Διότι, ἐπειδὴ τὰ τόξα εἶναι ὅμοια, ἡ γωνία Γ εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ Ο (ὁρ. 3. βιβλ. 3)· ἀλλ' ἡ γωνία Γ εἶναι πρὸς τέσσαρας ὀρθὰς ὡς τὸ τόξον ΑΒ πρὸς τὴν ὅλην περιφέρειαν ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΑ (17, 2), καὶ ἡ γωνία Ο εἶναι πρὸς τέσσαρας ὀρθὰς ὡς τὸ τόξον ΔΕ πρὸς τὴν περιφέρειαν τῆς ἀκτῖνος ΟΔ· λοιπὸν τὰ τόξα ΑΒ, ΔΕ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ περιφέρειαι τῶν ὁποίων κάμνουν μέρος: αἱ περιφέρειαι αὗται εἶναι ὡς αἱ ἀκτῖνες ΑΓ, ΔΟ, λοιπὸν τόξον ΑΒ : τόξον ΔΕ : : ΑΓ : ΔΟ.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον οἱ τομεῖς ΑΓΒ, ΔΟΕ εἶναι ὡς οἱ ὅλοι κύκλοι, οὗτοι δὲ ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων· λοιπὸν τομ. ΑΓΒ : τομ. ΔΟΕ : : $\overline{\text{ΑΓ}}^2 : \overline{\text{ΔΟ}}^2$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος.

Ἂς σημειώσωμεν διὰ ἐπιφ. ΓΑ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΑ· λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει ἐπιφ. ΓΑ $=$ ½ΓΑ $\times$ περιφ. ΓΑ.

Διότι ἐὰν ½ΓΑ $\times$ περιφ. ΓΑ δὲν ἦναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ΓΑ εἶναι ἡ ἀκτὶς, ἡ ποσότης αὕτη θέλει εἶναι τὸ μέτρον μεγαλητέρου ἢ μικροτέρου κύκλου. Ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι εἶναι τὸ μέτρον κύκλου μεγαλητέρου, καὶ ἔσω, εἰ δυνατὸν, ½ΓΑ $\times$ περιφ. ΓΑ $=$ ἐπιφ. ΓΒ. σχ. 167.

Εἰς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΑ ἂς περιγραφθῇ κανονικὸν πολύγωνον ΔΕΖΗ κ. τ. λ, αἱ πλευραὶ τοῦ ὁποίου νὰ μὴ συναπαντοῦν τὴν περιφέρειαν ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΒ (πρό. 10)· ἡ ἐπιφάνεια τούτου τοῦ πολυγώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρόν του ΔΕ $+$ ΕΖ $+$ ΖΗ $+$ κ. τ. λ. ἐπὶ ½ΑΓ (πρό. 7): ἀλλ' ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου εἶναι μεγαλητέρα τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας, διότι τὴν περικυκλοῖ πανταχόθεν· λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου ΔΕΖΗ, κ.τ.λ., εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ ½ ΑΓ × περ. ΑΓ, τὸ ὁποῖον γινόμενον, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι τὸ μέτρον τοῦ κύκλου τῆς ἀκτῖνος ΓΒ· λοιπὸν τὸ πολύγωνον ἤθελεν εἶναι μεγαλήτερον τοῦ κύκλου· ἀλλ' ἐξ ἐναντίας εἶναι μικρότερον ὡς περιεχόμενον· ἀδύνατον λοιπὸν ½ ΓΑ × περιφ. ΓΑ νὰ ἦναι μεγαλήτερον ἀπὸ ἐπιφ. ΓΑ, ἤ, μὲ ἄλλας λέξεις, ἀδύνατον ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνός του νὰ μετρῇ κύκλον μεγαλήτερον.

Λέγω δεύτερον ὅτι τὸ ἴδιον γινόμενον δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι τὸ μέτρον κύκλου μικροτέρου· καί, διὰ νὰ μὴ ἀλλάξω σχῆμα, ὑποθέτω ὅτι ὁ λόγος εἶναι περὶ τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΒ. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ½ ΓΒ × περιφ. ΓΒ δὲν ἠμπορεῖ νὰ μετρῇ κύκλον μικρότερον, παραδείγματος χάριν, τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΑ. Τῷ ὄντι, ἔςω εἰ δυνατόν, ½ ΓΒ × περιφ. ΓΒ = ἐπιφ. ΓΑ.

Γενομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς ὡς ἀνωτέρω, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου ΔΕΖΗ, κ. τ. λ. θέλει ἔχει μέτρον (ΔΕ + ΕΖ + κ.τ.λ.) × ½ ΓΑ· ἀλλ' ἡ περίμετρος ΔΕ + ΕΖ + ΖΗ + κ. τ. λ. εἶναι μικροτέρα ἀπὸ περιφ. ΓΒ ἥτις τὴν περικυκλόνει πανταχόθεν· λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου εἶναι μικρότερον ἀπὸ ½ ΓΑ × περιφ. ΓΒ, καὶ πολὺ περισσότερον ἀπὸ ½ ΓΒ × περιφ. ΓΒ. Η τελευταία αὕτη ποσότης, ἐξ ὑποθέσεως, μετρεῖ τὸν κύκλον τῆς ἀκτῖνος ΓΑ· λοιπὸν τὸ πολύγωνον ἤθελεν εἶναι μικρότερον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, ὅπερ ἄτοπον· ἀδύνατον λοιπὸν ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνός του, νὰ ἦναι τὸ μέτρον κύκλου μικροτέρου.

Λοιπὸν τέλος ἡ περιφέρεια ἑνὸς κύκλου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνός του εἶναι τὸ μέτρον τούτου τοῦ ἰδίου κύκλου.

Πόρισμα Α'. Η ἐπιφάνεια ἑνὸς τομέως εἶναι ἴση μὲ τὸ τόξον τούτου τοῦ τομέως πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος. σχ. 168.

Διότι ὁ τομεὺς ΑΓΒ εἶναι πρὸς τὸν ὅλον κύκλον ὡς τὸ τόξον ΑΜΒ πρὸς τὴν ὅλην περιφέρειαν ΑΒΔ (17, 2) ἢ ὡς $\text{ΑΜΒ} \times \frac{1}{2}\text{ΑΓ}$ πρὸς $\text{ΑΒΔ} \times \frac{1}{2}\text{ΑΓ}$. Ἀλλ' ὁ ὅλος κύκλος $= \text{ΑΒΔ} \times \frac{1}{2}\text{ΑΓ}$· λοιπὸν ὁ τομεὺς ΑΓΒ ἔχει μέτρον $\text{ΑΜΒ} \times \frac{1}{2}\text{ΑΓ}$.

Πόρισμα Β'. Ἂς καλέσωμεν π τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι ἡ μονάς· ἐπειδὴ αἱ περιφέρειαι εἶναι ὡς αἱ ἀκτῖνες ἢ ὡς αἱ διάμετροι, ἠμποροῦμεν νὰ σχηματίσωμεν ταύτην τὴν ἀναλογίαν· ἡ διάμετρος 1 εἶναι πρὸς τὴν περιφέρειάν της π ὡς ἡ διάμετρος 2ΓΑ πρὸς τὴν περιφέρειαν ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΑ. εἰς τρόπον ὥστε $1 : \pi :: 2\text{ΓΑ} : \text{περιφ. ΓΑ}$· λοιπὸν $\text{περιφ. ΓΑ} = 2\pi \times \text{ΓΑ}$· πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέρη ἐπὶ $\frac{1}{2}\text{ΓΑ}$, ἔχομεν $\frac{1}{2}\text{ΓΑ} \times \text{περιφ. ΓΑ} = \pi \times \overline{\text{ΓΑ}}^2$, ἢ $\text{ἐπιφ. ΓΑ} = \pi . \overline{\text{ΓΑ}}^2$. λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς κύκλου εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνός του ἐπὶ τοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ π, ὅστις παριστάνει τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι 1, ἢ τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον. σχ. 165.

Παρομοίως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου ὅστις ἔχει ἀκτῖνα ΟΒ θέλει εἶναι ἴση μὲ $\pi \times \overline{\text{ΟΒ}}^2$. Τώρα $\pi \times \overline{\text{ΓΑ}}^2 : \pi \times \overline{\text{ΟΒ}}^2 :: \overline{\text{ΓΑ}}^2 : \overline{\text{ΟΒ}}^2$· λοιπὸν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν κύκλων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων των, τὸ ὁποῖον συμφωνεῖ μὲ τὸ προλαβὸν θεώρημα.

Σχόλιον. Εἴπομεν ἤδη ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν τετραγώτου ἴσου κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν μὲ κύκλον γνωστῆς ἀκτῖνος. Τώρα ἐδείξαμεν ὅτι ὁ κύκλος ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ κατασκευαζόμενον ὀρθογώνιον ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς ἀκτῖνος, καὶ τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο μετατρέπεται εἰς τετράγωνον ἐὰν ληφθῇ μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο του διαστάσεων (προβ. 6. βιβλ. 3). Οὕτως τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου ἄγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς περιφερείας ὅταν ἡ ἀκτὶς ἦναι γνωστή, καὶ πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ ἡ γνῶσις τοῦ λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον.

Ἕως τοῦ νῦν δὲν ἐστάθη δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ ὁ λόγος οὗτος παρὰ ὡς ἔγγιστα· πλὴν ἡ προσέγγισις τόσον μακρὰν προεκτάνθη, ὥστε ἡ γνῶσις τοῦ ἀκριβοῦς λόγου δὲν ἤθελεν ἔχει τὶ πλέον ἀπὸ τὴν τοῦ ὡς ἔγγιστα. Οὕτως τὸ ζήτημα τοῦτο, τὸ ὁποῖον τοσοῦτον ἐνησχόλησε τοὺς Γεωμέτρας ὅταν ὀλίγον ἦσαν γνωσταὶ αἱ μέθοδοι τῆς προσεγγίσεως, ἐξωρίσθη τώρα καὶ κατετάχθη μεταξὺ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν περιττῶν ζητημάτων εἰς τὰ ὁποῖα εἰς ἄλλους δὲν εἶναι συγχωρημένον νὰ ἐνασχολῶνται, παρὰ εἰς τοὺς μόλις τὰς πρώτας ἰδέας τῆς Γεωμετρίας ἔχοντας.

Ὁ Ἀρχιμήδης ἔδειξεν ὅτι ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον περιέχεται μεταξὺ $3\frac{10}{70}$ καὶ $3\frac{10}{71}$· οὕτως $3\frac{1}{7}$ ἢ $\frac{22}{7}$ εἶναι πολλὰ προσεγγίζουσα τιμὴ εἰς τὸν ἀριθμὸν τὸν ὁποῖον ἐπαραστήσαμεν διὰ π, καὶ ἡ πρώτη αὕτη προσέγγισις εἶναι κατὰ πολλὰ ἐν χρήσει διὰ τὴν ἁπλότητά της. Ὁ Μέτιος εὗρε διὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πολὺ πλέον προσεγγίζουσαν τιμὴν $\frac{355}{113}$. Τέλος ἡ τιμὴ τοῦ π, ἀναπτυχθεῖσα μέχρι τάξεως τινὸς δεκαδικῶν, εὑρέθη ὑπὸ ἄλλων ὑπολογιστῶν (calculateurs) 3,1415926535897932 κ. τ. λ. καὶ ἔλαβον τὴν ὑπομονὴν νὰ προεκτείνουν τὰ δεκαδικὰ ταῦτα μέχρι τοῦ ἑκατοστοῦ εἰκοστοῦ ἑβδόμου ἢ μέχρι τοῦ ἑκατοςοῦ τεσσαρακοςοῦ. Φανερὸν ὅτι τοιαύτη προσέγγισις ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν ἀλήθειαν, καὶ ἄλλως δὲν γνωρίζομεν τὰς ῥίζας τῶν ἀτελῶν δυνάμεων.

Εἰς τὰ ἀκόλουθα προβλήματα θέλομεν ἐξηγήσει δύο ἀπὸ τὰς ἁπλουςέρας ςοιχειώδεις μεθόδους διὰ τὴν εὕρεσιν τούτων τῶν προσεγγίσεων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Δεδομένων τῶν ἐπιφανειῶν κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου καὶ ὁμοίου περιγεγραμμένου, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν κανονικῶν πολυγώνων ἐγγεγραμμένου τε καὶ περιγεγραμμένου διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν.

Εςω ΑΒ ἡ πλευρὰ τοῦ δεδομένου ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, ΕΖ παράλληλος τῇ ΑΒ, ἡ τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου, Γ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἡ χορδὴ ΑΜ, καὶ ἀχθῶσιν αἱ ἐφαπτόμεναι ΑΠ, ΒΚ, ἡ χορδὴ ΑΜ θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν, καὶ ΠΚ διπλασία τῆς ΠΜ θέλει εἶναι ἡ τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου πολυγώνου (πρό. 6). Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ ἡ αὐτὴ κατασκευὴ θέλει ἔχει χώραν εἰς τὰς διαφόρους ἴσας γωνίας μὲ τὴν ΑΓΜ, ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν μόνον τὴν γωνίαν ΑΓΜ, καὶ τὰ εἰς αὐτὴν περιεχόμενα τρίγωνα θέλουν εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὅλα πολύγωνα. Εςω Α ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου τοῦ ὁποίου ΑΒ εἶναι ἡ πλευρὰ, Β ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου, Α' ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου τοῦ ὁποίου ΑΜ εἶνα ἡ πλευρὰ, Β' ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου· Α καὶ Β εἶναι γνωςὰ, καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῶσι Α' καὶ Β'. σχ. 169.

1.ον Τὰ τρίγωνα ΑΓΔ, ΑΓΜ τῶν ὁποίων Α εἶναι κοινὴ κορυφὴ, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις των ΓΔ, ΓΜ·

ἄλλως τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὡς τὰ πολύγωνα Α καὶ Α', διότι εἶναι ὅμοια μέρη τούτων, καὶ τὰ ὅμοια μέρη δύο ποσοτήτων εἶναι ὡς αὗται αἱ ποσότητες· λοιπὸν Α: Α'::ΓΔ:ΓΜ. Τὰ τρίγωνα ΓΑΜ, ΓΜΕ, τῶν ὁποίων Μ εἶναι κοινὴ κορυφή, εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις των ΓΑ, ΓΕ· τὰ ἴδια τρίγωνα εἶναι ὡς τὰ πολύγωνα Α' καὶ Β διὰ τὸν εἰρημένον λόγον· λοιπὸν Α':Β::ΓΑ:ΓΕ. Ἀλλ' ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ΑΔ, ΜΕ, ἔχομεν ΓΔ: ΓΜ::ΓΑ:ΓΕ· λοιπὸν Α:Α'::Α':Β· λοιπὸν τὸ πολύγον Α' ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ζητουμένων, εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύο γνωστῶν πολυγώνων Α καὶ Β, καὶ ἑπομένως ἔχομεν $A' = \sqrt{(A \times B)}$.

2.ον Ἐξ αἰτίας τοῦ κοινοῦ ὕψους ΓΜ, τὸ τρίγωνον ΓΠΜ εἶναι πρὸς τὸ τρίγωνον ΓΠΕ ὡς ΠΜ πρὸς ΠΕ· ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ΓΠ τέμνει δίχα τὴν γωνίαν ΜΓΕ, ἔχομεν (17, 3) ΠΜ:ΠΕ::ΓΜ:ΓΕ::ΓΔ:ΓΑ::Α:Α'· λοιπὸν ΓΠΜ:ΓΠΕ::Α:Α', καὶ ἀκολούθως, ΓΠΜ:ΓΠΜ + ΓΠΕ, ἢ ΓΜΕ::Α:Α + Α'. Ἀλλὰ ΓΜΠΑ ἢ 2ΓΠΜ καὶ ΓΜΕ ὡς ὅμοια μέρη τῶν πολυγώνων Β' καὶ Β εἶναι ἀναμεταξύ των ὡς τὰ ἴδια πολύγωνα· λοιπὸν Β':Β::2Α: Α + Α'. Ἤδη ἐπροσδιωρίσθη Α'· διὰ τῆς νέας ταύτης ἀναλογίας προσδιορίζεται Β', καὶ ἔχομεν $B' = \frac{2A \times B}{A + A'}$. λοιπὸν διὰ μέσου τῶν πολυγώνων Α καὶ Β εὔκολον εἶναι νὰ εὑρεθῶσι τὰ πολύγωνα Α' καὶ Β' τὰ ὁποῖα ἔχουν διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὡς ἔγγιστα λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον.

Εςω ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου = 1, ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου θέλει εἶναι $\sqrt{2}$ (πρό. 3), ἡ τοῦ περιγεγραμμένου ἴση μὲ τὴν διάμετρον 2· λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου = 2, καὶ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου = 4. Τώρα ἐὰν κάμωμεν Α = 2 καὶ Β = 4, θέλομεν εὕρη διὰ τοῦ προλαβόντος προβλήματος τὸ ἐγγεγραμμένον ὀκτάγωνον $A' = \sqrt{8} =$ 2,8284271, καὶ τὸ περιγεγραμμένον $B' = \frac{16}{2+\sqrt{8}} =$ 3,3137085. Γνωρίζοντες οὕτω τὸ ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον ὀκτάγωνον, εὑρίσκομεν διὰ μέσου τούτων τὰ πολύγωνα διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν· πρέπει ἐκ νέου νὰ ὑποθέσωμεν Α = 2,8284271, Β = 3,3137085, καὶ θέλομεν ἔχει

$$A' = \sqrt{(A \times B)} = 3{,}0614674, \text{ καὶ } B' = \frac{2A \times B}{A + A'} =$$

3,1825979. Ἀκολούθως διὰ τῶν πολυγώνων τούτων προσδιορίζομεν τὰ 32 πλευρῶν, καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω ἕως οὗ νὰ μὴ ὑπάρχῃ πλέον διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου πολυγώνου, τοὐλάχιςον εἰς τὴν τάξιν τῶν δεκαδικῶν εἰς τὴν ὁποίαν μένομεν, καὶ ἥτις εἰς τοῦτο τὸ παράδειγμα εἶναι ἡ ἑβδόμη. Φθάσαντες εἰς ταύτην τὴν ςιγμὴν λέγομεν οὕτως: ὁ κύκλος πάντοτε περιέχεται μεταξὺ τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου πολυγώνου· ἐὰν λοιπὸν ταῦτα δὲν διαφέρουν ἀπ' ἀλλήλων μέχρι τάξεως τινὸς δεκαδικῶν, ὁ κύκλος βέβαια δὲν θέλει διαφέρει ἀπὸ ταῦτα μέχρι τῆς ἰδίας τάξεως. Οὕτω ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν τὸ τελευταῖον ἐξαγόμενον διὰ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου.

Ἰδοὺ ὁ ὑπολογισμὸς τούτων τῶν πολυγώνων προεκτανθεὶς ἕως οὗ νὰ μὴ διαφέρουν πλέον εἰς τὴν ἑβδόμην δεκαδικὴν τάξιν.

Αριθμὸς τῶν πλευρῶν.	Εγγεγραμμένον πολύγωνον.	Περιγεγραμμένον πολύγωνον.
4	2,0000000	4,0000000
8	2,8284271	3,3137085
16	3,0614674	3,1825979
32	3,3214451	3,1517249
64	3,1365485	3,1441184
128	3,1403311	3,1422236
256	3,1412772	3,1417504
512	3,1415138	3,1416321
1024	3,1415729	3,1416025
2048	3,1415877	3,1415951
4096	3,1415914	3,1415933
8192	3,1415923	3,1415928
16384	3,1415925	3,1415927
32768	3,1415926	3,1415926

Εντεῦθεν συνάγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου = 3,1415926. Δυνατὸν νὰ ἀμφιβάλλῃ τινὰς διὰ τὸ τελευταῖον δεκαδικὸν ἐξ αἰτίας τῶν σφαλμάτων τὰ ὁποῖα προέρχονται ἀπὸ τὰ παραβλεφθέντα μέρη· πλὴν ὁ ὑπολογισμὸς ἔγινε μὲ ἓν δεκαδικὸν περισσότερον, διὰ νὰ ἦμεθα βέβαιοι διὰ τὸ ἐξαγόμενον τὸ ὁποῖον εὑρήκαμεν μέχρι τοῦ τελευταίου δεκαδικοῦ ψηφίου.

Επειδὴ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἡμιπεριφέρειαν πολλασιασθεῖσαν ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος, οὔσης τῆς ἀκτῖνος 1, ἡ ἡμιπεριφέρεια εἶναι 3,1415926 ἢ τῆς διαμέτρου οὔσης 1, ἡ περιφέρεια εἶναι 3,1415926· λοιπὸν ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον ἀνωτέρω σημειωθεὶς διὰ π εἶναι = 3,1413926.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ΄.

ΛΗΜΜΑ.

Τὸ τρίγωνον ΓΑΒ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ἰσοσκελὲς ΔΓΕ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν γωνίαν Γ, καὶ τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΓΕ ἴση τῇ ΓΔ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ ΓΑ καὶ ΓΒ. Περιπλέον, ἐὰν ἡ γωνία ΓΑΒ ἦναι ὀρθή, ἡ φερομένη κάθετος ΓΖ ἐπὶ τῆς βάσεως τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς πλευρᾶς ΓΑ καὶ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν πλευρῶν ΓΑ, ΓΒ.

Διότι 1.ον ἐξ αἰτίας τῆς κοινῆς γωνίας Γ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι πρὸς τὸ ἰσοσκελὲς ΔΓΕ ὡς $A\Gamma \times \Gamma B$ πρὸς $\Delta\Gamma \times \Gamma E$ ἢ $\overline{\Delta\Gamma}^2$ (24, 3)· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα θέλουν εἶναι ἰσοδύναμα, ἐὰν $\overline{\Delta\Gamma}^2 = A\Gamma \times \Gamma B$, ἢ ἐὰν ΔΓ ἦναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ ΑΓ, ΓΒ. σχ. 170.

2.ον Ἐπειδὴ ἡ κάθετος ΓΗΖ τέμνει εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν ΑΓΒ, ἔχομεν (17, 3) $AH : HB :: A\Gamma : \Gamma B$, ὅθεν ἕπεται, ἐν συνθέσει, $AH : AH + HB$ ἢ $AB :: A\Gamma : A\Gamma + \Gamma B$· ἀλλὰ ΑΗ εἶναι πρὸς ΑΒ ὡς τὸ τρίγωνον ΑΓΗ πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΓΒ ἢ 2ΓΔΖ· ἄλλως, ἐὰν ἡ γωνία Α ἦναι ὀρθή, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΗ, ΓΔΖ, θέλουν εἶναι ὅμοια, καὶ θέλουν δώσει $A\Gamma H : \Gamma\Delta Z :: \overline{A\Gamma}^2$ $\overline{\Gamma Z}^2$· λοιπόν,

$$\overline{A\Gamma}^2 : 2\overline{\Gamma Z}^2 :: A\Gamma : A\Gamma + \Gamma B.$$

Ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ δεύτερος λόγος ἐπὶ ΑΓ, οἱ ἡγούμενοι ἀποβαίνουν ἴσοι, καὶ ἑπομένως $2\overline{\Gamma Z}^2 = A\Gamma \times (A\Gamma + \Gamma B)$, ἢ $\overline{\Gamma Z}^2 = A\Gamma \times \frac{(A\Gamma + \Gamma B)}{2}$· λοιπὸν 2.ον ἐὰν ἡ γωνία Α ἦναι ὀρθή, ἡ κάθετος ΓΖ θέλει εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς πλευρᾶς ΑΓ καὶ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν πλευρῶν ΑΓ, καὶ ΓΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙϚʹ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Νὰ εὕρωμεν κύκλον διαφέροντα ὅσον θέλομεν κανονικοῦ δεδομένου πολυγώνου.

Εςω, παραδείγματος χάριν, τὸ τετράγωνον ΒΜΝΠ· ἀπὸ τὸ κέντρον Γ ἂς κατεβάσωμεν τὴν κάθετον ΓΑ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΜΒ, καὶ ἂς ἑνώσωμεν ΓΒ. σχ. 171.

Ο μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΑ γραφόμενος κύκλος εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τετράγωνον, ὁ δὲ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΒ περιγεγραμμένος εἰς τὸ ἴδιον· ὁ πρῶτος εἶναι μικρότερος τοῦ τετραγώνου, ὁ δεύτερος μεγαλήτερος· ἀλλὰ πρόκειται νὰ πλησιάσωμεν ταῦτα τὰ ὅρια.

Ας λάβωμεν ἑκάστην τῶν ΓΔ, ΓΕ ἴσην μὲ τὴν μέσην ἀνάλογον μεταξὺ ΓΑ καὶ ΓΒ, καὶ ἂς ἑνώσωμεν ΕΔ· τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΓΔΕ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ τρίγωνον ΓΑΒ (προ. 15)· ἂς κάμωμεν τὸ αὐτὸ δι' ἑκάςην τῶν ὀκτὼ γωνιῶν τοῦ τετραγώνου, θέλομεν σχηματίσει οὕτω κανονικὸν ὀκτάγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ τετράγωνον ΒΜΝΠ. Ο γραφόμενος κύκλος μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΖ, μέσην ἀνάλογον μεταξὺ ΓΑ καὶ $\frac{\Gamma A + \Gamma B}{2}$, εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ὀκτάγωνον, ὁ δὲ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΔ περιγεγραμμένος· οὕτως ὁ πρῶτος θέλει εἶναι μικρότερος τοῦ δεδομένου τετραγώνου, ὁ δεύτερος μεγαλήτερος· ἀλλὰ τὰ δύο ταῦτα ὅρια εἶναι πλησιέςερα μεταξύ των παρ' ὅτι ἦσαν τὰ δύο πρῶτα· διότι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν ἀκτίνων των ἥτις εἶναι δ' ὅλα των τὰ σημεῖα ἡ αὐτὴ, εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς μεταξὺ τῶν ἀκτίνων τῶν πρώτων.

Εὰν τρέψωμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΔΖ εἰς ἰσδύναμον ἰσοσκελὲς, θέλομεν σχηματίσει κανονικὸν πολύγωνον δεκαὲξ πλευρῶν, ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον τετράγωνον. Ο ἐγγεγραμμένος κύκλος εἰς τοῦτο τὸ πολύγωνον εἶναι μικρότερος τοῦ τετραγώνου, ὁ δὲ περιγεγραμμένος μεγαλήτερος· ἀλλὰ τὰ δύο ταῦτα ὅρια εἶναι πλησιέστερα παρὰ τὰ πρῶτα. Ημποροῦμεν νὰ ἐξακολουθήσωμεν οὕτως ἕως οὗ ὁ λόγος μεταξὺ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τῆς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου νὰ διαφέρῃ ὅσον θέλομεν ἀπὸ τὸν τῆς ἰσότητος. Τότε οἱ δύο κύκλοι ἠμποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἰσοδύναμοι μὲ τὸ δεδομένον τετράγωνον.

Σχόλιον. Ἰδοὺ εἰς τί ἄγεται ἡ ζήτησις τῶν διαδοχικῶν ἀκτίνων· ἔστω α ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς ἓν τῶν εὑρεθέντων πολυγώνων, β ἡ τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ ἴδιον πολύγωνον· ἔστωσαν α' καὶ β' αἱ ὅμοιαι ἀκτῖνες διὰ τὸ ἀκόλουθον πολύγωνον τὸ ὁποῖον ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν. Κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα, β' εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ α καὶ β, καὶ α' μεταξὺ α καὶ $\frac{\alpha+\beta}{2}$· εἰς τρόπον ὥστε $\beta' = \sqrt{(\alpha\times\beta)}$, καὶ $\alpha' = \sqrt{\left(\alpha\times\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$· ἐὰν λοιπὸν αἱ ἀκτῖνες α καὶ β ἑνὸς πολυγώνου ἦναι γνωσταί, εὐκόλως προσδιορίζομεν τὰς ἀκτῖνας τοῦ ἀκολούθου: καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω ἕως οὗ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν δύο ἀκτίνων νὰ γένῃ ἀναιπαίσθητος· Τότε ἡ μία ἢ ἡ ἄλλη τούτων τῶν ἀκτίνων θέλει εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ ἰσοδυνάμου κύκλου μὲ τὸ τετράγωνον ἢ μὲ τὸ προτεθὲν πολύγωνον.

Η μέθοδος αὕτη εὔκολον εἶναι νὰ βαλθῇ εἰς πρᾶξιν διὰ γραμμῶν, διότι ἄγεται εἰς τὴν εὕρεσιν μέσων διαδοχικῶν ἀναλόγων μεταξὺ γνωστῶν γραμμῶν· ἀλλ' ἡ ἐφαρμογή της εἰς ἀριθμοὺς ἀποβαίνει ἐπιτυχεστέρα, καὶ χορηγεῖ μίαν τῶν ἐπιτηδειοτέρων ἀπὸ ὅσας ἡ στοιχειώδης Γεωμετρία δύναται νὰ δώσῃ μεθόδων πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὡς ἔγγιςα λόγου τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον: Ἐςω ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου = 2, ἡ πρώτη ἐγγεγραμμένη ἀκτὶς ΓΑ θέλει εἶναι 1, καὶ ἡ πρώτη περιγεγραμμένη ΓΒ, $\sqrt{2}$ ἢ 1,4142136. Κάμνοντες λοιπὸν $\alpha = 1$, $\beta =$ 1,4142136, εὑρίσκομεν $\beta' =$ 1,1892071, καὶ $\alpha' =$ 1,0986841. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι χρησιμεύουν διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἀκολούθων κατὰ τὸν τῆς συνεχείας νόμον.

Ἰδοὺ τὰ ἐξαγόμενα τοῦ ὑπολογισμοῦ γενομένου μέχρι ἑπτὰ ἢ ὀκτὼ ψηφίων διὰ τῶν κοινῶν λογαρίθμων.

Ακτῖνες τῶν περιγεγραμμένων κύκλων.	Ακτῖνες τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων.
1,4142136	1,0000000.
1,8992071	1,0986841.
1,1430500	1,1210863.
1,1320149	1,1265639.
1,1292862	1,1279257.
1,1286063.	1,1282657.

Τώρα ὁποῦ ἡ πρώτη ἡμίσεια τῶν ψηφίων εἶναι ἡ αὐτὴ καὶ εἰς τὰ δύο μέρη, ἠμποροῦμεν ἀντὶ τῶν μέσων γεωμετρικῶν νὰ λάβωμεν τοὺς μέσους ἀριθμητικοὺς, οἵτινες δὲν διαφέρουν ἀπὸ τοὺς γεωμετρικοὺς παρὰ εἰς τὰ ὕςερα δεκαδικά. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἡ ἐργασία ἐπιτέμνεται πολὺ, καὶ τὰ ἐξαγόμενα εἶναι.

1,1284360	1,1283508.
1,1283934	1,1283721.
1,1283827	1,1283774.
1,1283801	1,1283787.
1,1283794	1,1283791.
1,1283792	1,1283792.

Λοιπὸν 1,1283792 εἶναι περίπου ἡ ἀκτὶς τοῦ ἴσου κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν μὲ τὸ δεδομένον τετράγωνον κύκλου τοῦ ὁποίου τετραγώνου ἡ πλευρὰ εἶναι 2. Ἐντεῦθεν εὔκολον εἶναι νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον· διότι ἀπεδείχθη ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνός του πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ π· ἐὰν λοιπὸν διαιρέσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν 4 διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ 1,1283792, θέλομεν ἔχει τὴν τιμὴν τοῦ π, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν διὰ ταύτου τοῦ ὑπολογισμοῦ ἴσην μὲ 3,1415926 κ. τ. λ, ὡς τὴν εὕρομεν δι' ἄλλης μεθόδου.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΕΙΣ ΤΟ Δ'. ΒΙΒΛΙΟΝ.

ΟΡΙΣΜΟΙ.

Α'. Καλεῖται μέγιςον (maximum) ἡ μεγαλητέρα ποσότης ἀπὸ ὅλας τὰς ἄλλας τοῦ ἰδίου εἴδους· ἐλάχιςόν (minimum) ἡ μικροτέρα.

Οὕτως ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου εἶναι μέγιςόν τι μεταξὺ ὅλων τῶν γραμμῶν αἵτινες ἑνόνουν δύο σημεῖα τῆς περιφερείας, καὶ ἡ κάθετος εἶναι ἐλάχιςόν τι μεταξὺ ὅλων τῶν ἀπὸ δεδομένον σημεῖον εἰς δεδομένην εὐθεῖαν φερομένων εὐθειῶν.

Β'. Καλοῦνται σχήματα ἰσοπερίμετρα τὰ ἴσας περιμέτρους ἔχοντα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΠΡΩΤΗ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Μεταξὺ ὅλων τῶν τριγώνων τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ τῆς αὐτῆς περιμέτρου, τὸ μέγιςον εἶναι ἐκεῖνο εἰς τὸ ὁποῖον αἱ δύο ἀπροσδιόριςοι πλευραὶ εἶναι ἴσαι.