ΟΕ::ΓΙ:ΟΕ. Ας ἀχθῇ εἰς τὴν ςιγμὴν Ε ἡ ἐφαπτομένη ΕΗ ἥτις συναπαντᾷ τὴν προεκβολὴν τῆς ΟΔ εἰς Η. Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΓΙ, ΗΟΕ, δίδουν τὴν ἀναλογίαν, ΓΙ: ΟΕ:: ΑΙ ἢ ΔΕ: ΗΕ· λοιπὸν Π:Κ::ΔΕ:ΗΕ: ἢ ὡς ΔΕ × ½ΟΕ μέτρον τοῦ τομέως ΔΟΕ πρὸς ΗΕ × ½ΟΕ μέτρον τοῦ τριγώνου ΗΟΕ· ἀλλ' ὁ τομεὺς εἶναι μικρότερος τοῦ τριγώνου· λοιπὸν Π εἶναι μικρότερον τοῦ Κ, ἄρα ὁ κύκλος εἶναι μεγαλήτερος ἀπὸ κάθε πολύγωνον ἰσοπερίμετρον. σχ. 180.

ΒΙΒΛΙΟΝ Ε'.

ΤΑ ΕΠΗΠΕΔΑ ΚΑΙ ΑΙ ΣΤΕΡΕΑΙ ΓΩΝΙΑΙ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι κάθετος ἐν ἐπιπέδῳ ὅταν ἦναι κάθετος εἰς ὅλας τὰς εὐθείας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ ποδός της εἰς τὸ ἐπίπεδον (πρό. 4). Αντιςρόφως τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον εἰς τὴν γραμμήν.

Ο ποῦς τῆς καθέτου εἶναι ἡ ςιγμὴ τῆς συναπαντήσεώς της μὲ τὸ ἐπίπεδον.

Β'. Εὐθεῖα εἶναι παράλληλος ἐπιπέδου ὅταν δὲν ἠμπορῇ νὰ τὸ συναπαντήσῃ ὅσον καὶ ἂν προεκβληθῇ. Αντιςρόφως τὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλον τῆς γραμμῆς.

Γ'. Δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα μεταξύ των, ὅταν δὲν ἠμποροῦν νὰ συναπαντηθῶσιν ὅσον καὶ ἂν προεκβληθῶσι.

Δ'. Θέλει ἀποδειχθῇ (πρό. 3) ὅτι ἡ κοινὴ τομὴ δύο ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα συναπαντῶνται εἶναι εὐθεῖα γραμμή: τούτου τεθέντος, ἡ γωνία ἢ ἀμοιβαία κλίσις δύο ἐπιπέδω· εἶναι ἡ ποσότης μᾶλλον ἢ ἧττον μεγάλη κατὰ τὴν ὁποίαν ἀπέχουσιν ἀπ' ἀλλήλων· ἡ ποσότης αὕτη μετρεῖται ἀπὸ τὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν κάμνουν μεταξύ των δύο κάθετοι ἠγμέναι εἰς ἕκαςον τούτων τῶν ἐπιπέδων εἰς τὴν αὐτὴν ςιγμὴν τῆς κοινῆς τομῆς· (βλέ. πρό. 7).

Η γωνία αὕτη ἠμπορεῖ νὰ ἦναι ὀξεῖα, ὀρθὴ, ἢ ἀμβλεῖα.

Ε'. Εὰν ἦναι ὀρθὴ, τὰ δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα τὸ ἓν εἰς τὸ ἄλλο.

Ϛ'. Γωνία ςερεὰ εἶναι τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα πολλῶν γωνιῶν αἱ ὁποῖαι ἑνοῦνται εἰς τὴν αὐτὴν ςιγμήν.

Οὕτως ἡ ςερεὰ γωνία Σ σχηματίζεται ἀπὸ τὴν ἕνωσιν τῶν ἐπιπέδων ΑΣΒ, ΒΣΓ, ΓΣΒ, ΔΣΑ. σχ. 199.

Τοὐλάχιςον χρειάζονται τρία ἐπίπεδα διὰ τὸν σχηματισμὸν ςερεᾶς γωνίας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΠΡΩΤΗ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι εἰς τὸ ἐπίπεδον, καὶ μέρος ἐκτὸς αὐτοῦ.

Διότι, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐπιπέδου, ἅμα εὐθεῖα γραμμὴ ἔχει δύο κοινὰ σημεῖα μὲ ἐπίπεδόν τι, εὑρίσκεται ὅλη εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον.

Σχόλιον. Διὰ νὰ γνωρίσωμεν ἐὰν ἐπιφάνειά τις ἦναι ἐπίπεδος, πρέπει νὰ ἐφαρμόσωμεν εὐθεῖαν γραμμὴν εἰς διάφορα μέρη αὐτῆς καὶ νὰ ἴδωμεν ἐὰν ἅπτεται τῆς ἐπιφανείας καθ' ὅλην της τὴν ἔκτασιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο εὐθεῖαι αἵτινες τέμνονται εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ προσδιορίζουν τὴν θέσιν του.

Εςωσαν ΑΒ, ΑΓ, δύο εὐθεῖαι αἵτινες τέμνονται εἰς Α: ἠμποροῦμεν νὰ φαντασθῶμεν ἐπίπεδον εἰς τὸ ὁποῖον νὰ εὑρίσκεται ἡ εὐθεῖα ΑΒ· ἐὰν ἀκολούθως ςρέψωμεν τοῦτο τὸ ἐπίπεδον ὁλόγυρα τῆς ΑΒ, ἕως οὗ νὰ διέλθῃ διὰ τῆς ςιγμῆς Γ, τότε ἡ γραμμὴ ΑΓ, ἔχουσα δύο τῶν σημείων της Α καὶ Γ εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον, θέλει εὑρίσκεται ὅλη εἰς αὐτό· λοιπὸν ἡ θέσις τούτου τοῦ ἐπιπέδου προσδιορίζεται ἀπὸ μόνην τὴν συνθήκην τὸ νὰ περιέχῃ τὰς δύο εὐθείας ΑΒ, ΑΓ. σχ. 181

Πόρισμα Α'. Τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἢ τρία σημεῖα Α, Β, Γ, μὴ ἐπ' εὐθείας προσδιορίζουν τὴν θέσιν ἐπιπέδου.

Πόρισμα Β'. Λοιπὸν ὡσαύτως δύο παράλληλοι ΑΒ, ΓΔ προσδιορίζουν τὴν θέσιν ἐπιπέδου· διότι ἐὰν ἀχθῇ ἡ διατέμνουσα ΕΖ, τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο εὐθειῶν ΑΕ, ΕΖ θέλει εἶναι τὸ τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Η κοινὴ τομὴ δύο ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα τέμνονται, εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Διότι ἐὰν μεταξὺ τῶν κοινῶν σημείων εἰς τὰ δύο ἐπίπεδα ἦτον δυνατὸν νὰ εὑρεθῶσι τρία μὴ ἐπ' εὐθείας, τὰ δύο ἐπίπεδα διερχόμενα διὰ τῶν τριῶν τούτων σημείων δὲν ἤθελον σχηματίζει παρὰ ἓν μόνον καὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (πρό. 2), τὸ ὁποῖον ἐναντιοῦται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ ΑΠ ἦναι κάθετος εἰς δύο ἄλλας ΠΒ, ΠΓ, αἵτινες διαςαυροῦνται εἰς τὸν πόδα της ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ, θέλει εἶναι κάθετος εἰς ὁποιανδήποτε εὐθεῖαν ΠΚ ἠγμένην ἐκ τοῦ ποδός της εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ οὕτω θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ. σχ. 183.

Ας ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΠΚ σημεῖόν τι κατ' ἀρέσκειαν Κ, ἄς ἀχθῇ ἡ ΒΓ ἐντὸς τῆς γωνίας ΒΠΓ, εἰς τρόπον ὥςε ΒΚ=ΚΓ (προβ. 5. βιβλ. 3)· ἄς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΒ, ΑΚ, ΑΓ.

Επειδὴ ἡ βάσις ΒΓ διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὴν ςιγμὴν Κ, τὸ τρίγωνον ΒΠΓ δίδει (14, 3),

$$\overline{\Pi\Gamma}^2+\overline{\Pi B}^2=2\overline{\Pi K}^2+2\overline{K\Gamma}^2.$$

Τὸ τρίγωνον ΒΑΓ δίδει παρομοίως,

$$\overline{A\Gamma}^2+\overline{AB}^2=2\overline{AK}^2+2\overline{K\Gamma}^2.$$

Εὰν ἀπὸ τὴν δευτέραν ἰσότητα ἀφαιρέσωμεν τὴν πρώτην, καὶ παρατηρήσωμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΠΓ, ΑΠΒ, καὶ τὰ δύο ὀρθογώνια εἰς Π, δίδουν $\overline{A\Gamma}^2-\overline{\Pi\Gamma}^2=\overline{A\Pi}^2$, καὶ $\overline{AB}^2-\overline{\Pi B}^2=\overline{A\Pi}^2$· θέλομεν ἔχει,

$$\overline{A\Pi}^2+\overline{A\Pi}^2=2\overline{AK}^2-2\overline{\Pi K}^2.$$

Λοιπὸν, διαιροῦντες καὶ τὰ δύο μέλη διὰ 2, συνάγομεν $\overline{A\Pi}^2=\overline{AK}^2-\overline{\Pi K}^2$, ἤ $\overline{AK}^2=\overline{A\Pi}^2+\overline{\Pi K}^2$. Τώρα ἐπειδὴ εἰς μόνον τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο πλευρῶν ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς τρίτης· διὰ τοῦτο τὸ τρίγωνον ΑΠΚ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς Π· λοιπὸν ΑΠ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΠΚ.

Σχόλιον. Εντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι ὄχι μόνον εἶναι δυνατὸν εὐθεῖα γραμμὴ νὰ ἦναι κάθετος εἰς ὅλας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ ποδός της ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, ἀλλ' ὅτι τοῦτο συμβαίνει ὁσάκις αὐτὴ ἡ γραμμὴ εἶναι κάθετος εἰς δύο εὐθείας ἠγμένας εἰς τὸ ἐπίπεδον, καὶ τοῦτο βεβαιόνει τὸν Α' ὁρισμόν.

Πόρισμα Α'. Η κάθετος ΑΠ εἶναι σιμοτινωτέρα ἀπὸ ὁποιανδήποτε πλαγίαν ΑΚ· λοιπὸν μετρεῖ τὴν ἀληθινὴν ἀπόςασιν τοῦ σημείου Α ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον ΠΚ.

Πόρισμα Β'. Από δεδομένον σημεῖον Π ἐπὶ ἐπιπέδου, μία μόνη κάθετος εἶναι δυνατὸν νὰ ὑψωθῇ εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον· διότι, εἰ δυνατὸν, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἠμπορεῖ νὰ ὑψωθοῦν δύο· ἂς φαντασθῶμεν ὅτι διὰ τῶν δύο τούτων καθέτων διέρχεται ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ΜΝ κατὰ τὴν ΠΚ· τότε αἱ δύο κάθετοι περὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος ἤθελον εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς γραμμῆς ΠΚ εἰς τὴν αὐτὴν στιγμὴν καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ὅπερ ἀδύνατον.

Αδύνατον εἶναι παρομοίως ἀπὸ δεδομένον σημεῖον ἐκτὸς ἐπιπέδου νὰ κατεβασθῶσι δύο κάθετοι εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον· διότι ἔςωσαν ΑΠ, ΑΚ, αἱ δύο αὗται κάθετοι· τότε τὸ τρίγωνον ΑΠΚ ἤθελεν ἔχει δύο ὀρθὰς γωνίας ΑΠΚ, ΑΚΠ, ὅπερ ἀδύνατον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Αἱ πλάγιαι αἱ ἰσάκις ἀπέχουσαι τῆς καθέτου εἶναι ἴσαι· καὶ ἐκ δύο πλαγίων αἵτινες ἀνισάκις ἀπέχουσι τῆς καθέτου, ἡ περισσότερον ἀπέχουσα εἶναι ἡ πλέον μακρυνὴ ἢ μεγαλητέρα.

Διότι ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΠΒ, ΑΠΓ, ΑΠΔ εἶναι ὀρθαὶ, ἐὰν τὰ διαςήματα ΠΒ, ΠΓ, ΠΔ ὑποτεθῶσιν ἴσα πρὸς ἄλληλα, τὰ τρίγωνα ΑΠΒ, ΑΠΓ, ΑΠΔ, θέλουν ἔχει μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων· λοιπὸν θέλουν εἶναι ἴσα· ἄρα αἱ ὑποτείνουσαι ἢ αἱ πλάγιαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, θέλουν εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Παρομοίως, ἐὰν τὸ διάςημα ΠΕ, ἦναι μεγαλήτερον τοῦ ΠΔ ἢ τοῦ ἴσου μὲ αὐτὸ ΠΒ, φανερὸν ὅτι ἡ πλαγία ΑΕ θέλει εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΑΒ, ἢ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ΑΔ. σχ. 184.

Πόρισμα. Ολαι αἱ ἴσαι πλάγιαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, κτλ τελειόνουν εἰς τὴν περιφέρειαν ΒΓΔ, γεγραμμένην ἐκ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου Π ὡς ἐκ κέντρου· λοιπὸν δεδομένου σημείου Α ἐκτὸς ἐπιπέδου, ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον Π ὅπου ἤθελε πέσει ἡ κατεβαζομένη κάθετος ἀπὸ τὸ Α, πρέπει νὰ σημειώσωμεν ἐπὶ τούτου τοῦ ἐπιπέδου τρία σημεῖα Β, Γ, Δ, τὰ ὁποῖα ἰσάκις νὰ ἀπέχουν ἀπὸ τὴν ςιγμὴν Α, καὶ νὰ ζητήσωμεν ἀκολούθως τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ διερχομένου διὰ τούτων τῶν σημείων· τὸ κέντρον τοῦτο θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη ςιγμὴ Π.

Σχόλιον. Η γωνία ΑΒΠ καλεῖται *κλίσις τῆς πλαγίας* ΑΒ *ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου* ΜΝ· βλέπομεν ὅτι ἡ κλίσις αὐτὴ εἶναι ἴση δι' ὅλας τὰς πλαγίας ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, κ.τ.λ. αἱ ὁποῖαι ἰσάκις ἀπομακρύνονται τῆς καθέτου· διότι ὅλα τὰ τρίγωνα ΑΒΠ, ΑΓΠ, ΑΔΠ, κ.τ.λ. εἶναι ἴσα ἀλλήλοις.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εςω ΑΠ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ καὶ ΒΓ εὐθεῖα κειμένη εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον· ἐὰν ἀπὸ τὸν πόδα Π τῆς καθέτου κατεβασθῇ ἡ κάθετος ΠΔ ἐπὶ τῆς ΒΓ, καὶ ἐπιζευχθῇ ΑΔ, λέγω ὅτι ΑΔ θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΒΓ. σχ. 185.

Ας ληφθῇ ΔΒ = ΔΓ, καὶ ἄς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΠΒ, ΠΓ, ΑΒ, ΑΓ: ἐπειδὴ ΔΒ = ΔΓ, ἡ πλαγία ΠΒ = ΠΓ· καὶ ὡς πρὸς τὴν κάθετον ΑΠ, ἐπειδὴ ΠΒ = ΠΓ, ἡ πλαγία ΑΒ = ΑΓ (πρ. 5)· λοιπὸν δύο σημεῖα τῆς γραμμῆς ΑΔ ἰσάκις ἀπέχουσι τῶν ἄκρων Β καὶ Γ· λοιπὸν ΑΔ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓ.

Πόρισμα. Βλέπομεν ἐνταυτῷ ὅτι ΒΓ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΔΠ, ὡς κάθετος εἰς τὰς δύο εὐθείας ΑΔ, ΠΔ.

Σχόλιον. Αἱ δύο γραμμαὶ ΑΕ, ΒΓ παῤῥησιάζουν τὸ παράδειγμα δύο γραμμῶν αἱ ὁποῖαι δὲν συναπαντῶνται, ὡς μὴ κείμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Τὸ σιμοτινώτερον διάςημα τούτων τῶν γραμμῶν εἶναι ἡ εὐθεῖα ΠΔ, κάθετος ἐνταυτῷ εἰς τὴν ΑΠ καὶ τὴν ΒΓ. Τὸ διάςημα ΠΔ εἶναι τὸ σιμοτινώτερον μεταξὺ τῶν δύο τούτων γραμμῶν· διότι ἐὰν ἑνώσωμεν δύο ἄλλα σημεῖα, ὡς Α καὶ Β, θέλομεν ἔχει ΑΒ > ΑΔ, ΑΔ > ΠΔ· λοιπὸν πολὺ περισσότερον, ΑΒ > ΠΔ.

Αἱ δύο γραμμαὶ ΑΕ, ΓΒ, ἂν καὶ δὲν κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, θεωροῦνται ὅμως ὅτι κάμνουν μεταξύ των γωνίαν ὀρθὴν· διότι ΑΕ καὶ ἡ ἠγμένη παράλληλος ἐξ ἑνὸς τῶν σημείων της τῇ ΒΓ, ἤθελον κάμει μεταξύ των γωνίαν ὀρθήν. Ὡσαύτως αἱ γραμμαὶ ΑΒ καὶ ΠΔ, αἵτινες παριστάνουν δύο ὁποιασδήποτε εὐθείας μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κειμένας, θεωροῦνται ὡς ποιοῦσαι μεταξύ των τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν ἤθελε κάμει μὲ τὴν ΑΒ ἡ παράλληλος τῇ ΠΔ ἠγμένη ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς ΑΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν ἡ γραμμὴ ΑΠ ἦναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, κάθε γραμμὴ ΔΕ παράλληλος τῇ ΑΠ θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. σχ. 186.

Διὰ τῶν παραλλήλων ΑΠ, ΔΕ, ἂς διέλθῃ ἐπίπεδον, τοῦ ὁποίου ἡ κοινὴ τομὴ μὲ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ θέλει εἶναι ΠΔ· εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ ἂς ἀχθῇ ΒΓ κάθετος εἰς τὴν ΠΔ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ΑΔ.

Κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ προλαβόντος θεωρήματος, ΒΓ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΠΔΕ· λοιπὸν ἡ γωνία ΒΔΕ εἶναι ὀρθή: ἀλλ' ἡ γωνία ΔΕΠ εἶναι ὡσαύτως ὀρθή, διότι ΑΠ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΠΔ, καὶ ΔΕ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΠ· λοιπὸν ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος εἰς τὰς δύο εὐθείας ΔΠ, ΔΒ· ἄρα εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδόν των ΜΝ.

Πόρισμα Α'. Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΑΠ, ΔΕ ἦναι κάθετοι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΜΝ, θέλουν εἶναι παράλληλοι· διότι ἄλλως, ἠμπορούσαμεν νὰ ἄξωμεν διὰ τοῦ σημείου Δ παράλληλον τῇ ΑΠ, ἥτις ἤθελεν εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ· ἤθελεν εἶναι ἄρα δυνατὸν ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Δ, νὰ ὑψωθῶσι δύο κάθετοι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ὅπερ ἀδύνατον (πρό. 4).

Πόρισμα Β'. Δύο εὐθεῖαι Α καὶ Β, παράλληλοι μιᾶς τρίτης Γ εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι· διότι ἄς φαντασθῶμεν ἐπίπεδον κάθετον εἰς τὴν γραμμὴν Γ· αἱ γραμμαὶ Α καὶ Β, παράλληλοι ταύτης τῆς καθέτου, θέλουν εἶναι κάθετοι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· λοιπὸν, κατὰ τὸ προλαβὸν πόρισμα, θέλουν εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι.

Εννοεῖται ὅτι αἱ τρεῖς γραμμαὶ δὲν εἶναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἄλλως ἡ πρότασις ἤθελεν εἶναι γνωστὴ (25, 1).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εὰν ἡ γραμμὴ ΑΒ ἦναι παράλληλος εὐθείας τινὸς ΓΔ ἠγμένης εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, θέλει εἶναι παράλληλος τούτου τοῦ ἐπιπέδου. σχ. 187.

Διότι ἐὰν ἡ γραμμὴ ΑΒ, ἥτις εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ ἦτον δυνατὸν νὰ συναπαντήσῃ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, ἡ συναπάντησις αὕτη θὰ ἐγίνετο εἰς κἀνὲν σημεῖον τῆς ΓΔ, κοινῆς τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων: Τώρα, ΑΒ δὲν ἠμπορεῖ νὰ συναπαντήσῃ ΓΔ, ὡς παράλληλος αὐτῆς· λοιπὸν οὐδὲ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ θέλει συναπαντήσει· ἄρα εἶναι παράλληλος αὐτοῦ (ὁρ. 2).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο ἐπίπεδα ΜΝ, ΠΚ, κάθετα εἰς εὐθεῖαν τινὰ ΑΒ, εἶναι παράλληλα μεταξύ των. σχ. 188.

Διότι ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι συναπαντῶνται· ἔςω Ο ἓν τῶν κοινῶν σημείων τῶν· ἄς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΟΑ, ΟΒ· ἡ γραμμὴ ΑΒ, κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, εἶναι κάθετος εἰς τὴν εὐθεῖαν ΟΛ ἠγμένην ἀπὸ τὸν πόδα της εἰς τοῦτο τὸ ἐπίπεδον· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΑΒ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΒΟ· λοιπὸν ΟΛ, ΟΒ ἤθελον εἶναι δύο κάθετοι καταβασμέναι ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ὅπερ ἀδύνατον· λοιπὸν τὰ ἐπίπεδα ΜΝ, ΠΚ δὲν ἠμποροῦν νὰ συναπαντηθοῦν· λοιπὸν εἶναι παράλληλα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Αἱ κοιναὶ τομαὶ ΕΖ, ΗΘ, δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ΜΝ, ΠΚ, ὑφ' ἑνὸς τρίτου ΖΗ, εἶναι παράλληλοι. σχ. 189.

Διότι ἐὰν αἱ γραμμαὶ ΕΖ, ΗΘ, εὑρισκόμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, δὲν εἶναι παράλληλοι, προεκβληθεῖσαι θέλουν συναπαντηθῇ· λοιπὸν τὰ ἐπίπεδα ΜΝ, ΠΚ, εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται, ὁμοίως ἤθελον συναπαντηθῇ· λοιπὸν δὲν ἤθελον εἶναι παράλληλα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Η γραμμὴ ΑΒ, κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΠΚ παράλληλον τοῦ ΜΝ. σχ. 188.

Αχθείσης κατ' ἀρέσκειαν τῆς ΒΓ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΠΚ, διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἂς διέλθῃ ἐπίπεδον τὸ ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ΜΝ κατὰ τὴν ΑΔ, ἥτις θέλει εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ (πρ. 10)· ἀλλ' ἡ ΑΒ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ εἶναι κάθετος εἰς τὴν εὐθεῖαν ΑΔ· λοιπὸν θέλει εἶναι κάθετος καὶ εἰς τὴν παράλληλον αὐτῆς ΒΓ· καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος εἰς κάθε γραμμὴν ΒΓ ἠγμένην ἀπὸ τὸν πόδα της εἰς τὸ ἐπίπεδον ΠΚ, ἕπεται ὅτι εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΠΚ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Αἱ παράλληλοι ΕΗ, ΖΘ, περιεχόμεναι μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ΜΝ, ΠΚ εἶναι ἴσαι. σχ. 189.

Διὰ τῶν παραλλήλων ΕΗ, ΖΘ, ἂς διέλθη τὸ ἐπίπεδον ΕΗΘΖ, τὸ ὁποῖον θὰ συναπαντήσει τὰ παράλληλα ἐπίπεδα κατὰ τὰς ΕΖ, ΗΘ. Αἱ κοιναὶ τομαὶ ΕΖ, ΗΘ, εἶναι παράλληλοι μεταξύ των (πρό. 10), καθὼς καὶ αἱ ΕΗ, ΖΘ· ἄρα τὸ σχῆμα ΕΗΘΖ εἶναι παραλληλόγραμμον· ἄρα ΕΗ = ΕΘ.

Πόρισμα. Εντεῦθεν ἕπεται ὅτι δύο παράλληλα ἐπίπεδα ἰσάκις ἀπέχουσι καθ' ὅλην των τὴν ἔκτασιν· διότι ἐὰν ΕΗ καὶ ΖΘ ἦναι κάθετοι εἰς τὰ δύο ἐπίπεδα ΜΝ, ΠΚ, θέλουν εἶναι παράλληλοι μεταξύ των (πρ. 7)· λοιπὸν εἶναι ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εὰν δύο γωνίαι ΓΑΕ, ΔΒΖ μὴ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον κείμεναι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους, καὶ διευθυναμένας κατὰ τὴν αὐτὴν ἔννοιαν, αἱ γωνίαι αὗται θέλουν εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἐπίπεδά των παράλληλα. σχ. 190.

Ας ληφθῇ ΑΓ = ΒΔ, ΑΕ = ΒΖ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΓΕ, ΔΖ, ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ. Επειδὴ ΑΓ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΒΔ, τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον (11, 3)· λοιπὸν ΓΔ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΑΒ· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΕΖ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΑΒ· λοιπὸν ὡσαύτως ΓΔ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΕΖ· τὸ σχῆμα ἄρα ΓΕΖΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, καὶ οὕτως ἡ πλευρὰ ΓΕ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΔΖ· ἄρα τὰ τρίγωνα ΓΑΕ, ΔΒΖ, εἶναι ἰσόπλευρα μεταξύ των· ἄρα ἡ γωνία ΓΑΕ = ΔΒΖ.

Λέγω δεύτερον ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΑΓΕ εἶναι παράλληλον τοῦ ἐπιπέδου ΒΔΖ· διότι, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ παράλληλον ἐπίπεδον τοῦ ΒΔΖ, ἠγμένον ἐκ τῆς ςιγμῆς Α συναπαντᾷ τὰς γραμμὰς ΓΔ, ΕΖ, εἰς διαφορετικὰ σημεῖα ἀπὸ τὰ Γ καὶ Ε, φερ' εἰπεῖν, εἰς Η καὶ Θ. Τότε, κατὰ τὴν ΙΒ' πρότασιν, αἱ τρεῖς γραμμαὶ ΑΒ, ΗΔ, ΖΘ ἤθελον εἶναι ἴσαι· ἀλλ' αἱ τρεῖς γραμμαὶ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ εἶναι ἴσαι· λοιπὸν ἠθέλαμεν ἔχει ΓΔ=ΗΔ, καὶ ΖΘ=ΕΖ, ὅπερ ἄτοπον· λοιπὸν τὸ ἐπίπεδον ΑΓΕ εἶναι παράλληλον τοῦ ΒΔΖ.

Πόρισμα. Ἐὰν δύο παράλληλα ἐπίπεδα ΜΝ, ΠΚ, συναπαντῶνται ἀπὸ δύο ἄλλα ΓΑΒΔ, ΕΑΒΖ, αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι ΓΑΕ, ΔΒΖ ἀπὸ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, θέλουν εἶναι ἴσαι· διότι ἡ κοινὴ τομὴ ΑΓ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΔ (πρό. ιο), ἡ ΑΕ τῇ ΒΖ· λοιπὸν ἡ γωνία ΓΑΕ=ΔΒΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, μὴ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον κείμεναι, ἦναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΓΕ, ΒΔΖ ἀπὸ τὴν ἕνωσιν τῶν ἄκρων τούτων τῶν εὐθειῶν, θέλουν εἶναι ἴσα καὶ τὰ ἐπίπεδά των παράλληλα. σχ. 190.

Διότι, οὔσης τῆς ΑΒ ἴσης καὶ παραλλήλου τῇ ΓΔ, τὸ σχῆμα ΑΒΔΓ εἶναι παραλλόγραμμον· λοιπὸν ἡ πλευρὰ ΑΓ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΒΔ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον αἱ πλευραὶ ΑΕ, ΒΖ, εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, καθὼς καὶ αἱ ΓΕ, ΔΖ· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΕ, ΒΔΖ, εἶναι ἴσα! ἄλλως ἠθέλαμεν ἀποδείξει, ὡς καὶ εἰς τὴν προλαβοῦσαν πρότασιν, ὅτι τὰ ἐπίπεδά των εἶναι παράλληλα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο εὐθεῖαι περιεχόμεναι μεταξὺ τριῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ γραμμὴ ΑΒ συναπαντᾷ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα ΜΝ, ΠΚ, ΡΣ, εἰς Α, Ε, Β, καὶ ὅτι ἡ ΓΔ συναπαντᾷ τὰ αὐτὰ ἐπίπεδα εἰς Γ, Ζ, Δ· λέγω ὅτι θέλει εἶναι ὡς ΑΕ : ΕΒ :: ΓΖ : ΖΔ. σχ. 191.

Ας ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΔ συναπαντῶσα τὸ ἐπίπεδον ΠΚ εἰς Η. καὶ ἂς ἐνωθῶσιν αἱ ΑΓ, ΕΗ, ΗΖ, ΒΔ· αἱ κοιναὶ τομαὶ ΕΗ, ΒΔ, τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΠΚ, ΡΣ, ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΔ, εἶναι παράλληλοι (πρό. 10)· λοιπὸν ΑΕ: ΕΒ : : ΑΗ : ΗΔ· παρομοίως ἐπειδὴ αἱ κοιναὶ τομαὶ ΑΓ, ΗΖ, εἶναι παράλληλοι, ἔχομεν ΑΗ : ΗΔ : : ΓΖ : ΖΔ· λοιπὸν, ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ λόγου, ΑΗ : ΗΔ, θέλομεν ἔχει ΑΕ : ΕΒ : : ΓΖ : ΖΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙϚ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εϛω ΑΒΓΔ ὁποιονδήποτε τετράπλευρον κείμενον ἢ μὴ εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (1)· ἐὰν τμηθῶσιν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ἀναλόγως ὑπὸ δύο εὐθειῶν ΕΖ, ΗΘ, εἰς τρόπον ὥϛε ΑΕ : ΕΒ : : ΔΖ : ΖΓ, καὶ ΒΗ : ΗΓ : : ΑΘ : ΘΔ· λέγω ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΕΖ, ΗΘ θέλουν τέμνεσθαι εἰς τὴν αὐτὴν ϛιγμὴν Μ, εἰς τρόπον ὥϛε θέλομεν ἔχει ΘΜ : ΜΗ : : ΑΕ : ΕΒ, καὶ ΕΜ : ΜΖ : : ΑΘ : ΘΔ. σχ. 192.

Διὰ τῆς ΑΔ ἂς διέλθῃ ἐπίπεδον ὁποιονδήποτε ΑϐΘγΔ τὸ ὁποῖον ὅμως νὰ μὴ διέρχεται διὰ τῆς ΗΘ· ἐκ τῶν ϛιγμῶν Ε, Β, Γ, Ζ ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΗΘ αἱ Εε, Βϐ, Γγ, Ζζ, αἵτινες συναπαντοῦν τοῦτο τὸ ἐπίπεδον εἰς ε, ϐ, γ, ζ. Ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων Ββ, ΗΘ, Γγ (15, 3), θέλομεν ἔχει βΘ : Θγ : : ΒΗ : ΗΓ : : ΑΘ : ΘΔ·

(1) Διὰ τριῶν σημείων πάντοτε εἶναι δυνατὸν νὰ διέλθῃ ἐπίπεδον· ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο προεκβαλλόμενον περάσῃ καὶ ἀπὸ τέταρτον, τότε τὰ τέσσαρα σημεῖα εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, καὶ ἑνοῦντες αὐτὰ ἀνὰ δύο σχηματίζομεν τετράπλευρον τὸ ὁποῖον ὅλο εὑρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ἐξ ἐναντίας ἐὰν τὸ ἐπίπεδον δὲν διέλθῃ ἀπὸ τὸ τέταρτον, τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον εὑρίσκεται μοιρασμένον εἰς δύο ἐπίπεδα, καὶ τότε λέγεται ὅτι δὲν κεῖται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Τὸ τετράπλευρον τοῦτο καλεῖται ἀπὸ τινὰς Γάλλους quadrilatère gauche· οἱ ἡμέτεροι ἂς τὸ ὀνομάσουν ὅπως ἀγαποῦν. Εἰς τοιούτου εἴδους τετράπλευρον λοιπὸν ἂς φαντασθῇ ὁ ἀναγνώστης τὴν ἀνωτέρω κατασκευὴν καὶ ἀπόδειξιν. Οἱ Μ.

λοιπὸν (20, 3) τὰ τρίγωνα ΑΘϬ, ΔΘγ, εἶναι ὅμοια· Ακολούθως θέλομεν ἔχει Αε : εβ :: ΑΕ : ΕΒ, καὶ Δζ : ζγ :: ΔΖ : ΖΓ· λοιπὸν Αε : εβ :: Δζ : ζγ, ἤ, ἐν συνθέσει, Αε : Δζ :: ΑϬ : Δγ· ἀλλ' ἐξ αἰτίας τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΘβ, ΔΘγ, ἔχομεν Αβ : Δγ :: ΑΘ : ΘΔ· λοιπὸν Αε : Δζ :: ΑΘ : ΘΔ: ἄλλως τὰ τρίγωνα ΑΘβ, γΘΔ ἐπειδὴ εἶναι ὅμοια, ἡ γωνία ΘΑΕ = ΘΔζ· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΘε, ΔΘζ, εἶναι ὅμοια (20, 3)· λοιπὸν ἡ γωνία ΑΘε = ΔΘζ. Εκ τούτου ἕπεται κατὰ πρῶτον ὅτι εΘζ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ, καὶ οὕτως αἱ τρεῖς παράλληλοι Εε, ΗΘ, Ζζ κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον περιέχει καὶ τὰς δύο εὐθείας ΕΖ, ΗΘ· λοιπὸν αὗται πρέπει νὰ τέμνωνται εἰς μίαν ςιγμὴν Μ. Επειτα ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων Εε, ΜΘ, Ζζ, θέλομεν ἔχει ΕΜ : ΜΖ :: εΘ : Θζ :: ΑΘ : ΘΔ.

Εὰν τὴν ἀνωτέρω κατασκευὴν ἀναφέρωμεν εἰς τὴν πλευρὰν ΑΒ, θέλομεν ἀποδείξει ὅτι ΘΜ : ΜΗ :: ΑΕ : ΕΒ. (1).

---

(1) Οταν τὸ τετράπλευρον εὑρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, οὐδεμία ἀμφιβολία ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι αἵτινες τέμνουν τὰς ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρὰς ἀναλόγως, τέμνονται εἰς μίαν ςιγμὴν Μ. Τὰς ἀναλογίας ὅμως ΕΜ : ΜΖ :: ΑΘ : ΘΔ καὶ ΘΜ : ΜΗ :: ΑΕ : ΕΒ, ἀποδεικνύομεν ὡς ἀκολούθως.

Γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς εἰς τὴν πρώτην περίςασιν, τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΕβ, ΔΕε θέλουν δώσει ΑΕ : ΕΒ :: Αε : εβ· παρομοίως καὶ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΔΓγ, ΔΖζ, ΔΖ : ΖΓ :: Δζ : ζγ· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, ΑΕ : ΕΒ :: ΔΖ : ΖΓ· λοιπὸν Αε : εϬ :: Δζ : ζγ· καὶ ἐν συνθέσει ΑΒ : εϬ :: Δγ : ζγ (1)· ἄλλως ΒΗ : ΗΓ :: βΘ : Θγ, καὶ ΑΘ : ΘΔ :: ΒΗ : ΗΓ· λοιπὸν ΑΘ : ΘΔ :: βΘ : Θγ, καὶ, ἐν μεταθέσει, ΑΘ : βΘ :: ΘΔ : Θγ· ὅθεν, ἐν διαιρέσει, ΑΘ − βΘ ἢ ΑϬ : ϬΘ :: ΘΔ − Θγ ἢ γΔ : Θγ. Εκ τῆς νέας ταύτης ἀναλογίας καὶ τῆς (1) συνάγομεν εϬ : Θβ :: ζγ : Θγ· ὅθεν ἐν συνθέσει εϬ + ΘϬ ἢ εΘ : ΘϬ :: ζγ + Θγ ἢ Θζ : Θγ, καὶ ἐν μεταθέσει εΘ : Θζ :: ΘϬ : Θγ· ἀλλὰ εΘ : Θζ :: ΕΜ : ΜΖ· λοιπὸν ΕΜ : ΜΖ :: ΘϬ : Θγ· ἐπειδὴ δὲ βΘ : Θγ :: ΒΗ : ΗΓ :: ΑΘ : ΘΔ· διὰ τοῦτο καὶ ΕΜ : ΜΖ :: ΑΘ : ΘΔ· ἀναφέροντες τὴν αὐτὴν κατασκευὴν εἰς τὴν πλευρὰν ΑΒ, καὶ ὁμοίως συλλογιζόμενοι δεικνύομεν ὡσαύτως ὅτι ΘΜ : ΜΗ :: ΑΕ : ΕΒ. Ο. Μ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ΄.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Η περιεχομένη γωνία μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων ΜΑΝ, ΜΑΠ, ἠμπορεῖ, κατὰ τὸν ὁρισμὸν, νὰ μετρηθῇ ἀπὸ τὴν γωνίαν ΝΑΠ τὴν ὁποίαν κάμνουν μεταξύ των αἱ δύο κάθετοι ΑΝ, ΑΠ ἠγμέναι εἰς ἕκαςον τούτων τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΑΜ. σχ. 193.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὸ νόμιμον τούτου τοῦ μέτρου, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν, 1.ον ὅτι εἶναι ςαθερὸν, ἢ ὅτι ἤθελεν εἶναι τὸ αὐτὸ εἰς ὁποιανδήποτε ςιγμὴν τῆς κοινῆς τομῆς ἀχθῶσιν αἱ δύο κάθετοι.

Τῷ ὄντι, ἐὰν ληφθῇ ἄλλη ςιγμὴ Μ, καὶ ἀχθῇ ἡ μὲν ΜΓ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ κάθετος ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΑΜ, ἡ δὲ ΜΒ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΠ κάθετος ἐπὶ τῆς ἰδίας κοινῆς τομῆς· αἱ εὐθεῖαι ΜΒ καὶ ΑΠ ὡς κάθετοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς γραμμῆς ΑΜ, θέλουν εἶναι παράλληλοι μεταξύ των. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΜΓ θέλει εἶναι παράλληλος τῇ ΑΝ· λοιπὸν ἡ γωνία ΒΜΓ = ΠΑΝ (πρό. 13)· ἀδιάφορον λοιπὸν εἶναι νὰ ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ἐκ τῆς ςιγμῆς Μ ἢ ἐκ τῆς ςιγμῆς Α· ἡ περιεχομένη γωνία πάντοτε θέλει εἶναι ἡ αὐτή.

2.ον Πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἐὰν ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων αὐξάνῃ ἢ ὀλιγοςεύῃ κατά τινα λόγον, κατὰ τὸν αὐτὸν θέλει αὐξάνει ἢ ὀλιγοςεύει ἡ γωνία ΠΑΝ.

Εἰς τὸ ἐπίπεδον ΠΑΝ ἐκ τοῦ κέντρου Α καὶ μὲ ἀκτῖνα κατ' ἀρέσκειαν ἂς γραφῇ τὸ τόξον ΝΔΠ· ἐκ τοῦ κέντρου Μ καὶ μὲ ἴσην ἀκτῖνα ἂς γραφῇ τὸ τόξον ΓΕΒ, ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ κατ' ἀρέσκειαν· ἐπειδὴ τὰ δύο ἐπίπεδα ΠΑΝ, ΒΜΓ εἶναι κάθετα εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΜΑ, εἶναι διὰ τοῦτο παράλληλα (πρό. 9)· λοιπὸν αἱ κοιναὶ τομαί των ΑΔ, ΜΕ ὑπὸ τρίτου τινὸς ΑΜΔ, εἶναι παράλληλοι· λοιπὸν ἡ γωνία ΒΜΕ εἶναι ἴση τῇ ΠΑΔ (πρό. 13).

Ἂς καλέσωμεν πρὸς ὀλίγον ἀγκωνὴν (1) τὴν σχηματιζομένην γωνίαν ἀπὸ τὰ δύο ἐπίπεδα ΜΠ, ΜΝ· τούτου τεθέντος, ἐὰν ἡ γωνία ΔΑΠ ἦναι ἴση μὲ τὴν ΔΑΝ, φανερὸν ὅτι καὶ ἡ ἀγκωνὴ ΔΑΜΠ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀγκωνὴν ΔΑΜΝ· διότι ἡ βάσις ΠΑΔ ἀκριβῶς ἠμπορεῖ νὰ τεθῇ ἐπὶ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ΔΑΝ, τὸ δὲ ὕψος ΑΜ εἶναι πάντοτε τὸ αὐτό· λοιπὸν αἱ δύο ἀγκωναὶ ἐντελῶς θέλουν ἐφαρμόσει. Βλέπομεν ὡσαύτως ὅτι ἐὰν ἡ γωνία ΔΑΠ περιείχετο ἀριθμόν τινὰ φορῶν εἰς τὴν γωνίαν ΠΑΝ, ἡ ἀγκωνὴ ΔΑΜΠ ἤθελε περιέχεται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν φορῶν εἰς τὴν ἀγκωνὴν ΠΑΜΝ· λοιπὸν ἐὰν ὁ λόγος τῶν δύο γωνιῶν ΔΑΠ, ΠΑΝ ἐκφράζεται δι' ἀκεραίων ἀριθμῶν, ὁ λόγος τῶν δύο ἀγκωνῶν ΔΑΜΠ, ΠΑΜΝ θέλει ἐκφράζεται διὰ τῶν ἰδίων ἀριθμῶν· καὶ ἑπομένως γωνία ΔΑΠ: γωνίαν ΠΑΝ:: ἀγκωνὴ ΔΑΜΠ: ἀγκωνὴν ΠΑΜΝ. Ἀλλὰ καθὼς καὶ εἰς ἄλλην παρομοίαν περίστασιν (17, 2), οὕτω καὶ ἐνταῦθα ἠμποροῦμεν νὰ δείξωμεν ὅτι ὁποιοσδήποτε καὶ ἂν ἦναι ὁ λόγος τῶν δύο γωνιῶν ΔΑΠ, ΠΑΝ, αὗται θέλουν εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀντικειμένων ἀγκωνῶν· λοιπὸν ὁποιοσδήποτε καὶ ἂν ἦναι ὁ λόγος τῆς γωνίας ΔΑΠ πρὸς τὴν γωνίαν ΠΑΝ, ἡ ἀγκωνὴ ΔΑΜΠ θέλει εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον μὲ τὴν ἀγκωνὴν ΠΑΜΝ· λοιπὸν ἡ γωνία ΝΑΠ ἠμπορεῖ νὰ ληφθῇ ὡς μέτρον τῆς ἀγκωνῆς ΠΑΜΝ, ἢ τῆς γωνίας τὴν ὁποίαν κάμνουν μεταξύ των τὰ δύο ἐπίπεδα ΜΑΠ, ΜΑΝ.

Σχόλιον. Ὅ,τι ὑπάρχει διὰ τὰς σχηματιζομένας γωνίας ἀπὸ δύο εὐθείας, ὑπάρχει καὶ διὰ τὰς σχηματιζομένας γωνίας ἀπὸ δύο ἐπίπεδα. Οὕτως ὅταν δύο ἐπίπεδα ἀμοιβαίως τὸ ἓν διαπερᾷ τὸ ἄλλο, αἱ ἀπέναντι εἰς τὴν

---

(1) Ὠνόμασα ἀγκωνὴν τὴν ὁποίαν ὁ συγγραφεὺς λέγει coin· ἐπειδὴ μὲ φαίνεται ὅτι ἡ λέξις αὕτη εἶναι εἰς ὅλους μας εὔληπτος.

κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ προσκείμεναι κάμνουν ὁμοῦ δύο ὀρθάς· ἐὰν λοιπὸν ἐπίπεδον ἦναι κάθετον εἰς ἄλλο, τοῦτο εἶναι κάθετον εἰς ἐκεῖνο. Παρομοίως εἰς τὴν συναπάντησιν παραλλήλων ἐπιπέδων μὲ τρίτον ἐπίπεδον, ὑπάρχουσιν αἱ αὐταὶ ἰσότητες καὶ αἱ αὐταὶ ἰδιότητες ὅπου καὶ εἰς τὴν συναπάντησιν δύο παραλλήλων γραμμῶν μὲ τρίτην τινά.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν ΑΠ ἦναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, κάθε ἐπίπεδον ΑΠΒ δι' αὐτῆς διερχόμενον, θέλει εἶναι κάθετον εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ. σχ. 194.

Ἔστω ΒΓ ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ΑΒ, ΜΝ· ἐὰν εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ ἀχθῇ ἡ ΔΕ κάθετος εἰς τὴν ΒΠ, ἡ ΑΠ, οὖσα κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, θέλει εἶναι κάθετος εἰς κάθε μίαν τῶν δύο εὐθειῶν ΒΓ, ΔΕ· ἀλλ' ἡ γωνία ΑΠΔ, σχηματιζομένη ἀπὸ τὰς δύο καθέτους ΠΑ, ΠΔ, ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΒΠ, μετρεῖ τὴν γωνίαν τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΒ, ΜΝ· λοιπὸν ἐπειδὴ ἡ γωνία αὕτη εἶναι ὀρθή, τὰ δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα μεταξύ των (ὁρ. 5).

Σχόλιον. Ὅταν τρεῖς εὐθεῖαι, ὡς ΑΠ, ΒΠ, ΔΠ, ἦναι κάθετοι μεταξύ των, ἑκάστη τούτων εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο ἄλλων καὶ τὰ τρία ἐπίπεδα εἶναι κάθετα μεταξύ των.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον ΑΒ ἦναι κάθετον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒ ἀχθῇ ἡ ΠΑ κάθετος ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ΠΒ, λέγω ὅτι ἡ ΠΑ θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ. σχ. 194.

Διότι, ἐὰν εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ ἀχθῇ ἡ ΠΔ κάθετος ἐπὶ τῆς ΠΒ, ἡ γωνία ΑΠΔ θέλει εἶναι ὀρθή, ἐπειδὴ τὰ