ὁποίου τετραγώνου ἡ πλευρὰ εἶναι 2. Ἐντεῦθεν εὔκολον εἶναι νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον· διότι ἀπεδείχθη ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνός του πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ π· ἐὰν λοιπὸν διαιρέσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν 4 διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ 1,1283792, θέλομεν ἔχει τὴν τιμὴν τοῦ π, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν διὰ ταύτου τοῦ ὑπολογισμοῦ ἴσην μὲ 3,1415926 κ. τ. λ, ὡς τὴν εὕρομεν δι' ἄλλης μεθόδου.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΕΙΣ ΤΟ Δ'.
ΒΙΒΛΙΟΝ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Καλεῖται μέγιςον (maximum) ἡ μεγαλητέρα ποσότης ἀπὸ ὅλας τὰς ἄλλας τοῦ ἰδίου εἴδους· ἐλάχιςόν (minimum) ἡ μικροτέρα.

Οὕτως ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου εἶναι μέγιςόν τι μεταξὺ ὅλων τῶν γραμμῶν αἵτινες ἑνόνουν δύο σημεῖα τῆς περιφερείας, καὶ ἡ κάθετος εἶναι ἐλάχιςόν τι μεταξὺ ὅλων τῶν ἀπὸ δεδομένον σημεῖον εἰς δεδομένην εὐθεῖαν φερομένων εὐθειῶν.

Β'. Καλοῦνται σχήματα ἰσοπερίμετρα τὰ ἴσας περιμέτρους ἔχοντα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΠΡΩΤΗ.

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Μεταξὺ ὅλων τῶν τριγώνων τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τῆς αὐτῆς περιμέτρου, τὸ μέγιςον εἶναι ἐκεῖνο εἰς τὸ ὁποῖον αἱ δύο ἀπροσδιόριςοι πλευραὶ εἶναι ἴσαι.

Ἔςω ΑΓ=ΓΒ, καὶ ΑΜ + ΜΒ=ΑΓ + ΓΒ· λέγω ὅτι τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΓΒ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ τριγώνου ΑΜΒ τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὴν αὐτὴν περίμετρον. σχ. 172.

Ἐκ τῆς ςιγμῆς Γ, ὡς ἐκ κέντρου, μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΑ= ΓΒ, ἂς γραφθῇ περιφέρεια συναπαντῶσα τὴν ΓΑ πρoεκ-βαλλομένην εἰς Δ· ἂς ἐπιζευχθῇ ΔΒ· ἡ γωνία ΔΒΑ, ἐγγε-γραμμένη ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ θέλει εἶναι ὀρθὴ (15, 2). Ἂς προεκβληθῇ ἡ κάθετος ΔΒ πρὸς τὸ Ν, ἂς γένῃ ΜΝ = ΜΒ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ΑΝ. Τέλος ἐκ τῶν ςιγμῶν Μ καὶ Γ ἄς κατβασθῶσιν αἱ κάθετοι ΜΠ καὶ ΓΗ ἐπὶ τῆς ΔΝ. Ἐπειδὴ ΓΒ=ΓΔ καὶ ΜΝ = ΜΒ, ἔχομεν ΑΓ + ΓΒ= ΑΔ, καὶ ΑΜ + ΜΒ=ΑΜ + ΜΝ. Ἀλλὰ ΑΓ + ΓΒ= ΑΜ + ΜΒ· λοιπὸν ΑΔ = ΑΜ + ΜΝ· λοιπὸν ΑΔ > ΑΝ. Τώρα ἐπειδὴ ἡ πλαγία ΑΔ εἶναι μεγαλητέρα τῆς πλαγίας ΑΝ, πρέπει νὰ ἀπομακρύνεται τῆς καθέτου περισσότερον· λοιπὸν ΔΒ> ΒΝ· ἄρα ΒΗ, ἡμίσεια τῆς ΒΔ (12, 1) εἶναι μεγαλητέρα τῆς ΒΠ ἡ μισείας τῆς ΒΝ. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΜ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη των ΒΗ, ΒΠ· λοιπὸν, ἐπειδὴ ΒΗ > ΒΠ, τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ μὴ ἰσοσκελοῦς ΑΜΒ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τῆς αὐ-τῆς περιμέτρου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Μεταξὺ ὅλων τῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν, τὸ μέγιςον ἔχει τὰς πλευράς του ἴσας.

Διότι ἔςω ΑΒΓΔΕΖ τὸ μέγιςον πολύγωνον· ἐὰν ἡ πλευρὰ ΒΓ δὲν ἦναι ἴση τῇ ΓΔ, ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΔ τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΒΟΔ ἰσοπερίμετρον μὲ τὸ ΒΓΔ· τὸ τρίγωνον ΒΟΔ θέλει εἶναι μεῖζον τοῦ ΒΓΔ (πρό. 1), καὶ ἑπομένως τὸ πολύγωνον ΑΒΟΔΕΖ μεῖζον τοῦ ΑΒΓΔΕΖ· λοιπὸν τὸ τελευταῖον τοῦτο δὲν ἤθελεν εἶναι τὸ μέγιστον ἀπὸ ὅσα ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως. Πρέπει λοιπὸν ΒΓ=ΓΔ· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΓΔ=ΔΕ, ΔΕ=ΕΖ κ.τ.λ. λοιπὸν ὅλαι αἱ πλευραὶ τοῦ μεγίστου πολυγώνου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. σχ. 173.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἀπὸ ὅλα τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα μὲ δύο δεδομένας πλευρὰς ποιούσας μεταξύ των γωνίαν κατ' ἀρέσκειαν, τὸ μέγιστον εἶναι εἰς τὸ ὁποῖον αἱ δύο δεδομέναι πλευραὶ κάμνουν ὀρθὴν γωνίαν.

Ἔστωσαν τὰ δύο τρίγωνα ΒΑΓ, ΒΑΔ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν πλευρὰν ΑΒ κοινὴν, καὶ τὴν ΑΓ=ΑΔ· ἐὰν ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθὴ, λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΑΓ θέλει εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ΒΑΔ εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἐν Α γωνία εἶναι ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα. σχ. 174.

Διότι ἐπειδὴ ἡ βάσις ΑΒ εἶναι ἡ αὐτὴ, τὰ δύο τρίγωνα ΒΑΓ, ΒΑΔ, εἶναι ὡς τὰ ὕψη ΑΓ, ΔΕ: ἀλλ' ἡ κάθετος ΔΕ εἶναι σιμοτινωτέρα τῆς πλαγίας ΑΔ ἢ τῆς ἴσης μὲ αὐτὴν ΑΓ· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΑΔ εἶναι μικρότερον τοῦ ΒΑΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἀπὸ ὅλα τὰ σχηματιζόμενα πολύγωνα μὲ δεδομένας πλευρὰς καὶ μίαν κατ' ἀρέσκειαν, τὸ μέγιστον πρέπει νὰ ἦναι τοιοῦτον ὥστε ὅλαι του αἱ γωνίαι νὰ ἐγγράφωνται εἰς ἡμιπεριφέρειαν τῆς ὁποίας ἡ ἄγνωστος πλευρὰ εἶναι ἡ διάμετρος.

Εςω ΑΒΓΔΕΖ τὸ μεγαλήτερον τῶν σχηματιζομένων πολυγώνων μὲ τὰς δεδομένας πλευρὰς ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΕΖ, καὶ μίαν τελευταίαν ΑΖ κατ' ἀρέσκειαν· ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ διαγώνιοι ΑΔ, ΔΖ. Ἐὰν ἡ γωνία ΑΔΖ δὲν ἦτον ὀρθή, ἠμποροῦσαμεν, φυλάττοντες τὰ μέρη ΑΒΓΔ, ΔΕΖ ὡς ὑπάρχουν, νὰ αὐξήσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΔΖ, καὶ ἑπομένως τὸ ὅλον πολύγωνον, ἀποκαθιςῶντες τὴν γωνίαν ΑΔΖ ὀρθήν, κατὰ τὴν προλαβοῦσαν πρότασιν· ἀλλὰ τὸ πολύγωνον τοῦτο δὲν ἠμπορεῖ πλέον νὰ αὐξηνθῇ, διότι ὑποτίθεται ὅτι ἔφθασεν εἰς τὴν μεγίςην του κατάςασιν· λοιπὸν ἡ γωνία ΑΔΖ εἶναι ἤδη ὀρθή. Τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰς γωνίας ΑΒΖ, ΑΓΖ, ΑΕΖ· λοιπὸν ὅλαι αἱ γωνίαι Α,Β,Γ, Δ,Ε,Ζ τοῦ μεγίςου πολυγώνου εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς ἡμιπεριφέρειαν τῆς ὁποίας ἡ ἀπροσδιόριςος πλευρὰ ΑΖ εἶναι ἡ διάμετρος. σχ. 175.

Σχόλιον. Η πρότασις αὕτη δίδει χώραν εἰς τι ζήτημα· τουτέςιν ἐὰν ὑπάρχουν πολλοὶ τρόποι τοῦ σχηματίζειν πολύγωνον μὲ δεδομένας πλευράς, καὶ μίαν τελευταίαν ἄγνωςον ἥτις νὰ ἦναι ἡ διάμετρος τῆς ἡμιπεριφερείας εἰς τὴν ὁποίαν αἱ ἄλλαι πλευραὶ εἶναι ἐγγεγραμμέναι: δηλαδὴ ἐὰν ἦναι δυνατὸν ἀφ' οὗ εὑρεθῇ πολύγωνον τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὴν ἰδιότητα ὥςε ὅλαι του αἱ γωνίαι νὰ ἐγγράφωνται εἰς τὴν ἡμιπεριφέρειαν τῆς ὁποίας ἡ ἀπροσδιόριςος πλευρὰ εἶναι ἡ διάμετρος, ἐάν, λέγω, τὸ πολύγωνον τοῦτο ἦναι δυνατὸν νὰ ἐγγραφθῇ εἰς ἄλλην ἡμιπεριφέρειαν διαφορετικήν· διότι ἐὰν τοῦτο ἦναι δυνατὸν τότε ἤθελον ὑπάρχει ἄπειρα πολύγωνα ἔχοντα τὴν ἀπαιτουμένην ἰδιότητα τοῦ μεγίςου, καὶ ἑπομένως πολλὰ μέγιςα πολύγωνα, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον. Πρὶν νὰ εἴπωμεν τὶ ἐπάνω εἰς τοῦτο τὸ ζήτημα, πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἐὰν μία καὶ ἡ αὐτὴ χορδὴ ὑποτείνῃ τόξα γεγραμμένα μὲ διαφόρους ἀκτῖνας ΑΓ, ΑΔ, ἡ εἰς τὸ κέντρον γωνία ἐπιςηριζομένη ἐπὶ ταύτης τῆς χορδῆς θέλει εἶναι μικροτέρα εἰς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἡ μεγαλητέρα· οὕτως ΑΓΒ < ΑΔΒ. Τῷ ὄντι ἡ γωνία ΑΔΟ = ΑΓΔ + ΓΑΔ (27, 2)· λοιπὸν ΑΓΔ < ΑΔΟ, καὶ διπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέρη θέλομεν ἔχει ΑΓΒ < ΒΔΒ. σχ. 176.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εἷς μόνος τρόπος ὑπάρχει τοῦ σχηματίζειν τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ, μὲ δεδομένας πλευρὰς καὶ μίαν τελευταίαν ἄγνωςον ἥτις νὰ ἦναι ἡ διάμετρος τῆς ἡμιπεριφερείας εἰς τὴν ὁποίαν αἱ ἄλλαι πλευραὶ εἶναι ἐγγεγραμμέναι.

Διότι, ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εὑρήκαμεν κύκλον πληροῦντα εἰς τὸ ζήτημα· ἐὰν λάβωμεν κύκλον μεγαλήτερον, αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κ. τ. λ. θέλουν ἀντιςοιχεῖ εἰς γωνίας εἰς τὸ κέντρον μικροτέρας. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν ὅλων τῶν εἰς τὸ κέντρον τούτων γωνιῶν θέλει εἶναι μικρότερον ἀπὸ δύο ὀρθάς. Οὕτως τὰ ἄκρα τῶν δεδομένων πλευρῶν δὲν φθάνουν εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου· ἐὰν δὲ λάβωμεν κύκλον μικρότερον, τὸ ἄθροισμα τῶν εἰς τὸ κέντρον γωνιῶν ἤθελεν εἶναι μεῖζον δύο ὀρθῶν, καὶ οὔτε πλέον αἱ δεδομέναι πλευραὶ ἤθελον τελειόνει ἐπὶ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου· ἄρα τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος πολύγωνον δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἐγγραφθῇ παρὰ εἰς ἕνα μόνον κύκλον. σχ. 175.

Σχόλιον. Ημποροῦμεν νὰ ἀλλάξωμεν κατ' ἀρέσκειαν τὴν τάξιν τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κ. τ. λ, καὶ ἡ διάμετρος τοῦ περιγεγραμένου κύκλου πάντοτε θέλει εἶναι ἡ αὐτὴ, καθὼς καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου· διότι ὁποιαδήποτε καὶ ἄν ἦναι ἡ τάξις τῶν τόξων ΑΒ, ΒΓ, κ. τ. λ, ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμά των νὰ κάμνῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν, καὶ τὸ πολύγωνον θέλει ἔχει πάντοτε τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν, διότι θέλει ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμικύκλιον μεῖον τὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ, κ. τ. λ. τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι πάντοτε τὸ αὐτό.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛʹ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ἀπὸ ὅλα τὰ σχηματιζόμενα πολύγωνα μὲ δεδομένας πλευρὰς, τὸ μέγιστον εἶναι τὸ δυνάμενον νὰ ἐγγραφθῇ εἰς κύκλον.

Ἔστω ΑΒΓΔΕΖΗ τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, καὶ αβγδεζη τὸ μὴ δυνάμενον νὰ ἐγγραφθῇ σχηματισμένον μὲ ἴσας πλευρὰς, εἰς τρόπον ὥστε ΑΒ = αβ, ΒΓ = βγ, κ.τ.λ· λέγω ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἄλλου· ἂς φερθῇ ἡ διάμετρος ΕΜ, ἂς ἐπιζευχθῶσι ΑΜ, ΜΒ· ἐπὶ τῆς αβ = ΑΒ ἂς κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον αβγ ἴσον μὲ τὸ ΑΒΜ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ εμ. σχ. 177.

Δυνάμει τῆς Δʹ προτάσεως, τὸ πολύγωνον ΕΖΗΑΜ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ εζηαμ, ἐκτὸς ἐὰν τὸ πολύγωνον τοῦτο ἠμπορῇ νὰ ἐγγραφθῇ εἰς ἡμιπεριφέρειαν, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ εμ ἤθελεν εἶναι ἡ διάμετρος· πλὴν ἐπειδὴ, τούτου δοθέντος, ἡ ἡμιπεριφέρεια αὕτη δὲν ἠμπορεῖ οὔτε ἐλάσσων οὔτε μείζων νὰ ἦναι τῆς ἡμιπεριφερείας τῆς ὁποίας ΕΜ εἶναι ἡ διάμετρος κατὰ τὴν Εʹ πρότασιν, μένει νὰ ἦναι ἴση· ἀλλὰ τότε τὰ δύο πολύγωνα ἤθελον εἶναι ἴσα. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ πολύγωνον ΕΔΓΒΜ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ εδγβμ, ἐξαιρουμένης τῆς περιστάσεως καθ' ἣν ἤθελον εἶναι ἴσα. Λοιπὸν τὸ ὅλον πολύγωνον ΕΖΗΑΜΒΓΔΕ εἶναι μεῖζον τοῦ εζημβγδ, ἐκτὸς ἐὰν ἦναι ἴσα: ἀλλὰ δὲν εἶναι· διότι τὸ ἓν ἐγγράφεται εἰς τὸν κύκλον, καὶ τὸ ἄλλο ὑποτίθεται μὴ ἐγγράψιμον· λοιπὸν τὸ ἐγγεγραμμένον εἶναι τὸ μεγαλήτερον. Ἐὰν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη ἀφαιρεθῶσι τὰ ἴσα τρίγωνα ΑΒΜ, αβμ, μένει τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖΗ μεγαλήτερον τοῦ μὴ ἐγγραψίμου αβγδεζη, Σχόλιον. Καθὼς εἰς τὴν Ε′ πρότασιν ἠθέλαμεν ἀποδείξει ὅτι δὲν ἠμπορεῖ νὰ ὑπάρχῃ παρὰ εἷς μόνος κύκλος, καὶ ἑπομένως ἓν μόνον μέγιςον πολύγωνον τὸ ὁποῖον νὰ πληροῖ εἰς τὸ ζήτημα· καὶ τὸ πολύγωνον τοῦτο θέλει ἔχει τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν, καθ᾽ ὅποιον τρόπον καὶ ἂν μεταβληθῇ ἡ τάξις τῶν πλευρῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ′.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ κανονικὸν πολύγωνον εἶναι μέγιςον μεταξὺ ὅλων τῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν.

Διότι, κατὰ τὸ δεύτερον θεώρημα, τὸ μέγιςον πολύγωνον ἔχει ὅλας του τὰς πλευρὰς ἴσας· καὶ, κατὰ τὸ προλαβὸν, εἶναι ἐγγράψιμον εἰς τὸν κύκλον· λοιπὸν τὸ πολύγωνον τοῦτο εἶναι κανονικόν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η′.

ΛΗΜΜΑ.

Δύο γωνίαι εἰς τὸ κέντρον, μετρούμεναι εἰς δύο διαφορετικοὺς κύκλους, εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ περιεχόμενα τόξα διαιρούμενα διὰ τῶν ἀκτίνων.

Οὕτως ἡ γωνία Γ εἶναι πρὸς τὴν γωνίαν Ο ὡς ὁ λόγος $\frac{AB}{A\Gamma}$ πρὸς τὸν λόγον $\frac{\Delta E}{\Delta O}$. σχ. 178.

Μὲ ἀκτῖνα ΟΖ ἴσην τῇ ΑΓ ἂς γραφθῇ τὸ τόξον ΖΗ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν πλευρῶν ΟΔ, ΟΕ προεκβαλλομένων· ἐξ αἰτίας τῶν ἴσων ἀκτίνων ΑΓ, ΟΖ, θέλομεν ἔχει κατὰ πρῶτον $\Gamma:O::AB:ZH$ (πρ. 17, 2) ἢ $::\frac{AB}{A\Gamma}:\frac{ZH}{ZO}$· ἔπειτα, ἐξ αἰτίας τῶν ὁμοίων τόξων ΖΗ, ΔΕ, $ZH:\Delta E::ZO:\Delta O$ (πρό. 11)· λοιπὸν ὁ λόγος $\frac{ZH}{ZO}$ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον $\frac{\Delta E}{\Delta O}$, καὶ ἑπομένως $\Gamma:O::\frac{AB}{A\Gamma}:\frac{\Delta E}{\Delta O}$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Εκ δύο κανονικῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων, τὸ ἔχον μεγαλήτερον ἀριθμὸν πλευρῶν εἶναι τὸ μεγαλήτερον.

Εςω ΔΕ ἡ ἡμιπλευρὰ τοῦ ἑνὸς τῶν πολυγώνων, Ο τὸ κέντρον του, ΟΕ τὸ απόςημά του· ἔςω ΑΒ ἡ ἡμιπλευρὰ τοῦ ἄλλου πολυγώνου, Γ τὸ κέντρον του, ΓΒ τὸ απόςημά του. Υποθέτομεν τὰ κέντρα Ο καὶ Γ ἀπέχοντα ἀπ' ἀλλήλων ὁποιονδήποτε διάςημα ΟΓ, καὶ τὰ ἀποςήματα ΟΕ, ΓΒ, κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΟΓ: οὕτως ΔΟΕ καὶ ΑΓΒ θέλουν εἶναι αἱ εἰς τὸ κέντρον ἡμιγωνίαι τῶν πολυγώνων, καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι αὗται δὲν εἶναι ἴσαι, αἱ γραμμαὶ ΓΑ, ΟΔ προεκβληθεῖσαι θέλουν συναπαντηθῆ εἰς ςιγμὴν τινὰ Ζ· ἐκ ταύτης ἄς κατεβασθῆ ἐπὶ τῆς ΟΓ ἡ κάθετος ΖΗ· ἐκ τῶν ςιγμῶν Ο καὶ Γ, ὡς ἐκ κέντρων, ἄς γραφθῶσι τὰ τόξα ΗΙ, ΗΘ περατούμενα εἰς τὰς πλευρὰς ΟΖ, ΓΖ. σχ. 179.

Τούτου τεθέντος, ἔχομεν κατὰ τὸ προλαβὸν λῆμμα $\text{Ο} : \text{Γ} :: \frac{\text{ΗΙ}}{\text{ΟΗ}} : \frac{\text{ΗΘ}}{\text{ΓΗ}}$· ἀλλὰ ΔΕ εἶναι πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ πρώτου πολυγώνου ὡς ἡ γωνία Ο εἰς τέσσαρας ὀρθὰς, καὶ ΑΒ εἶναι πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ δευτέρου ὡς ἡ γωνία Γ πρὸς τέσσαρας ὀρθάς· λοιπὸν, ἐπειδὴ αἱ περίμετροι τῶν πολυγώνων εἶναι ἴσαι, $\text{ΔΕ} : \text{ΑΒ} :: \text{Ο} : \text{Γ}$, ἢ $\text{ΔΕ} : \text{ΑΒ} :: \frac{\text{ΗΙ}}{\text{ΟΗ}} : \frac{\text{ΗΘ}}{\text{ΓΗ}}$· πολλαπλασιάζοντες τοὺς ἡγουμένους ἐπὶ ΟΗ καὶ τοὺς ἑπομένους ἐπὶ ΓΗ, θέλομεν ἔχει $\text{ΔΕ} \times \text{ΟΗ} : \text{ΑΒ} \times \text{ΓΗ} :: \text{ΗΙ} : \text{ΗΘ}$. Αλλὰ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΔΕ, ΟΖΗ, δίδουν $\text{ΟΕ} : \text{ΟΗ} :: \text{ΔΕ} : \text{ΖΗ}$, ὅθεν ἕπεται $\text{ΔΕ} \times \text{ΟΗ} = \text{ΟΕ} \times \text{ΖΗ}$· θέλομεν ἔχει παρομοίως $\text{ΑΒ} \times \text{ΓΗ} = \text{ΓΒ} \times \text{ΖΗ}$· λοιπὸν $\text{ΟΕ} \times \text{ΖΗ} : \text{ΓΒ} \times \text{ΖΗ} :: \text{ΗΙ} : \text{ΗΘ}$, ἢ $\text{ΟΕ} : \text{ΓΒ} :: \text{ΗΙ} : \text{ΗΘ}$. Εὰν λοιπὸν δείξωμεν ὅτι τὸ τόξον ΗΙ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ τόξου ΗΘ, θέλει ἀκολουθήσει ὅτι τὸ ἀπόςημα ΟΕ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ΓΒ.

Απὸ τὸ ἄλλο μέρος τῆς ΓΖ ἄς γένῃ τὸ σχῆμα ΓΚ'χ ἴσον μὲ τὸ σχῆμα ΓΗχ, εἰς τρόπον ὥςε ΓΚ'=ΓΗ, ἡ γωνία ΘΓΚ'=ΘΓΗ, καὶ τὸ τόξον Κ'χ=χΗ· ἡ καμπύλη Κ'χΗ περικυκλοῖ τὸ τόξον Κ'ΘΗ, καὶ εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ αὐτὸ (πρό. 9)· ἄρα Ηχ ἡμίσεια τῆς καμπύλης, εἶναι μεγαλητέρα τοῦ ΗΘ ἡμίσεως τοῦ τόξου· λοιπὸν, πολὺ περισσότερον, ΗΙ εἶναι μεῖζον τοῦ ΗΘ.

Εκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ ἀπόςημα ΟΕ εἶναι μεῖζον τοῦ ΓΒ· ἀλλὰ τὰ δύο πολύγωνα ὡς ἰσοπερίμετρα εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ἀποςήματά των (πρό. 7)· λοιπὸν τὸ πολύγωνον τὸ ἔχον ἡμιπλευρὰν ΔΕ εἶναι μεγαλήτερον τοῦ ἔχοντος ἡμιπλευρὰν ΑΒ· τὸ πρῶτον ἔχει περισσοτέρας πλευρὰς, διότι ἡ εἰς τὸ κέντρον γωνία του εἶναι μικροτέρα· ἄρα ἐκ δύο κανονικῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων, τὸ ἔχον περισσοτέρας πλευρὰς εἶναι τὸ μεγαλήτερον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Ο κύκλος εἶναι μεγαλήτερος ἀπὸ κάθε ἰσοπερίμετρον πολύγωνον.

Απεδείχθη ἤδη ὅτι ἀπὸ ὅλα τὰ ἰσοπερίμετρα πολύγωνα καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν τὸ κανονικὸν πολύγωνον εἶναι τὸ μεγαλήτερον· οὕτως ἄλλο δὲν πρόκειται παρὰ νὰ συγκρίνωμεν τὸν κύκλον μὲ ὁποιονδήποτε κανονικὸν ἰσοπερίμετρον πολύγωνον. Εςω ΑΙ ἡ ἡμιπλευρὰ τούτου τοῦ πολυγώνου, Γ τὸ κέντρον του. Εςω εἰς τὸν ἰσοπερίμετρον κύκλον ἡ γωνία ΔΟΕ=ΑΓΙ, καὶ ἑπομένως τὸ τόξον ΔΕ ἴσον μὲ τὴν ἡμιπλευρὰν ΑΙ. Τὸ πολύγωνον Π εἶναι πρὸς τὸν κύκλον Κ ὡς τὸ τρίγωνον ΑΓΙ πρὸς τὸν τομέα ΟΔΕ· οὕτως ἔχομεν $\Pi : K :: \frac{1}{2}AI \times \Gamma I : \frac{1}{2}\Delta E \times$

ΟΕ::ΓΙ:ΟΕ. Ἀς ἀχθῇ εἰς τὴν ςιγμὴν Ε ἡ ἐφαπτομένη ΕΗ ἥτις συναπαντᾷ τὴν προεκβολὴν τῆς ΟΔ εἰς Η. Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΓΙ, ΗΟΕ, δίδουν τὴν ἀναλογίαν, ΓΙ: ΟΕ:: ΑΙ ἢ ΔΕ : ΗΕ· λοιπὸν Π:Κ::ΔΕ:ΗΕ: ἢ ὡς ΔΕ $\times \frac{1}{2}$ΟΕ μέτρον τοῦ τομέως ΔΟΕ πρὸς ΗΕ $\times \frac{1}{2}$ΟΕ μέτρον τοῦ τριγώνου ΗΟΕ· ἀλλ' ὁ τομεὺς εἶναι μικρότερος τοῦ τριγώνου· λοιπὸν Π εἶναι μικρότερον τοῦ Κ, ἄρα ὁ κύκλος εἶναι μεγαλήτερος ἀπὸ κάθε πολύγωνον ἰσοπερίμετρον. σχ. 180.

ΒΙΒΛΙΟΝ Ε'.

ΤΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΚΑΙ ΑΙ ΣΤΕΡΕΑΙ ΓΩΝΙΑΙ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι κάθετος ἐν ἐπιπέδῳ ὅταν ἦναι κάθετος εἰς ὅλας τὰς εὐθείας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ ποδὸς της εἰς τὸ ἐπίπεδον (πρό. 4). Αντιςρόφως τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον εἰς τὴν γραμμήν.

Ο ποῦς τῆς καθέτου εἶναι ἡ ςιγμὴ τῆς συναπαντήσεώς της μὲ τὸ ἐπίπεδον.

Β'. Εὐθεῖα εἶναι παράλληλος ἐπιπέδου ὅταν δὲν ἠμπορῇ νὰ τὸ συναπαντήσῃ ὅσον καὶ ἂν προεκβληθῇ. Αντιςρόφως τὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλον τῆς γραμμῆς.

Γ'. Δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα μεταξύ των, ὅταν δὲν ἠμποροῦν νὰ συναπαντηθῶσιν ὅσον καὶ ἂν προεκβληθῶσι.

Δ'. Θέλει ἀποδειχθῇ (πρό. 3) ὅτι ἡ κοινὴ τομὴ δύο ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα συναπαντῶνται εἶναι εὐθεῖα γραμμή: τούτου τεθέντος, ἡ γωνία ἢ ἀμοιβαία κλίσις δύο ἐπι-