εἶναι ἴσον μὲ ταῦτον τὸν λόγον. Η πρώτη ἐργασία ἔδωκε διὰ πηλίκον 1· ἡ δευτέρα καὶ ὅλαι αἱ ἄλλαι ἐπ' ἄπειρον δίδουν 2: Οὕτως τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος κλάσμα εἶναι ....

$1 + \frac{1}{2}$

$+ \frac{1}{2}$

$+ \frac{1}{2}$

$+ \frac{1}{2}$

$+ \frac{1}{2} + $ κ. τ. λ. ἐπ' ἄπειρον.

Παραδείγματος χάριν, ἐὰν λογαριάσωμεν τοῦτο τὸ κλάσμα μέχρι τοῦ τετάρτου ὅρου, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ τιμή του εἶναι $1\frac{12}{29}$ ἢ $\frac{41}{29}$· εἰς τρόπον ὥστε ὁ ὡς ἔγγιστα λόγος τῆς διαγωνίου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου εἶναι :: 41 : 29. Ἠθέλαμεν εὕρη πλέον ὡς ἔγγιστα λόγον λογαριάζοντες μεγαλήτερον ἀριθμὸν ὅρων.

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'.

ΤΑ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΚΑΙ ΤΟ ΜΕΤΡΟΝ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

Τὸ πολύγωνον τὸ ὁποῖον ἐνταυτῷ εἶναι ἰσογώνιον καὶ ἰσόπλευρον, καλεῖται κανονικὸν πολύγωνον.

Υπάρχουν κανονικὰ πολύγωνα κάθε ἀριθμοῦ πλευρῶν. Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι τὸ κανονικὸν πολύγωνον τριῶν πλευρῶν· καὶ τὸ τετράγωνον, τὸ τῶν τεσσάρων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΠΡΩΤΗ.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Δύο κανονικὰ πολύγωνα τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ πλευρῶν εἶναι δύο ὅμοια σχήματα. σχ. 155.

Ἔςωσαν, παραδείγματος χάριν, τὰ δύο κανονικὰ ἑξάγωνα ΑΒΓΔΕΖ, αβγδεζ· τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὰ δύο σχήματα, ἰσοῦται δὲ μὲ ὀκτὼ γωνίας ὀρθὰς (28 1). Ἡ γωνία Α εἶναι τὸ ἕκτον μέρος τούτου τοῦ ἀθροίσματος ὡς καὶ ἡ γωνία α· λοιπὸν αἱ δύο γωνίαι Α καὶ α εἶναι ἴσαι· ἑπομένως τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰς γωνίας Β καὶ β, Γ καὶ γ κ.τ.λ.

Περιπλέον, ἐπειδὴ ἐκ τῆς φύσεως τῶν πολυγώνων τούτων αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ κ.τ.λ, εἶναι ἴσαι, καθὼς καὶ αἱ αβ, βγ, γδ κ. τ. λ. φανερὸν εἶναι ὅτι ἔχομεν τὰς ἀναλογίας ΑΒ : αϐ : : ΒΓ : βγ : : ΓΔ : γδ κ.τ.λ. λοιπὸν τὰ δύο σχήματα περὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος ἔχουν τὰς γωνίας ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· εἶναι λοιπὸν ὅμοια (ὁρ 2 ϐιβ. 3).

Πόρισμα. Αἱ περίμετροι δύο κανονικῶν πολυγώνων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ, αἱ δὲ ἐπιφάνειαί των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἰδίων τούτων πλευρῶν (27, 3).

Σχόλιον. Ἡ γωνία κανονικοῦ πολυγώνου προσδιορίζεται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν του ὡς ἡ τοῦ ἰσογωνίου πολυγώνου (20, 1).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Κάθε κανονικὸν πολύγωνον δύναται νὰ ἐγγραφθῇ, καὶ νὰ περιγραφθῇ εἰς τὸν κύκλον.

Ἔςω ΑΒΓΔΕ κ.τ.λ., τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος πολύγωνον· ἂς φαντασθῶμεν ὅτι διέρχεται περιφέρεια διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ· ἔςω Ο τὸ κέντρον της, καὶ ΟΠ ἡ φερομένη κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ· ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΛΟ, ΟΔ.

Τὰ τετράπλευρα ΟΠΓΔ, ΟΠΒΛ ἠμποροῦν νὰ ἐπιτεθῶσι: τῷ ὄντι ἡ πλευρὰ ΟΠ εἶναι κοινὴ, ἡ γωνία ΟΠΓ=ΟΠΒ, διότι εἶναι ὀρθαί· λοιπὸν ἡ πλευρὰ ΠΓ θέλει ἐφαρμόσει μὲ τὴν ἴσην της ΠΒ, καὶ τὸ σημεῖον Γ θέλει πέσει εἰς τὸ Β· περιπλέον ἐκ τῆς φύσεως τοῦ πολυγώνου, ἡ γωνία ΠΓΔ=ΠΒΛ, λοιπὸν ΓΔ θέλει λάβει τὴν διεύθυνσιν ΒΛ, καὶ ἐπειδὴ ΓΔ=ΒΛ, ἡ ϛιγμὴ Δ θέλει πέσει εἰς Λ, καὶ τὰ δύο τετράπλευρα ἐντελῶς θέλουν ἐφαρμόσει. Τὸ ἀπόϛημα λοιπὸν ΟΔ εἶναι ἴσον μὲ ΛΟ, καὶ ἐπομένως ἡ διερχομένη περιφέρεια διὰ τῶν τριῶν σημείων Λ, Β, Γ θέλει διέλθῃ ὡσαύτως διὰ τοῦ Δ: ἀλλὰ, δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ, δείξομεν ὅτι ἡ διερχομένη περιφέρεια διὰ τῶν τριῶν κορυφῶν Β, Γ, Δ, θέλει διέλθῃ διὰ τῆς ἀκολούθου κορυφῆς Ε, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· ἡ αὐτὴ λοιπὸν περιφέρεια ἡ διερχομένη διὰ τῶν σημείων Λ,Β,Γ, διέρχεται δι' ὅλων τῶν κορυφῶν τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου, καὶ τὸ πολύγωνον ἐγγράφεται εἰς ταύτην τὴν περιφέρειαν.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὸ δεύτερον μέρος τῆς προτάσεως, ἂς παρατηρήσωμεν ὅτι ὅλαι αἱ πλευραὶ ΛΒ,ΒΓ,ΓΔ, κ. τ. λ. ὡς πρὸς τὴν εἰρημένην περιφέρειαν εἶναι χορδαὶ ἴσαι· ἰσάκις λοιπὸν ἀπέχουσι τοῦ κέντρου (8, 2)· ἐὰν λοιπὸν ἐκ τῆς ϛιγμῆς Ο, ὡς ἐκ κέντρου, μὲ ἀκτῖνα τὴν ΟΠ, γραφθῇ περιφέρεια, αὕτη θέλει ἅπτεται τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ ἑκάϛης τῶν ἄλλων πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, εἰς τὴν ϛιγμὴν τῆς ἡμισείας, καὶ θέλει εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ πολύγωνον, ἢ τοῦτο περιγεγραμμένον εἰς ἐκείνην.

Σχόλιον Α΄. Η ϛιγμὴ Ο, κοινὸν κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου, ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὁμοίως ὡς τὸ κέντρον τοῦ πολυγώνου, καὶ διὰ τοῦτο καλεῖται γωνία εἰς τὸ κέντρον, ἡ γωνία ΛΟΒ σχηματιζομένη ἀπὸ τὰς δύο ἀκτῖνας ἠγμένας εἰς τὰ ἄκρα της ἰδίας πλευρᾶς ΑΒ.

Επειδὴ ὅλαι αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΒΓ κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι, φανερὸν εἶναι ὅτι ὅλαι αἱ γωνίαι εἰς τὸ κέντρον εἶναι ἴσαι, καὶ οὕτως ἡ τιμὴ ἑκάςης εὑρίσκεται διαιρουμένων τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου.

Σχόλιον Β΄. Διὰ τὴν ἐγγραφὴν κανονικοῦ πολυγώνου ἀριθμοῦ τινὸς πλευρῶν εἰς δεδομένην περιφέρειαν, ἄλλο δὲν ἀπαιτεῖται παρὰ ἡ διαίρεσις τῆς περιφερείας εἰς τόσα ἴσα μέρη ὅσας πλευρὰς πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ πολύγωνον· διότι, ὅταν τὰ τόξα ἦναι ἴσα, αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, κ. τ. λ. θέλουν εἶναι ἴσαι· τὰ τρίγωνα ΑΒΟ, ΒΟΓ, ΓΟΔ κ. τ. λ. ὡσαύτως θέλουν εἶναι ἴσα, ὡς ἰσόπλευρα μεταξύ των· λοιπὸν ὅλαι αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ, κ. τ. λ. θέλουν εἶναι ἴσαι· τὸ σχῆμα ἄρα ΑΒΓΔΕ, κ. τ. λ. θέλει ἦναι κανονικὸν πολύγωνον. σχ. 158.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ΄.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Νὰ ἐγγράψωμεν τετράγωνον εἰς δεδομένην περιφέρειαν.

Ας ἄξωμεν πρὸς ὀρθὰς δύο διαμέτρους ΑΓ, ΒΔ· ἅς ἑνώσωμεν τὰ ἄκρα Α,Β,Γ,Δ, καὶ τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον: διότι ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΟΒ, ΒΟΓ, κ. τ. λ. εἶναι ἴσαι, αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΒΓ, κ.τ.λ. εἶναι ἴσαι. σχ. 157.

Σχόλιον. Επειδὴ τὸ τρίγωνον ΒΟΓ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς, ἔχομεν (11, 3) ΒΓ:ΒΟ::$\sqrt{2}$:1· λοιπὸν ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι πρὸς τὴν ἀκτῖνα ὡς ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 πρὸς τὴν μονάδα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἰς δεδομένην περιφέρειαν.

Ἂς ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λυμένον, καὶ ἔςω AB μία πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου· ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες AO, OB, λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον AOB εἶνα ἰσόπλευρον. σχ. 158.

Διότι ἡ γωνία AOB εἶναι τὸ ἕκτον μέρος τεσσάρων ὀρθῶν· οὕτω λαμβάνοντες τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὡς μονάδα, ἔχομεν $AOB = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$· αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι ABO, BAO, τοῦ ἰδίου τριγώνου κάμνουν ὁμοῦ $2 - \frac{2}{3}$ ἢ $\frac{4}{3}$, καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι, ἀκολουθεῖ ὅτι ἑκάςη τούτων εἶναι $= \frac{2}{3}$· τὸ τρίγωνον λοιπὸν ABO εἶναι ἰσόπλευρον· ἡ ἀκτὶς ἄρα τοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι διὰ νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς δεδομένην περιφέρειαν, πρέπει νὰ φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ἑξάκις ἐπὶ τῆς περιφερείας, καὶ οὕτω θέλομεν ἐπιςρέψει εἰς τὴν ςιγμὴν ἐκ τῆς ὁποίας ἀνεχωρήσαμεν.

Ἀφ' οὗ ἐγγραφθῇ τὸ ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ, ἐὰν ἑνώσωμεν ἐναλλὰξ τὰς κορυφὰς τῶν γωνιῶν, θέλομεν σχηματίσει τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΓΕ.

Σχόλιον. Τὸ σχῆμα ΑΒΓΟ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἐνταὐτῷ ῥομβοειδὲς, διότι $AB = B\Gamma = \Gamma O = AO$· τὸ ἄθροισμα λοιπὸν (14, 3) τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων $\overline{A\Gamma}^2 + \overline{BO}^2$, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν, τὸ ὁποῖον εἶναι $4\overline{AB}^2$ ἢ $4\overline{BO}^2$· ἀφαιρεθέντος καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη $\overline{BO}^2$, μένει $\overline{A\Gamma}^2 = 3\overline{BO}^2$· λοιπὸν $\overline{A\Gamma}^2 : \overline{BO}^2 :: 3 : 1$, ἢ $A\Gamma : BO :: \sqrt{3} : 1$· λοιπὸν ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι πρὸς τὴν ἀκτῖνα ὡς ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 3 πρὸς τὴν μονάδα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Νὰ ἐγγράψωμεν εἰς κύκλον δεδομένον κανονικὸν δεκάγωνον, ἀκολούθως πεντάγωνον καὶ δεκαπεντάγωνον.

Διαιροῦμεν, τὴν ἀκτῖνα ΑΟ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον (προβ. 4 βιβ. 3) εἰς τὴν ςιγμὴν Μ, λαμβάνομεν τὴν χορδὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὸ μεῖζον τμῆμα ΟΜ· λέγω ὅτι ΑΒ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ φέρωμεν δεκάκις ἐπὶ τῆς περιφερείας. σχ. 159.

Διότι ἐπιζευγνύοντες τὴν ΜΒ, ἔχομεν ἐκ τῆς κατασκευῆς ΑΟ : ΟΜ : : ΟΜ : ΑΜ· ἤ, ἐπειδὴ ΑΒ = ΟΜ, ΑΟ : ΑΒ : : ΑΒ : ΑΜ· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΒΟ, ΑΜΒ ἔχουν μίαν κοινὴν γωνίαν Α περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων· λοιπὸν εἶναι ὅμοια (20, 3). Τὸ τρίγωνον ΟΑΒ εἶναι ἰσοσκελὲς· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΑΜΒ εἶναι παρομοίως, καὶ ἔχομεν ΑΒ = ΒΜ: ἄλλως ΑΒ = ΟΜ· λοιπὸν ὡσαύτως ΜΒ = ΟΜ· ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΜΟ εἶναι ἰσοσκελές.

Η ἐκτὸς γωνία ΑΜΒ εἶναι διπλασία τῆς ἐντὸς Ο (19, 1)· ἀλλ' ἡ γωνία ΑΜΒ = ΜΑΒ· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΟΑΒ εἶναι τοιοῦτον ὥςε ἑκάςη τῶν γωνιῶν πρὸς τὴν βάσιν, ΟΑΒ ἢ ΟΒΑ εἶναι διπλασία τῆς εἰς τὴν κορυφὴν Ο· ἄρα αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι κάμνουν ὁμοῦ πεντάκις τὴν γωνίαν Ο, καὶ οὕτως ἡ Ο εἶναι τὸ πέμπτον μέρος δύο ὀρθῶν, ἢ τὸ δέκατον τεσσάρων· ἄρα τὸ τόξον ΑΒ εἶναι τὸ δέκατον μέρος τῆς περιφερείας, καὶ ἡ χορδὴ ΑΒ εἶνα ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου.

Πόρισμα Α΄. Ἐὰν ἀνὰ δύο δύο ἑνώσωμεν τὰς κορυφὰς τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου, θέλομεν σχηματίσει τὸ κανονικὸν πεντάγωνον ΑΓΕΗΙ.

Πόρισμα Β΄. Οὔσης πάντοτε ΑΒ τῆς πλευρᾶς τοῦ δεκαγώνου, ἔστω ΔΑ ἡ πλευρὰ τοῦ ἑξαγώνου· τότε τὸ τόξον ΒΑ θέλει εἶναι, ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν, $\frac{1}{6} - \frac{1}{10}$ ἢ $\frac{1}{15}$· λοιπὸν ἡ χορδὴ ΒΑ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ δεκαπενταγώνου ἢ κανονικοῦ πολυγώνου 15 πλευρῶν. Βλέπομεν ἐνταυτῷ ὅτι τὸ τόξον ΓΑ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ΓΒ.

Σχόλιον. Ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, ἐὰν τὰ ὑποτεινόμενα ὑπὸ τῶν πλευρῶν του τόξα τμηθῶσι δίχα, καὶ ἐπιζευχθῶσιν αἱ χορδαὶ τῶν ἡμιτόξων, θέλει σχηματισθῆ νέον κανονικὸν πολύγωνον διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν: Οὕτως βλέπομεν ὅτι τὸ τετράγωνον ἠμπορεῖ νὰ χρησιμεύσῃ διὰ τὴν ἐγγραφὴν τῶν κανονικῶν πολυγώνων 8, 16, 32, κ. τ. λ. πλευρῶν. Ὡσαύτως τὸ ἑξάγωνον διὰ τὴν ἐγγραφὴν τῶν κανονικῶν πολυγώνων 12, 24, 48, κ. τ. λ. πλευρῶν· τὸ δεκαπεντάγωνον διὰ τὴν τῶν πολυγώνων 30, 60, 120 κ. τ. λ. πλευρῶν (1).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ΄.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Δεδομένου κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ΑΒΓΔ κ.τ.λ, νὰ περιγραφθῇ εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν ὅμοιον πολύγωνον. σχ. 160.

(1) Ἐπὶ πολὺ ἐνομίσθη ὅτι τὰ πολύγωνα ταῦτα ἦσαν τὰ μόνα τὰ ὁποῖα ἠμποροῦν νὰ ἐγγραφθοῦν διὰ τῶν διδασκαλιῶν τῆς στοιχειώδους Γεωμετρίας, ἤ, ὅπερ ταὐτόν, διὰ τῆς λύσεως τῶν πρωτοβαθμίων καὶ δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων: ἀλλ᾽ ὁ Κ. Gauss ἔδειξεν, εἰς σύγγραμμά τι ἐπιγραφόμενον Disquisitiones Arithmeticae, Lipsiae, 1801 ὅτι δυνατὸν νὰ ἐγγραφθῇ δι᾽ ὁμοίων μέσων τὸ κανονικὸν πολύγωνον δεκαεπτὰ πλευρῶν, καὶ ἐν γένει τὸ τῶν $2^{\nu}+1$ πλευρῶν, φθάνει μόνον $2^{\nu}+1$ νὰ ἦναι ἀριθμὸς πρῶτος. Ο. Σ.

Εἰς τὴν ςιγμὴν Τ, μέσον τοῦ τόξου ΑΒ, ἄς ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΗΘ ἥτις θέλει εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ (πρό. 10, 2)· ἄς γένῃ τὸ αὐτὸ εἰς τὸ μέσον ἑκάςου τῶν ἄλλων τόξων ΒΓ, ΓΔ, κ. τ. λ. αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται θέλουν σχηματίσει διὰ τῶν κοινῶν τομῶν των τὸ κανονικὸν περιγεγραμμένον πολύγωνον ΗΘΙΚ′ κ. τ. λ, ὅμοιον μὲ τὸ ἐγγεγραμμένον.

Εὐκόλως βλέπομεν κατὰ πρῶτον ὅτι τὰ τρία σημεῖα Ο, Β, Θ εἶναι ἐπ' εὐθείας· διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΤΘ, ΟΘΝ, ἔχουν κοινὴν τὴν ὑποτείνουσαν ΟΘ, καὶ τὴν πλευρὰν ΟΤ=ΟΝ· λοιπὸν εἶναι ἴσα (18, 1)· ἐπομένως ἡ γωνία ΤΟΘ=ΘΟΝ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ γραμμὴ ΟΘ διέρχεται διὰ τῆς ςιγμῆς Β μέσου τοῦ τόξου ΤΝ: διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ςιγμὴ Ι εἶναι ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΟΓ, κ. τ. λ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ΗΘ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ καὶ ΘΙ τῇ ΒΓ, ἡ γωνία ΗΘΙ=ΑΒΓ (26, 1)· ὡσαύτως ΘΙΚ′=ΒΓΔ, κ. τ. λ. λοιπὸν αἱ γωνίαι τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου εἶναι ἴσαι μὲ τὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου.

Περιπλέον, ἐξ αἰτίας τῶν αὐτῶν παραλλήλων, ἔχομεν ΗΘ : ΑΒ : : ΟΘ : ΟΒ, καὶ ΘΙ : ΒΓ : : ΟΘ : ΟΒ· λοιπὸν ΗΘ : ΑΒ : : ΘΙ : ΒΓ· ἀλλὰ ΑΒ=ΒΓ, ἄρα ΗΘ=ΘΙ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΘΙ=ΙΚ′, κ. τ. λ. ἄρα αἱ πλευραὶ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου εἶναι ἴσαι· δέδεικται δὲ ὅτι καὶ αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι· κανονικὸν ἄρα τὸ πολύγωνον τοῦτο καὶ ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ·

Πόρισμα Α′. Ἀντιςρόφως, ἐὰν ἐδίδετο τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον ΗΘΙΚ′, κ. τ. λ, καὶ ἔπρεπε διὰ μέσου τούτου νὰ διαγράψωμεν τὸ κανονικὸν ἐγγεγραμμένον ΑΒΓ, κ. τ. λ, βλέπομεν ὅτι ἀρκοῦσε νὰ ἄξωμεν εἰς τὰς κορυφὰς Η, Θ, Ι κ. τ. λ. τοῦ δεδεδομένου πολυγώνου τὰς γραμμὰς ΟΗ, ΟΘ κ. τ. λ, αἱ ὁποῖαι ἤθελον συναπαντήσει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰς ςιγμὰς Α, Β, Γ, κ. τ. λ.

νὰ ἑνώσωμεν ἀκολούθως ταύτας τὰς ϛιγμὰς διὰ τῶν χορδῶν ΑΒ, ΒΓ, κ. τ. λ. αἱ ὁποῖαι ἤθελον σχηματίσει τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον. Ημποροῦσαμεν ὡσαύτως, εἰς τὴν ἰδίαν περίϛασιν, νὰ ἑνώσωμεν ἁπλῶς τὰς ϛιγμὰς τῆς ἀφῆς, Τ, Ν, Π, κ. τ. λ. διὰ τῶν χορδῶν ΤΝ, ΝΠ, κ.τ.λ. καὶ ἐπίσης ἠθέλαμεν ἔχει ἐγγεγραμμένον πολύγωνον ὅμοιον τῷ περιγεγραμμένῳ.

Πόρισμα. Β'. Ημποροῦμεν ἄρα νὰ περιγράψωμεν εἰς δεδομένον κύκλον ὅσα κανονικὰ πολύγωνα ἠξεύρομεν νὰ ἐγγράψωμεν εἰς τοῦτον τὸν κύκλον, καὶ ἀντιϛρόφως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κανονικοῦ πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρόν του πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Εϛω, παραδείγματος χάριν, τὸ κανονικὸν πολύγωνον ΗΘΙΚ', κ.τ.λ. Τὸ τρίγωνον ΗΟΘ ἔχει διὰ μέτρον ΗΘ $\times$ ½ΟΓ, τὸ τρίγωνον ΟΘΙ ἔχει μέτρον ΘΙ $\times$ ½ΟΝ· ἀλλὰ ΟΝ $=$ ΟΓ· λοιπὸν τὰ δύο τρίγωνα ὁμοῦ ἔχουν μέτρον (ΗΘ $+$ ΘΙ) $\times$ ½ ΟΓ· ἐξακολουθοῦντες οὕτω διὰ τὰ ἄλλα τρίγωνα, βλέπομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν τριγώνων, ἢ τὸ ὅλον πολύγωνον ἔχει μέτρον τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων ΗΘ, ΘΙ, ΙΚ', κ. τ. λ. ἢ τὴν περίμετρόν του πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ ½ΟΓ. σχ. 160.

Σχόλιον. Η ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ΟΓ ἄλλό τι δὲν εἶναι παρὰ ἡ φερομένη κάθετος ἀπὸ τὸ κέντρον ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν· ἐνίοτε καλεῖται ἀπόϛημα τοῦ πολυγώνου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.
ΘΕΩΡΗΜΑ.

Αἱ περίμετροι τῶν κανονικῶν πολυγώνων τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ πλευρῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν περιγεγραμμένων κύκλων, καὶ ὁμοίως ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν ἐγγεγραμμένων· αἱ ἐπιφάνειαί των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἰδίων ἀκτίνων.

Εςω ΑΒ μία τῶν πλευρῶν τοῦ ἑνὸς τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος πολυγώνων, Ο τὸ κέντρον του, καὶ ἑπομένως ΟΑ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, καὶ ΟΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου· ἔςω παρομοίως αβ ἡ πλευρὰ ἑνὸς ἄλλου ὁμοίου πολυγώνου, Ο τὸ κέντρον του, οα καὶ οδ αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων περιγεγραμμένου τε καὶ ἐγγεγραμμένου. Αἱ περίμετροι τῶν δύο πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ αβ· ἀλλ' αἱ γωνίαι Α καὶ α εἶναι ἴσαι· διότι ἑκάςη εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας τοῦ πολυγώνου· τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰς γωνίας Β καὶ β· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΒΟ, αβο εἶναι ὅμοια, καθὼς καὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΟ, αδο· ἄρα ΑΒ : αβ : : ΑΟ : αο : : ΔΟ : δο· ἄρα αἱ περίμετροι τῶν πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες ΑΟ, αο, τῶν περιγεγραμμένων κύκλων, καὶ ὁμοίως ὡς αἱ ἀκτῖνες ΔΟ, δο τῶν ἐγγεγραμμένων.

Αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ἰδίων πολυγώνων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΑΒ, αβ· ἐπειδὴ δὲ τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν τούτων εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν περιγεγραμμένων κύκλων ΑΟ, αο, ἢ ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων ΟΔ, οδ· ἕπεται ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν κανονικῶν πολυγώνων τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ πλευρῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν περιγεγραμμένων κύκλων ΑΟ, αο, ἢ ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων ΟΔ, οδ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

ΛΗΜΜΑ.

Κάθε καμπύλη ἢ πολύγωνος γραμμὴ ἥτις περικυκλοῖ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου ἕως τοῦ ἄλλου τὴν κυρτὴν γραμμὴν ΑΜΒ εἶναι μακρυτέρα τῆς περικυκλουμένης γραμμῆς ΑΜΒ.

Εἴπομεν ἤδη ὅτι διὰ κυρτὴν γραμμὴν ἐννοοῦμεν καμπύλην ἢ πολύγωνον γραμμὴν, ἢ μέρος καμπύλην καὶ μέρος πολύγωνον, τοιαύτην ὥστε εὐθεῖα γραμμὴ νὰ μὴ ἠμπορῇ νὰ τὴν τέμνῃ εἰς περισσότερα ἀπὸ δύο σημεῖα. Ἐὰν ἡ γραμμὴ ΑΜΒ εἶχε μέρη εἰσέχοντα ἢ ἐσοχὰς, δὲν ἤθελεν εἶναι πλέον κυρτὴ, διότι εὔκολον εἶναι νὰ ἴδωμεν ὅτι εὐθεῖα γραμμὴ ἠμπόρει νὰ τὴν τέμνῃ εἰς περισσότερα ἀπὸ δύο σημεῖα. Τὰ τόξα τοῦ κύκλου εἶναι οὐσιωδῶς κυρτά· διότι εὐθεῖα γραμμὴ δὲν ἠμπορεῖ νὰ τέμνῃ τόξον κύκλου εἰς περισσότερα ἀπὸ δύο σημεῖα· ἀλλ' ἡ προκειμένη πρότασις ἐκτείνεται εἰς ὁποιανδήποτε γραμμὴν ἥτις πληροῖ εἰς τὴν ἀπαιτουμένην συνθήκην.

Τούτου τεθέντος, ἐὰν ἡ γραμμὴ ΑΜΒ δὲν ἦναι ἡ μικροτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς περικυκλούσας αὐτὴν, πρέπει μεταξὺ τούτων νὰ ὑπάρχῃ γραμμὴ βραχυτέρα ὅλων τῶν ἄλλων, ἡ ὁποία νὰ ἦναι μικροτέρα τῆς ΑΜΒ, ἢ τὸ πολὺ ἴση μὲ τὴν ΑΜΒ. Ἔςω ΑΓΔΕΒ ἡ περικυκλοῦσα αὐτὴ γραμμή· μεταξὺ τῶν δύο γραμμῶν ὅπου θέλομεν ἂς ἄξωμεν τὴν εὐθεῖαν ΠΚ, ἥτις νὰ μὴ συναπαντᾷ τὴν ΑΜΒ, ἢ τοὐλάχιςον νὰ ἅπτεται αὐτῆς· ἡ εὐθεῖα ΠΚ εἶναι βραχυτέρα τῆς ΠΓΔΕΚ· ἐὰν λοιπὸν ἀντὶ τῆς ΠΓΔΕΚ ἀντικαταςήσωμεν τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ΠΚ, θέλομεν ἔχει τὴν περικυκλοῦσαν ΑΠΚΒ βραχυτέραν τῆς ΑΠΔΚΒ. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, αὐτὴ πρέπει νὰ ἦναι βραχυτέρα ἀπὸ ὅλας· λοιπὸν ἡ ὑπόθεσις δὲν ἠμπορεῖ νὰ ὑπάρξῃ· λοιπὸν ὅλαι αἱ περικυκλοῦσαι γραμμαὶ εἶναι μακρύτεραι τῆς ΑΜΒ. σχ. 162.

Σχόλιον. Μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον ἠθέλαμεν δείξει ὅτι μία κυρτὴ καὶ πανταχόθεν κεκλεισμένη γραμμὴ ΑΜΒ, εἶναι βραχυτέρα κάθε γραμμῆς ἥτις ἤθελε τὴν περικυκλοῖ ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη, εἴτε ἡ περικυκλοῦσα ΖΗΘ ἅπτεται τῆς ΑΜΒ εἰς ἓν ἢ περισσότερα σημεῖα, εἴτε δὲν ἔχει κἀνὲν κοινὸν σημεῖον μὲ αὐτήν. (1) σχ. 163.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

ΛΗΜΜΑ.

Δεδομένων δύο συγκεντρικῶν περιφερειῶν, δυνατὸν εἶναι πάντοτε νὰ ἐγγραφθῇ εἰς τὴν μεγαλητέραν κανονικὸν πολύγωνον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ μὴ συναπαντῶσι τὴν μικροτέραν, καὶ ὡσαύτως νὰ περιγραφθῇ εἰς τὴν μικροτέραν κανονικὸν πολύγωνον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ μὴ συναπαντῶσι τὴν μεγαλητέραν· εἰς τρόπον ὥστε καὶ εἰς τὰς δύο περιστάσεις αἱ πλευραὶ τοῦ γεγραμμένου πολυγώνου νὰ περικλείωνται μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν.

Ἔστωσαν ΓΑ, ΓΒ αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο δεδομένων περιφερειῶν· εἰς τὴν στιγμὴν Α ἂς ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΔΕ περατουμένη εἰς τὴν μεγάλην περιφέρειαν εἰς Δ καὶ Ε: ἂς ἐγγραφθῇ εἰς τὴν μεγαλητέραν περιφέρειαν ἓν ἐκ τῶν τῶν κανονικῶν πολυγώνων ὅσα εἶναι δυνατὸν νὰ ἐγγραφθῶσι διὰ τῶν προηγουμένων προβλημάτων· ἀκολούθως ἂς τμηθῶσι δίχα τὰ ὑποτεινόμενα ὑπὸ τῶν πλευρῶν τόξα, καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ τῶν ἡμιτόξων· οὕτω θέλει σχηματισθῇ κανονικὸν πολύγωνον διπλασίου ἀριθμοῦ πλευ-

---

(1) Δὲν πρέπει νὰ θαυμάζῃ τινὰς ἐὰν εἰς τὴν Γεωμετρίαν ἀπαντᾷ ἀποδείξεις ἐκείνων τῶν ἀληθειῶν τὰς ὁποίας οἱ μόνοι τοῦ κοινοῦ αἰσθήματος ἐστερημένοι ἠμποροῦν νὰ ἀρνηθοῦν. Ὁ Εὐκλείδης ἠναγκάζετο νὰ εὑρίσκῃ ἀποδείξεις τῶν τοιούτων ἀληθειῶν διὰ νὰ καταπείθῃ τοὺς πεισματώδεις ἐκείνους σοφιστὰς οἱ ὁποῖοι ἐνόμιζον δόξαν τους νὰ ἐναντιόνωνται καὶ εἰς αὐτὰς τὰς αὐτοφανεῖς ἀληθείας. Τίς, παραδείγματος χάριν, δὲν εἶναι ἐσωτερικῶς πεπεισμένος ὅτι τὸ περιέχον δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι μικρότερον τοῦ περιεχομένου; καὶ μ' ὅλον τοῦτο εἶναι χρεία ἀποδείξεως διὰ τοὺς ἀρνουμένους τοιαύτην ἀλήθειαν ἤγουν τοὺς στερημένους τοῦ κοινοῦ αἰσθήματος· ἀγκαλὰ αἱ τοιούτου εἴδους ἀλήθειαι μᾶλλον σκοτίζονται ἀπὸ τὰς ἀποδείξεις παρ' ὅ,τι διασαφίζονται. — Ο. Μ.

ρῶν. Ἂς συνεχισθῇ ἡ διχοτομὴ τῶν τόξων ἕως οὗ νὰ προκύψῃ πολύγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ νὰ ὑποτείνῃ τόξον μικρότερον τοῦ ΔΒΕ. Ἔϛω ΜΒΝ τὸ τόξον τοῦτο (τοῦ ὁποίου ἡ ϛιγμὴ τῆς ἡμισείας ὑποτίθεται εἰς Β)· φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ χορδὴ ΜΝ θέλει ἀπέχει περισσότερον τοῦ κέντρου παρὰ τὴν ΔΕ, καὶ οὕτω τὸ κανονικὸν πολύγωνον τοῦ ὁποίου ΜΝ εἶναι ἡ πλευρὰ, δὲν ἠμπορεῖ νὰ συναπαντήσῃ τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας ΓΛ εἶναι ἡ ἀκτίς. σχ. 164.

Τῶν αὐτῶν κειμένων, ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΓΜ, ΓΝ αἵτινες συναπαντοῦν τὴν ἐφαπτομένην ΔΕ εἰς Π καὶ Κ· ΠΚ θέλει εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου εἰς τὴν μικρὰν περιφέρειαν, ὁμοίου μὲ τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν μεγάλην, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ΜΝ. Τώρα φανερὸν εἶναι ὅτι τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν τὴν ΠΚ, δὲν ἠμπορεῖ νὰ συναπαντήσῃ τὴν μεγάλην περιφέρειαν, διότι ΓΠ εἶναι μικροτέρα τῆς ΓΜ.

Διὰ τῆς αὐτῆς λοιπὸν κατασκευῆς ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν κανονικὸν πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν μεγάλην περιφέρειαν, καὶ ὅμοιον περιγεγραμμένον εἰς τὴν μικρὰν πολύγωνον, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν τὰς πλευράς των περιεχομένας μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν.

Σχόλιον. Ἐὰν ἔχωμεν δύο συγκεντρικοὺς τομεῖς ΖΓΗ, ΙΓΘ, ἠμποροῦμεν παρομοίως νὰ ἐγγράψωμεν εἰς τὸν μεγαλήτερον μερίδα κανονικοῦ πολυγώνου, ἢ νὰ περιγράψωμεν εἰς τὸν μικρότερον μερίδα ὁμοίου πολυγώνου, εἰς τρόπον ὥϛε αἱ περίμετροι τῶν δύο πολυγώνων νὰ περιέχωνται μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν: ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ τόξον ΖΒΗ διαδοχικῶς εἰς 2,4,8,16 κ.τ.λ. ἴσα μέρη ἕως οὗ νὰ φθάσωμεν εἰς μέρος μικρότερον τοῦ ΔΒΕ.

Ἐνταῦθα καλοῦμεν μερίδα κανονικοῦ πολυγώνου τὸ περατούμενον σχῆμα ἀπὸ σειρὰν ἴσων χορδῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸ τόξον ΖΗ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου ἕως τοῦ ἄλλου.

Η μερὶς αὕτη ἔχει τὰς ἀρχικὰς ἰδιότητας τῶν κανονικῶν πολυγώνων, ἔχει τὰς γωνίας ἴσας καὶ τὰς πλευρὰς ἴσας, εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἐγγράψιμος καὶ περιγράψιμος εἰς τὸν κύκλον· Μ' ὅλον τοῦτο δὲν κάμνει μέρος ἑνὸς κυρίως κανονικοῦ πολυγώνου, παρὰ ὁ σάκις τὸ ὑποτεινόμενον ἀπὸ μίαν τῶν πλευρῶν της τόξον εἶναι πηλίκον μέρος τῆς περιφερείας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Αἱ περιφέρειαι τῶν κύκλων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες, καὶ αἱ ἐπιφάνειαί των ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων.

Ας σημειώσωμεν, χάριν συντομίας, διὰ περιφ. ΓΑ τὴν περιφέρειαν ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΑ· λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει περιφ. ΓΑ : περιφ. ΟΒ :: ΓΑ : ΟΒ. σχ. 165.

Διότι, ἐὰν ἡ ἀναλογία αὕτη δὲν ἔχῃ χώραν, ΓΑ θέλει εἶναι πρὸς ΟΒ ὡς περιφ. ΓΑ πρὸς τέταρτον τινὰ ὅρον μεγαλήτερον ἢ μικρότερον ἀπὸ περιφ. ΟΒ: ἂς τὸν ὑποθέσωμεν μικρότερον, καὶ ἔσω, εἰ δυνατὸν, ΓΑ : ΟΒ :: περιφ. ΓΑ : περιφ. ΟΔ.

Ας ἐγγράψωμεν εἰς τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας ΟΒ εἶναι ἡ ἀκτὶς κανονικὸν πολύγωνον ΕΖΗΚ'ΛΕ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ μὴ συναπαντοῦν τὴν περιφέρειαν τῆς ὁποίας ΟΔ εἶναι ἡ ἀκτὶς (πρό. 10)· ἂς ἐγγράψωμεν ὅμοιον ΜΝΤΣΜ εἰς τὴν περιφέρειαν τῆς ἀκτῖνος ΓΑ.

Τούτου τεθέντος, ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια, αἱ περίμετροί των ΜΝΠΣΜ, ΕΖΗΚ'Ε εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες ΓΑ, ΟΒ, τῶν περιγεγραμμένων κύκλων (πρό. 8), καὶ οὕτως ΜΝΠΣΜ : ΕΖΗΚ'Ε :: ΓΑ : ΟΒ· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, ΓΑ : ΟΒ :: περιφ. ΓΑ : περιφ. ΟΔ. λοιπὸν ΜΝΠΣΜ : ΕΖΗΚ'Ε :: περιφ. ΓΑ : περιφ. ΟΔ. Τώρα ἡ ἀναλογία αὕτη εἶναι ἀδύνατος, διότι ἡ περίμετρος ΜΝΠΣΜ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ περιφ. ΓΑ (πρό. 9), καὶ ἐξ ἐναντίας ΕΖΗΚΈ εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ περιφ. ΟΔ· ἀδύνατον λοιπὸν ΓΑ νὰ ἦναι πρὸς ΟΒ ὡς περιφ. ΓΑ πρὸς περιφέρειαν μικροτέραν ἀπὸ περιφ. ΟΒ, ἤ, μὲ λέξεις γενικωτέρας, ἀδύνατον εἶναι ἀκτὶς πρὸς ἀκτῖνα ὡς ἡ γεγραμμένη περιφέρεια μὲ τὴν πρώτην ἀκτῖνα πρὸς μίαν περιφέρειαν μικροτέραν παρὰ τὴν γεγραμμένην μὲ τὴν δευτέραν ἀκτῖνα.

Εντεῦθεν συνάγω ὅτι οὐδὲ εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν, ΓΑ πρὸς ΟΒ ὡς περιφ. ΓΑ πρὸς περιφέρειαν μεγαλητέραν τῆς περιφ. ΟΒ· διότι τούτου δοθέντος, ἠθέλαμεν ἔχει ἀντισρέφοντες τοὺς λόγους: ΟΒ πρὸς ΓΑ ὡς περιφέρεια μεγαλητέρα τῆς περιφ. ΟΒ πρὸς περιφ. ΓΑ, ἤ, ὅπερ ταὐτὸν, ὡς περιφ. ΟΒ πρὸς περιφέρειαν μικροτέραν ἀπὸ περιφ. ΓΑ· λοιπὸν ἀκτὶς ἤθελεν εἶναι πρὸς ἀκτῖνα ὡς ἡ γεγραμμένη περιφέρεια μὲ τὴν πρώτην ἀκτῖνα πρὸς περιφέρειαν μικροτέραν τῆς γεγραμμένης περιφερείας μὲ τὴν δευτέραν ἀκτῖνα, τὸ ὁποῖον ἀπεδείχθη ἀδύνατον.

Επειδὴ ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας ΓΑ : ΟΒ : : περιφ. ΓΑ : Χ οὔτε μικρότερος οὔτε μεγαλήτερος ἀπὸ περιφ. ΟΒ ἠμπορεῖ νὰ ἦναι, πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ περιφ. ΟΒ· λοιπὸν αἱ περιφέρειαι τῶν κύκλων εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες.

Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ καὶ κατασκευῆς ἠθέλαμεν δείξει ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν κύκλων εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων.

Δὲν λέγομεν τίποτε περισσότερον ἐπάνω εἰς ταύτην τὴν πρότασιν, ἥτις ἄλλως εἶναι πόρισμα τῆς ἀκολούθου.

Πόρισμα. Τὰ ὅμοια τόξα ΑΒ, ΔΕ, εἶναι ὡς αἱ ἀκτῖνές των ΑΓ, ΔΟ, καὶ οἱ ὅμοιοι τομεῖς ΑΓΒ, ΔΟΕ, εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἰδίων τούτων ἀκτίνων. σχ. 166.

Διότι, ἐπειδὴ τὰ τόξα εἶναι ὅμοια, ἡ γωνία Γ εἶναι ἴση τῇ γωνίᾳ Ο (ὁρ. 3. βιβλ. 3)· ἀλλ' ἡ γωνία Γ εἶναι πρὸς τέσσαρας ὀρθὰς ὡς τὸ τόξον ΑΒ πρὸς τὴν ὅλην περιφέρειαν ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΑ (17, 2), καὶ ἡ γωνία Ο εἶναι πρὸς τέσσαρας ὀρθὰς ὡς τὸ τόξον ΔΕ πρὸς τὴν περιφέρειαν τῆς ἀκτῖνος ΟΔ· λοιπὸν τὰ τόξα ΑΒ, ΔΕ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ περιφέρειαι τῶν ὁποίων κάμνουν μέρος: αἱ περιφέρειαι αὗται εἶναι ὡς αἱ ἀκτῖνες ΑΓ, ΔΟ, λοιπὸν τόξον ΑΒ : τόξον ΔΕ :: ΑΓ : ΔΟ.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον οἱ τομεῖς ΑΓΒ, ΔΟΕ εἶναι ὡς οἱ ὅλοι κύκλοι, οὗτοι δὲ ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων· λοιπὸν τομ. ΑΓΒ : τομ. ΔΟΕ :: $\text{ΑΓ}^2 : \text{ΔΟ}^2$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

ΘΕΩΡΗΜΑ.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος.

Ἂς σημειώσωμεν διὰ ἐπιφ. ΓΑ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΑ· λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει ἐπιφ. ΓΑ = ½ΓΑ × περιφ. ΓΑ.

Διότι ἐὰν ½ΓΑ × περιφ. ΓΑ δὲν ἦναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ΓΑ εἶναι ἡ ἀκτὶς, ἡ ποσότης αὕτη θέλει εἶναι τὸ μέτρον μεγαλητέρου ἢ μικροτέρου κύκλου. Ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι εἶναι τὸ μέτρον κύκλου μεγαλητέρου, καὶ ἔσω, εἰ δυνατὸν, ½ΓΑ × περιφ. ΓΑ = ἐπιφ. ΓΒ. σχ. 167.

Εἰς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ΓΑ ἂς περιγραφθῇ κανονικὸν πολύγωνον ΔΕΖΗ κ. τ. λ, αἱ πλευραὶ τοῦ ὁποίου νὰ μὴ συναπαντοῦν τὴν περιφέρειαν ἥτις ἔχει ἀκτῖνα ΓΒ (πρό. 10)· ἡ ἐπιφάνεια τούτου τοῦ πολυγώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν περίμετρόν του ΔΕ + ΕΖ + ΖΗ + κ. τ. λ. ἐπὶ ½ΑΓ (πρό. 7): ἀλλ' ἡ περίμετρος τοῦ πο-