φανερὸν εἶναι ὅτι $EZ^2 = AB^2 + BE^2$ διὰ τοῦτο $EZ^2 = ΓE^2$ καὶ ἐπειδὴ EZ εἶναι δεδομένη, ἕπεται ὅτι καὶ ΓE καὶ BΓ εἶναι γνωραί.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ'.

Πρόβλημα.

Νὰ εὕρωμεν τὰς ἀναγκαίας συνθήκας διὰ τὴν τριτομὴν τῆς γωνίας.

Ἔστω ABΓ (σχ. 25) μία δεδομένη γωνία, καὶ ἧς ἡποίας ABΔ ἔστω τὸ τριτημόριον. Ἐκ τῆς κορυφῆς B, ὡς κέντρου, καὶ μὲ ἀπροσδιόριστον ἀκτῖνα ἂς γραφθῇ εἷς κύκλος· ἂς φερθῇ ἡ ΔZ παράλληλος τῆς AB· ἂς ἑνωθῇ ἡ στιγμὴ Z μὲ τὴν Γ, καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΓZ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν AB εἰς τὸ H. Ἐπειδὴ ἡ χορδὴ ΔZ εἶναι παράλληλος τῆς AE, τὸ τόξον EZ εἶναι ἴσον μὲ τὸ BΔ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ γωνία EBZ εἶναι ἴση μὲ τὴν ABΔ, τοῦτ' ἔστιν εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας ΔBΓ. Ἀλλ' ἡ τελευταία αὕτη γωνία εἶναι διπλασία τῆς γωνίας εἰς τὴν περιφέρειαν ΔZΓ ἢ τῆς ἴσης της BHZ, λοιπὸν αἱ γωνίαι BHZ καὶ HBZ εἶναι ἴσαι, καὶ τὸ τρίγωνον BZH εἶναι ἰσοσκελές.

Ἡ λύσις λοιπὸν τοῦ προτεθέντος προβλήματος ἀπαιτεῖ νὰ φέρωμεν τὴν ΓZH εἰς τρόπον ὥστε τὸ ἐκτὸς μέρος ZH νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.

Ἄλλη Λύσις.

Ἔστω ἡ γωνία ABΔ (σχ. 25 δὶς) τὸ τρίτον τῆς ABΓ· ἂς ὑψωθῇ ἡ κάθετος AΔΓ καὶ ἂς γραφθῇ τὸ ὀρθογώνιον BAΓE· ἂς ἐκβληθῶσιν αἱ εὐθεῖαι

ΕΓ καὶ ΒΔ ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς τὴν Ζ· καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΗ ὥστε νὰ σχηματίζῃ τὴν γωνίαν ΖΓΗ ἴσην μὲ τὴν ΗΖΓ.

Ἀνάλυσις.

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΖΓΗ καὶ ΗΖΓ εἶναι ἴσαι· ἡ πλευρὰ ΗΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΗ καὶ ἑκάστη τῶν ἀνωτέρω γωνιῶν εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐσωτερικῆς γωνίας ΓΗΒ· ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ γωνία ΓΒΑ εἶναι τριπλασία τῆς ΑΒΔ· ἕπεται ὅτι ΓΒΗ εἶναι διπλασία τῆς ΑΒΔ ἢ τῆς ἴσης της ΓΖΗ. Οὕτως ἡ γωνία ΓΒΗ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΗΒ, καὶ ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΗ. Περιπλέον, ἐὰν ἐκ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΑΒΕ καὶ ΖΓΔ, ἀφαιρέσωμεν τὰς ἴσας γωνίας ΑΒΔ καὶ ΖΓΗ, αἱ ὑπόλοιποι γωνίαι ΕΒΔ καὶ ΗΓΔ εἶναι ἴσαι· ἀλλὰ ΕΒΔ=ΒΔΑ=ΓΔΖ· λοιπὸν ἡ γωνία ΗΓΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΗΔΓ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ πλευρὰ ΗΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΗΓ· ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ΒΓ, ΗΓ, ΗΔ καὶ ΗΖ εἶναι ἴσαι· λοιπὸν τὸ ἐκτὸς τμῆμα ΔΖ τῆς ζητουμένης γραμμῆς ΒΖ εἶναι διπλάσιον τῆς διαγωνίου ΒΓ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΕΓ.

Σχόλιον. Τοιαῦται λοιπὸν εἶναι αἱ τελικαὶ συνθῆκαι, ἐκ τῶν ὁποίων ἐξαρτᾶται ἡ τριτομὴ τῆς γωνίας· ἀλλὰ διὰ τὴν ἐκτέλεσίν των δὲν ἀρκοῦσιν αἱ θεωρίαι τῆς στοιχειώδους Γεωμετρίας. Τῷ ὄντι πολλὰ ὀλίγαι περιστάσεις ὑπάρχουν εἰς τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν τριτομὴν τῆς γωνίας μεταχειριζόμενοι τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ τὸν κύκλον· οὕτως ὅταν ἡ γωνία ἦναι τὸ ἥμισυ μιᾶς ὀρθῆς, τότε τὸ πρόβλημα δύναται νὰ λυθῇ κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον.

Ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΒΓ (σχ. 25 τρὶς) εἰς τρόπον ὥστε ἡ ΒΘ=2ΒΓ· ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΘ, καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΒΑ μίαν ποσότητα ΑΙ=ΑΘ. Ἐπὶ τῆς ΒΙ ἂς γραφθῇ ἡμικύκλιον, τὸ ὁποῖον θέλει συναπαντηθῇ εἰς τὸ Ζ ἀπὸ τὴν προεκβολὴν τῆς ΕΓ· ἂς φερθῇ ἡ ΒΖ, καὶ ἡ οὕτως σχηματιζομένη γωνία ΑΒΖ εἶναι τὸ τρίτον τῆς ΑΒΓ.

Τὸ τελευταῖον τοῦτο ἐξαγόμενον δεικνύεται ἀμέσως διὰ μιᾶς ἁπλῆς παρατηρήσεως τῆς κατασκευῆς. Ἐπειδὴ ΒΘ=4ΒΓ=8ΒΑ, καὶ ΑΙ=ΒΘ+ΒΑ=9ΒΑ· ἕπεται ὅτι ΑΙ=3ΑΒ, ΒΙ=4ΒΑ καὶ ΟΙ=2ΒΑ· ἂς φέρωμεν τώρα τὴν κάθετον ΖΛ ἥτις ἂς ἐκβληθῇ μίαν ἴσην ποσότητα ὑπὸ τῆς ΒΙ, καὶ ἂς φερθῶσιν αἱ ΟΖ καὶ ΟΜ· φανερὸν εἶναι ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΟΖ καὶ ΟΜ εἶναι ἴσαι, καὶ ὅτι ἡ ΖΜ=2ΒΑ· ἀλλὰ ΟΖ=ΟΙ=2ΒΑ· λοιπὸν ΟΖ=ΟΜ=ΖΜ=2ΒΑ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ τρίγωνον ΖΟΜ εἶναι ἰσόπλευρον, καὶ διὰ τοῦτο ἡ γωνία ΖΟΜ εἶναι τὰ δύο τρίτα μιᾶς ὀρθῆς γωνίας· ἐκ τοῦ ὁποίου ἀκολουθεῖ ὅτι ἡ γωνία ΖΟΛ εἶναι τὸ τρίτον μιᾶς ὀρθῆς, καὶ ὅτι ἡ ΑΒΖ, ἥτις εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΖΟΛ, εἶναι τὸ ἕκτον μιᾶς ὀρθῆς, δηλαδὴ τὸ ἥμισυ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας σύγκειται ἀπὸ τρεῖς γωνίας, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒΖ ἢ ἡ ΑΒΖ γωνία εἶναι τὸ τριτημόριον μιᾶς ἡμιορθῆς γωνίας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΣ.

Πρόβλημα.

Νὰ προσδιορίσωμεν τὰς συνθήκας, αἵτινες πρέπει νὰ πληροῦνται, διὰ νὰ δυνηθῶμεν νὰ παρεμβάλωμεν δύο μέσους ἀναλόγους μεταξὺ δύο δεδομένων εὐθειῶν.

Ας ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ (σχ. 26.) τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ εἶναι τὰ δύο ἄκρα μιᾶς συνεχοῦς ἀναλογίας ἥτις ἔχει διὰ μέσους ὅρους ΔΕ καὶ ΑΗ εἰς τρόπον ὥστε ΑΒ : ΔΕ :: ΔΕ : ΑΗ :: ΑΗ : ΑΓ.

Ἀνάλυσις.

Ας φερθῶσιν αἱ ΓΕ καὶ ΓΗ. Τὰ τρίγωνα ΔΓΕ καὶ ΑΓΗ εἶναι ὅμοια, ἐπειδὴ καὶ τὰ δύο εἶναι ὀρθογώνια, τὸ μὲν εἰς τὸ Δ, τὸ δὲ εἰς τὸ Α, καὶ περιπλέων ΑΒ ἢ ΓΔ : ΔΕ :: ΑΗ : ΑΓ· αἱ γωνίαι λοιπὸν ΔΕΓ καὶ ΑΓΗ εἶναι ἴσαι, διὰ τοῦτο ἡ ΕΓΗ σχηματίζει μίαν εὐθεῖαν γραμμήν· ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ διαγώνιοι ΒΓ, ΑΔ· ἂς ἑνωθῇ ἡ κοινὴ τομὴ των Ο μὲ τὰς στιγμὰς Ε καὶ Η. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΔΟΒ καὶ ΒΟΑ εἶναι Ισοσκελῆ, ἔχομεν $\overline{\text{ΕΟ}}^2 = \overline{\text{ΟΔ}}^2 + \text{ΒΕ} \times \text{ΕΔ}$. Ἐπειδὴ, ἄγοντες τὴν κάθετον ΟΙ ἐπὶ τῆς ΒΔ, ἔχομεν $\overline{\text{ΟΕ}}^2 = \overline{\text{ΟΙ}}^2 + \overline{\text{ΙΕ}}^2$, καὶ $\overline{\text{ΟΔ}}^2 = \overline{\text{ΟΙ}}^2 + \overline{\text{ΙΔ}}^2$. Λοιπὸν $\overline{\text{ΟΕ}}^2 = \overline{\text{ΟΔ}}^2 + \overline{\text{ΙΕ}}^2 - \overline{\text{ΙΔ}}^2 = \overline{\text{ΟΔ}}^2 + (\text{ΙΕ} + \text{ΙΔ}) \times (\text{ΙΕ} - \text{ΙΔ}) = \overline{\text{ΟΔ}}^2 + \text{ΒΕ} \times \text{ΕΔ}$ (*) καὶ $\overline{\text{ΟΗ}}^2 = \overline{\text{ΟΑ}}^2 + \text{ΒΗ} \times \text{ΗΑ}$. Τώρα ΒΗ : ΒΕ :: ΗΑ : ΑΓ :: ἢ ΔΕ : ΗΑ· λοιπὸν $\text{ΒΗ} \times \text{ΗΑ} = \text{ΒΕ} \times \text{ΔΕ}$. Περιπλέον $\overline{\text{ΟΑ}}^2 = \overline{\text{ΟΔ}}^2$· οὕτως ΟΕ = ΟΗ· καὶ ἡ στιγμὴ Ο ἀπέχει ἰσάκις ἐκ τῶν στιγμῶν Ε καὶ Η. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἐὰν περιγράψωμεν ἕνα κύκλον εἰς τὸ δεδομένον ὀρθογώνιον, τὸ διαχωριζόμενον τμῆμα ΕΓ θέλει εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΗΘ.

(*) Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς εὐθείας, ὁποῦ ἑνώνει τὴν κορυφὴν μὲ τὸ ἄκρον τῆς προεκβολῆς τῆς βάσεως ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, εἶναι ἴσον πάντοτε μὲ τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὁποῖον ἔχει διὰ βάσιν τὸ ἄθροισμα τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου καὶ τῆς προεκβολῆς της, καὶ διὰ ὕψος τὴν προεκβολήν, πλέον τὸ τετράγωνον μιᾶς τῶν δύο ἴσων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

Πρώτη Λύσις.

Τὸ πρόβλημα λοιπὸν λύεται, ἐὰν δυνηθῶμεν νὰ ἐξεύρωμεν ἐκ τῆς στιγμῆς Γ μίαν εὐθεῖαν ΕΓΗ τοιαύτην, ὥστε τὸ διάστημα ΟΕ νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὴν ΟΗ, ἢ τὰ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρη ΕΓ, ΗΘ νὰ ἦναι ἴσα.

Δευτέρα Λύσις.

Φυλάττοντες τὸ πρῶτον μέρος τῆς κατασκευῆς, ἀφ' οὗ ἀπεδείξαμεν ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΒΕ×ΕΔ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΒΗ×ΗΑ, ἂς διαιρέσωμεν τὴν ΒΔ εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὴν στιγμὴν Ζ (σχ. 26. δίς.) φανερὸν εἶναι ὅτι $BE \times E\Delta + \Delta Z^2 = EZ^2$ (*) ἢ $EZ^2 = BH \times HA + \Delta Z^2$. Ἂς κατασκευάσωμεν τώρα ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΒΚΑ, ὥστε ἑκάστη τῶν πλευρῶν ΚΒ, ΚΑ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΔΖ. Ἂς φερθῇ ἡ εὐθεῖα ΗΚ. Τότε $BH \times HA + AK^2 = HK^2$, καὶ διὰ τοῦτο ΗΚ = ΕΖ. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ΑΒ : ΔΕ :: ΔΕ : ΗΑ :: ΗΑ : ΑΓ· λοιπὸν ΑΒ : ΗΑ :: ΔΕ : ΑΓ ἢ 2ΑΒ : ΗΑ :: 2ΔΕ : ΑΓ. Ἐὰν τώρα φέρωμεν τὴν γραμμὴν ΓΖ καὶ τὴν ἐκβάλλωμεν ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΑΒ εἰς τὴν Λ, θέλομεν ἔχει ΑΛ : ΗΑ :: 2ΔΕ : ΑΓ ἢ ΒΔ, ἢ :: ΔΕ : ΒΔ. Ἐκ τούτου δείκνυται ὅτι ΗΛ : ΗΑ :: ΕΖ : ΔΖ· φέροντες δὲ τὴν ΛΚ καὶ τὴν παράλληλον αὐτῆς ΑΜ ἔχομεν ΗΛ :

(*) Ἐπειδὴ ΕΒ = 2ΔΖ + ΔΕ, διὰ τοῦτο $EB \times E\Delta = 2\Delta Z^2 \times \Delta Z + \Delta E^2$· καὶ πάλιν ἐπειδὴ ΕΖ = ΔΖ + ΔΕ, διὰ τοῦτο $EZ^2 = \Delta Z^2 + \Delta E^2 + 2\Delta Z \times \Delta E$, ἢ $EZ^2 - \Delta Z^2 = 2\Delta Z \times \Delta E + \Delta E^2$, δηλαδὴ $EB \times \Delta E = EZ^2 - \Delta Z^2$, ἢ $EZ^2 = EB \times \Delta E + \Delta Z^2$.

ΗΑ : : ΗΚ : ΗΜ. Οθεν ΕΖ : ΔΖ : : ΗΚ : ΗΜ· ἀλλὰ ΕΖ = ΗΚ· λοιπὸν ΔΖ = ΗΜ. Ἐκ τούτου τοῦ ἐξαγομένου ἕπεται ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΚ καὶ ἡ παράλληλός της ΑΜ εἶναι γνωστῆς θέσεως, ἐπειδὴ αἱ στιγμαὶ Ζ, Α καὶ Κ εἶναι δεδομέναι.

Τὸ πρόβλημα λοιπὸν ἦχθη εἰς τοῦτο, ὅτι νὰ ἄξωμεν ἐκ τῆς στιγμῆς Κ μίαν εὐθεῖαν ΚΜΗ οὕτως, ὥστε τὸ μέρος ΜΗ τὸ διαχωριζόμενον μεταξὺ ΑΜ καὶ ΒΑ ἐκβαλλομένων νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς δεδομένης πλευρᾶς ΑΓ.

Λύσις Τρίτη.

Υποθέτοντες πάντοτε ὅτι αἱ δύο γραμμαὶ ΑΒ καὶ ΑΓ αἵτινες σχηματίζουν γωνίαν ὀρθὴν (σχ. 26. τρίς.) εἶναι τὰ ἄκρα τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας, ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῶν προεκβολῶν τῆς ΑΓ καὶ ΑΒ δύο στιγμὰς Δ, Ε τοιαύτας ὥστε ΑΒ : ΑΔ : : ΑΔ : ΑΕ : : ΑΕ : ΑΓ· τότε ΑΕ = $\overline{\text{ΑΔ}}^2$ ÷ ΑΓ· λοιπὸν ἡ στιγμὴ Ε εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας, τῆς ὁποίας ΓΔ εἶναι ἡ διάμετρος. Ἂς φερθῇ ἡ ΔΕ· καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΒΔ ἕως εἰς τὴν περιφέρειαν. Ἂς ὑψωθῇ ἡ ἀκτὶς ΙΖ κάθετος ἐπὶ τῆς ΔΓ. Ἐπειδὴ ΑΒ : ΑΔ : : ΔΑ : ΑΕ, καὶ περιπλέον ἡ γωνία ΔΑΕ εἶναι κοινὴ εἰς τὰ τρίγωνα ΒΑΔ καὶ ΔΑΕ· διὰ τοῦτο τὰ τοιαῦτα τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ἑπομένως ἡ γωνία ΑΔΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΕΔ, καὶ τὸ τόξον ΓΗ ἴσον μὲ τὸ ΔΕ· ὅθεν ἕπεται ὅτι τὸ τόξον ΖΗ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΖΕ, καὶ τὸ τμῆμα ΙΘ τῆς διαμέτρου εἶναι ἴσον μὲ τὴν ΑΙ, ἤ ἡ πλαγία ΗΔ ἴση μὲ τὴν ΑΒ.

Η Λύσις λοιπὸν τοῦ προβλήματος ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἀκολούθου συνθήκης, ὅτι ἡ ΗΔ νὰ ἔχῃ τὸ τμῆ-

μά της ΗΛ ἴσον μὲ τὴν ΑΒ ἡ αἱ κάθετοι ΕΔ καὶ ΗΘ νὰ ἀπέχουν ἰσάκις ἐκ τοῦ κέντρου· ὁ λόγος τῆς ΚΙ πρὸς τὴν ΙΓ εἶναι φανερὰ ὁ αὐτὸς μὲ τὸν τῆς ΑΒ πρὸς ΑΓ. Διὰ τοῦτο ἰδὲ, ἀφ' οὗ περιγράψωμεν ἓν ἡμικύκλιον μὲ τὴν ἀκτῖνα ΙΓ, δυνηθῶμεν νὰ φέρωμεν ἐκ τῆς σιγμῆς Β μίαν εὐθεῖαν ΒΔ τοιαύτην, ὥστε τὸ μέρος ΒΗ ταύτης τῆς εὐθείας τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῆς περιφερείας καὶ τῆς γραμμῆς ΓΚΜ τῆς φερομένης ἐκ τοῦ ἄλλου ἄκρου τῆς διαμέτρου, νὰ διαιρῆται εἰς δύο ἴσα μέρη ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα ΙΖ, τότε τὸ πρόβλημα λύεται. Ἐπειδὴ, λαμβανομένης τῆς ΑΝ = ΑΔ καὶ φερομένης τῆς ΕΝ ἥτις συναπαντᾷ τὴν ΙΖ εἰς τὸ Ο, φανερὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω γίνεται, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΙΚ, ΙΟ, ΙΛ καὶ ΙΓ σχηματίζουν μίαν συνεχῆ ἀναλογίαν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ.

Ὅταν ὑποτεθῇ ὅτι τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα ἐλύθη ἐὰν ἔχωμεν (σχ. 27.) $3\overline{AH}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 + \overline{EZ}^2$, ἡ γωνία ΓΕΗ τοῦ τριγώνου εἶναι προσδιορισμένη.

Πρόβλημα.

Ἐπειδὴ εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΑΒΔ (σχ. 27.) ἡ ἡμιχορδὴ ΕΖ καὶ ἡ ἀκτὶς ΓΔ εἶναι εἰς ὀρθὴν γωνίαν ἐπὶ τῆς ΑΒ, ζητοῦμεν νὰ ἄξωμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΗ εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἔχωμεν $3\overline{AH}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 + \overline{EZ}^2$.

Λύσις.

Ἂς ἐγγραφθῇ εἰς τὸν κύκλον μία χορδὴ ΒΘ ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα, ἂς φερθῇ ἡ ΑΘ, καὶ ταύτης τῆς εὐθείας ἂς ἀχθῇ παράλληλος ἡ ΕΗ, ἥτις συναπαντᾷ τὴν ΓΔ εἰς τὸ Η· τότε ἐπιζευγνύοντες τὴν ΑΗ θέλομεν ἔχει $3\overline{AH}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 + \overline{EZ}^2$.

Επειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΘΒ καὶ ΕΓΗ εἶναι ὅμοια, ἔχομεν ΑΒ : ΒΘ :: ΕΗ : ΓΗ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ΑΒ = 2ΒΘ· λοιπὸν ΕΗ = 2ΓΗ, διὰ τοῦτο ΕΗ = 4ΓΗ καὶ ΕΓ = 3ΓΗ· ὅθεν 3ΑΗ = 3ΑΓ + ΕΓ = 2ΑΓ + 2ΕΓ + ΑΓ − ΕΓ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ΑΓ = $\frac{ΑΕ - ΕΒ}{2}$ καὶ διὰ τοῦτο ΕΓ = $\frac{ΒΕ - ΑΕ}{2}$, 2ΑΓ + 2ΕΓ = ΑΕ + ΕΒ καὶ ΑΓ − ΕΓ = ΕΖ, λοιπὸν 3ΑΗ = ΑΕ + ΕΖ + ΕΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ'.

Ἐὰν ἡ μία τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου ἦναι δεδομένη· ἡ διαφορὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος τῶν πλευρῶν αἵτινες περιέχουν ταύτην τὴν γωνίαν καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς βάσεως ἔχει προσδιορισμένον λόγον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου.

Ἔστω ΑΒΓ (σχ. 28.) ἓν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΑΒ ἂς ἐκβληθῇ μίαν ποσότητα ΒΔ = ΒΓ· ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΔ ἐπ' ἐκείνου τῆς ΑΓ ἔχει λόγον προσδιορισμένον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

Ἀνάλυσις.

Ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΕ παράλληλος τῆς ΒΓ, ἥτις συναπαντᾷ τὴν ΓΔ ἐκβαλλομένην εἰς τὴν Ε. Ἐκ τῆς στιγμῆς Β, ἂς φερθῇ ἡ κάθετος ΒΖ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΒΕ.

Τὸ τρίγωνον ΓΒΔ ἐπειδὴ εἶναι Ἰσοσκελὲς, ἡ γωνία ΓΔΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΔΓΒ, καὶ διὰ τοῦτο μὲ τὴν ΓΕΑ. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΔΑΕ εἶναι παρομοίως ἰσοσκελές· καὶ ἕπεται ὅτι ΑΔ = ΑΓ + ΔΓ × ΓΕ ἢ ΑΔ =

$\overline{\text{ΑΓ}}^2 = \text{ΔΓ} \times \text{ΓΕ}$. Περιπλέον ἐπειδὴ ΑΕ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΓ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ΕΒΓ, τοῦτ' ἔςιν ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ΒΖ×ΓΕ. Διὰ τοῦτο ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΔ ἐπ' ἐκείνου τῆς ΑΓ περιέχεται εἰς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὡς ΔΓ×ΓΕ περιέχεται εἰς τὸ ½ ΒΖ×ΓΕ ἢ ὡς ΑΓ περιέχεται εἰς τὴν ½ ΒΖ ἢ πρόσετι ὡς 4ΔΖ περιέχεται εἰς τὴν ΒΖ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ δεδομένη γωνία ΑΒΓ ἴση μὲ ΓΔΒ+ΒΓΔ εἶναι διπλασία ἑκάςης τούτων τῶν γωνιῶν, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ΒΔΖ εἶναι γνωςὴ, ἑπομένως τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΔΖ εἶναι προσδιορισμένου εἴδους, καὶ ὁ λόγος τῆς ΔΖ πρὸς τὴν ΒΖ εἶναι γνωςός. Τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖ διὰ τὸν λόγον τῆς 4ΔΖ πρὸς τὴν ΒΖ ἢ τῆς ὑπεροχῆς τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΔ ἐπ' ἐκείνου τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

Σύνθεσις.

Φυλαττομένης τῆς αὐτῆς κατασκευῆς, φανερὸν εἶναι ὅτι ΔΓ×ΕΓ : ΒΖ×ΓΕ :: ΔΓ : ΒΖ· ἀλλὰ $\overline{\text{ΔΓ}}^2 \times \text{ΓΕ} = \overline{\text{ΑΔ}}^2 - \overline{\text{ΑΓ}}^2$, καὶ ΒΖ×ΓΕ εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· λοιπὸν 2ΔΓ περιέχεται εἰς τὴν ΒΖ, ὡς ἡ ὑπεροχὴ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΔ ἐπὶ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΓ περιέχεται εἰς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.