα ΣΒ' εἶναι ἴση μὲ τὴν ὑποτείνουσαν ΣΒ· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα· λοιπὸν ΣΑ τοῦ ἐπιπέδου σχήματος εἶναι ἴση μὲ τὴν ΣΑ τοῦ ϛερεοῦ, καὶ ὁμοίως ΑΒ', ἡ ἴση μὲ αὐτὴν Αβ εἰς τὸ ἐπίπεδον σχῆμα εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒ εἰς τὸ ϛερεόν. Ὡσαύτως θέλομεν δείξει ὅτι ΣΓ εἶναι ἴση καὶ εἰς τὰ δύο μέρη· ὅθεν ἕπεται ὅτι τὸ τετράπλευρον ΣΑΟΓ εἶναι ἴσον καὶ εἰς τὰ δύο σχήματα, οὕτως ΑΟ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΟ τοῦ ϛερεοῦ· λοιπὸν καὶ εἰς τὰ δύο τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΟΒ, ΑΟβ, ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν καὶ μίαν πλευρὰν ἴσας· λοιπὸν εἶναι ἴσα, καὶ ἡ γωνία ΕΑβ, εὑρεθεῖσα διὰ τῆς ἐπιπέδου κατασκευῆς, εἶναι ἴση μὲ τὴν κλίσιν τῶν δύο ἐπιπέδων ΣΑΒ, ΣΑΓ, εἰς τὴν ϛερεὰν γωνίαν.

Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π
ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Οταν τὸ σημεῖον Ο πέσῃ μεταξὺ Α καὶ Β′ εἰς τὸ ἐπίπεδον σχῆμα, ἡ γωνία ΕΑβ ἀποβαίνει ἀμβλεῖα, καὶ μετρεῖ πάντοτε τὴν ἀληθινὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων: ἰδοὺ διατὶ ἐσημειώσαμεν διὰ ΕΑβ, καὶ ὄχι διὰ ΟΑβ τὴν ζητουμένην κλίσιν, διὰ νὰ ἀνήκῃ ἡ αὐτὴ λύσις εἰς ὅλας τὰς περιςάσεις ἄνευ ἐξαιρέσεως.

Σχόλιον. Ημπορεῖ νὰ ζητηθῇ ἐὰν μὲ τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας εἰλημμένας κατ' ἀρέσκειαν, ἦναι δυνατὸν νὰ σχηματισθῇ ςερεὰ γωνία.

Κατὰ πρῶτον τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν δεδομένων γωνιῶν πρέπει νὰ ἦναι μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν· διότι χωρὶς ταύτης τῆς συνθήκης δὲν ἠμπορεῖ νὰ σχηματισθῇ ἡ ςερεὰ γωνία (πρό. 22).

Πρέπει περιπλέον ἀφ' οὗ ληφθῶσι δύο τῶν γωνιῶν κατ' ἀρέσκειαν Β′ΣΑ, ΑΣΓ, ἡ τρίτη ΓΣΒ″ νὰ ἦναι τοιαύτη, ὥςε ἡ κάθετος Β″Γ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΣΓ νὰ συναπαντᾷ τὴν διάμετρον Β′Ε μεταξὺ τῶν ἄκρων Β′ καὶ Ε. Οὕτως τὰ ὅρια τοῦ μεγέθους τῆς γωνίας ΓΣΒ″ εἶναι ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα ὅταν φθάσῃ, ἡ κάθετος Β″Γ τελειόνει εἰς τὰς ςιγμὰς Β′ καὶ Ε. Εκ τῶν ςιγμῶν τούτων ἄς κατεβασθῶσιν ἐπὶ τῆς ΣΓ αἱ κάθετοι Β′Ι, ΕΚ′, συναπαντῶσαι εἰς Ι καὶ Κ′ τὴν γεγραμμένην περιφέρειαν μὲ τὴν ἀκτῖνα ΣΒ″, καὶ τὰ ὅρια τῆς ΓΣΒ″ θέλουν εἶναι αἱ γωνίαι ΓΣΙ, ΓΣΚ′.

Αλλ' εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον Β′ΣΙ, ἐπειδὴ ἡ γραμμὴ ΣΓ προεκβληθεῖσα συναπαντᾷ κατὰ κάθετον τὴν βάσιν Β′Ι, ἔχομεν τὴν γωνίαν ΓΣΙ = ΓΣΒ′ = ΑΣΓ + ΑΣΒ′. Καὶ εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΕΣΚ′, ἐπειδὴ ἡ ΣΓ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΕΚ′, ἔχομεν τὴν γωνίαν ΓΣΚ′ = ΓΣΕ. Αλλως ἐξ αἰτίας τῶν ἴσων τριγώνων ΑΣΕ, ΑΣΒ′, ἡ γωνία ΑΣΕ = ΑΣΒ′· λοιπὸν ΓΣΕ ἢ ΓΣΚ′ = ΑΣΓ — ΑΣΒ′.

Εντεῦθεν ἕπεται ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατὸν ὁσάκις ἡ τρίτη γωνία ΓΣΒ″ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΑΤΡΟΥ ΦΙΛΟΛΟΓΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΛΟΓΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

τῶν δύο ἄλλων ΑΣΓ, ΑΣΒ', ἀλλὰ μεγαλητέρα τῆς διαφορᾶς των: συνθήκη ἥτις συμφωνεῖ μὲ τὸ ΚΑ' θεώρημα· διότι, δυνάμει τούτου τοῦ θεωρήματος, πρέπει νὰ ἦναι ΓΣΒ'' < ΑΣΓ + ΑΣΒ'· πρέπει ὡσαύτως ΑΣΓ < ΓΣΒ'' + ΑΣΒ', ἢ ΓΣΒ'' > ΑΣΓ — ΑΣΒ'.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Δεδομένων δύο τῶν τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν μίαν στερεὰν γωνίαν, μετὰ τῆς γωνίας τὴν ὁποίαν τὰ ἐπίπεδά των κάμνουν μεταξύ των, νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη ἐπίπεδος γωνία.

Ἔστωσαν ΑΣΓ, ΑΣΒ' αἱ δύο δεδομέναι ἐπίπεδοι γωνίαι, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν πρὸς ὀλίγον ὅτι ΓΣΒ'' εἶναι ἡ τρίτη ζητουμένη γωνία· τότε γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς εἰς τὸ προλαβὸν πρόβλημα, ἡ περιεχομένη γωνία μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων τῶν δύο πρώτων ἤθελεν εἶναι ΕΑβ. Τώρα καθὼς προσδιορίζεται ἡ γωνία ΕΑβ διὰ μέσου τῆς ΓΣΒ'' δεδομένων τῶν δύο ἄλλων· οὕτω δυνατὸν εἶναι νὰ προσδιορισθῇ ἡ γωνία ΓΣΒ'' διὰ μέσου τῆς ΕΑβ, καὶ μὲ τοῦτον τὸν τρόπον θέλει λυθῇ τὸ προτεθὲν πρόβλημα.

Ληφθείσης τῆς ΣΒ' κατ' ἀρέσκειαν, ἂς κατεβασθῇ ἐπὶ τῆς ΣΑ ἡ ἀπροσδιόριστος κάθετος Β'Ε, ἂς γένῃ ἡ γωνία ΕΑβ ἴση μὲ τὴν τῶν δύο δεδομένων ἐπιπέδων· ἀπὸ τὴν στιγμὴν β ὅπου ἡ πλευρὰ Αβ συναπαντᾷ τὴν γεγραμμένην περιφέρειαν ἐκ τοῦ κέντρου Α μὲ τὴν ἀκτῖνα ΑΒ', ἂς κατεβασθῇ ἐπὶ τῆς ΑΕ ἡ κάθετος βΟ, καὶ ἀπὸ τὴν στιγμὴν Ο ἂς κατεβασθῇ ἐπὶ τῆς ΣΓ ἡ ἀπροσδιόριστος κάθετος ΟΓΒ'', ἥτις ἂς περατωθῇ εἰς Β'' ὥστε ΣΒ'' = ΣΒ'· ἡ γωνία ΓΣΒ'' θέλει εἶναι ἡ τρίτη ἐπίπεδος ζητουμένη γωνία.

Διότι ἐὰν σχηματισθῇ στερεὰ γωνία μὲ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας Β'ΣΑ, ΑΣΓ, ΓΣΒ'', ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων

Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π
ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

ὅπου εὑρίσκονται αἱ δεδομέναι γωνίαι ΛΣΒ′, ΛΣΓ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν δεδομένην γωνίαν ΕΛΘ. σχ. 198.

Σχόλιον. Ἐὰν μία ςερεὰ γωνία ἦναι τετραπλῆ, ἢ σχηματισμένη ἀπὸ τέσσαρας ἐπιπέδους γωνίας ΛΣΒ,ΒΣΓ, ΓΣΔ, ΔΣΛ, ἡ γνῶσις τῶν γωνιῶν τούτων δὲν ἀρκεῖ διὰ τὴν προσδιόρισιν τῶν ἀμοιβαίων κλίσεων τῶν ἐπιπέδων των· διότι μὲ τὰς αὐτὰς ἐπιπέδους γωνίας δυνατὸν νὰ σχηματισθῇ ἀπειρία ςερεῶν γωνιῶν. Ἀλλ' ἐὰν προςεθῇ μία συνθήκη, ἐὰν, παραδείγματος χάριν, δοθῇ ἡ κλίσις τῶν δύο ἐπιπέδων ΛΣΒ, ΒΣΓ, τότε ἡ ςερεὰ γωνία εἶναι κατὰ πάντα προσδιωρισμένη, καὶ δυνατὸν εἶναι νὰ προσδιορισθῇ ἡ κλίσις δύο ὁποιωνδήποτε τῶν ἐπιπέδων της. Τῷ ὄντι ἂς φαντασθῶμεν ςερεὰν τριπλῆν γωνίαν σχηματισμένην ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους γωνίας ΛΣΒ, ΒΣΓ, ΛΣΓ· αἱ δύο πρῶται γωνίαι εἶναι δεδομέναι, καθὼς καὶ ἡ κλίσις τῶν ἐπιπέδων των· δυνατὸν λοιπὸν νὰ προσδιορισθῇ, διὰ τοῦ λυθέντος προβλήματος, ἡ τρίτη γωνία ΛΣΓ. Ἀκολούθως, ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν τριπλῆν ςερεὰν γωνίαν σχηματισμένην ἀπὸ τὰς ἐπιπέδους γωνίας ΛΣΓ,ΛΣΔ,ΔΣΓ, βλέπομεν ὅτι αἱ τρεῖς αὗται γωνίαι εἶναι γνωςαί· οὕτως ἡ ςερεὰ γωνία εἶναι κατὰ πάντα προσδιωρισμένη. Ἀλλ' ἡ ςερεὰ τετραπλῆ γωνία σχηματίζεται ἀπὸ τὴν ἕνωσιν τῶν εἰρημένων δύο ςερεῶν τριπλῶν γωνιῶν· λοιπὸν ἐπειδὴ αἱ μερικαὶ αὗται γωνίαι εἶναι γνωςαὶ καὶ προσδιωρισμέναι, ἡ ὅλη γωνία εἶναι παρομοίως γνωςὴ καὶ προσδιωρισμένη.

Η γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων ΛΣΔ, ΔΣΓ, εὑρίσκεται ἀμέσως διὰ τῆς δευτέρας μερικῆς ςερεᾶς γωνίας. Οσον διὰ τὴν γωνίαν τῶν δύο ἐπιπέδων ΒΣΓ, ΓΣΔ, πρέπει εἰς μίαν ςερεὰν μερικὴν γωνίαν νὰ ζητηθῇ ἡ περιεχομένη μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων ΛΣΓ, ΔΣΓ, καὶ εἰς ἄλλην ἡ περιεχομένη μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων ΛΣΓ, ΒΣΓ· τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων γωνιῶν θέλει εἶναι ἡ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

περιεχομένη μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων ΒΣΓ, ΔΣΓ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἠθέλαμεν εὕρῃ ὅτι διὰ τὴν προσδιόρισιν ςερεᾶς πενταπλῆς γωνίας, πρέπει νὰ ἦναι γνωςαὶ ἐκ τὸς τῶν πέντε ἐπιπέδων γωνιῶν αἵτινες τὴν συνθέτουν δύο ἀμοιβαῖαι κλίσεις τῶν ἐπιπέδων των· ἤθελον χρειασθῆ τρεῖς εἰς τὴν ἑξαπλῆν ςερεὰν γωνίαν καὶ οὕτως ἐφεξῆς. σχ. 199.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ ϛ.

ΤΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Καλεῖται ςερεὸν πολύεδρον, ἢ ἁπλῶς πολύεδρον, κάθε ςερεὸν περατούμενον ἀπὸ ἐπίπεδα ἢ ἕδρας ἐπιπέδους. (Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα ἀναγκαίως περατοῦνται ἀπὸ εὐθείας γραμμάς). Εν μέρει καλεῖται τετράεδρον τὸ ἔχον τέσσαρας ἕδρας ςερεόν· ἑξάεδρον τὸ ἕξ· ὀκτάεδρον τὸ ὀκτώ· δωδεκάεδρον τὸ δώδεκα· εἰκοσάεδρον τὸ εἴκοσι κ. τ. λ.

Τὸ τετράεδρον εἶναι τὸ ἁπλούςερον τῶν πολυέδρων· διότι τοὐλάχιςον χρειάζονται τρία ἐπίπεδα διὰ τὸν σχηματισμὸν ςερεᾶς γωνίας, καὶ τὰ τρία ταῦτα ἐπίπεδα ἀφίνουσι κενόν τι, τὸ ὁποῖον διὰ νὰ κλεισθῇ, ἀπαιτεῖ τοὐλάχιςον τέταρτον ἐπίπεδον.

Β'. Η κοινὴ τομὴ δύο προσκειμένων ἑδρῶν πολυέδρου τινὸς καλεῖται πλευρὰ ἢ κόψις (1) τοῦ πολυέδρου.

(1) Κόψιν ὠνόμασα τὴν ὁποίαν ὁ συγγραφεὺς λέγει (arête)· διότι ἡ λέξις αὕτη μὲ ἐφάνη καταληπτὴ καὶ συνήθης εἰς τὴν γλῶσσάν μας.

Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006