ΑΔΘ ἡ ΔΑΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒΓ ἡ ΑΒΙ. Λοιπὸν ΑΚΘ = ΑΒΙ καὶ ΚΘ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΙ. Τώρα ἐπειδὴ ΑΚ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΚΒ, διὰ τοῦτο ἕπεται ὅτι ΑΘ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΘΙ καὶ ἡ ΖΟ ἴση μὲ τὴν ΟΗ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ἰθ'.

Πρόβλημα.

Ἐκ μιᾶς δεδομένης στιγμῆς νὰ ἄξωμεν μίαν εὐθεῖαν τοιαύτην, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τῶν διαχωριζομένων τμημάτων ἐπ' αὐτῆς ἀπὸ δύο δεδομένας γραμμὰς, νὰ ἦναι ἰσοδύναμον μὲ μίαν δεδομένην ἐπιφάνειαν.

Ἐστωσαν ΑΒ, ΑΓ (Σχ. 19 ἢ 19 δὶς) αἱ δύο δεδομέναι γραμμαὶ καὶ Δ ἡ στιγμὴ, ἐκ τῆς ὁποίας φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΖ, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τῶν τμημάτων ΕΔ, ΔΖ, νὰ ἰσοδυναμῇ μὲ μίαν δεδομένην ἐπιφάνειαν.

Ἀνάλυσις.

Ἂς φέρωμεν τὴν ΑΔ, καὶ ἐκ τῆς Ζ ἂς ἄξωμεν μίαν εὐθεῖαν ΖΗ ἥτις νὰ κάμνῃ μὲ τὴν ΕΖ γωνίαν ἴσην μὲ τὴν ΔΑΕ· αὕτη συναπαντᾷ τὴν ΑΔ ἢ τὴν προεκβολήν της εἰς τὴν Η. Τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΖΔΗ ἐπειδὴ εἶναι ὅμοια, δίδουν ΑΔ:ΕΔ::ΔΖ:ΔΗ, καὶ διὰ τοῦτο ΑΔ×ΔΗ = ΕΔ×ΔΖ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΕΔ×ΔΖ εἶναι δεδομένον, λοιπὸν δεδομένον εἶναι καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΑΔ×ΔΗ. Ἐπειδὴ δὲ ΑΔ εἶναι γνωστὴ, διὰ τοῦτο ΔΗ καὶ ἡ στιγμὴ Η δύνανται νὰ προσδιορισθῶσι. Περιπλέον, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΔΖΗ εἶναι ἴση μὲ τὴν γνωστὴν γωνίαν ΔΑΓ, ἐὰν

γράψωμέν ἐπὶ τῆς ΔΗ ἓν τμῆμα ἱκανὸν νὰ χωρέσῃ τὴν γωνίαν ΔΑΓ, ἡ στιγμὴ Ζ πρέπει νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ τοιούτου τμήματος. Διὰ τοῦτο ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ τόξου μὲ τὴν γραμμὴν ΑΒ μᾶς κάμνει νὰ γνωρίσωμεν τὴν θέσιν τῆς στιγμῆς Ζ. Καὶ ὅταν ὑπάρχῃ κοινὴ τομὴ, ἡ στιγμὴ ἀφῆς ἔχομεν δύο λύσεις ἢ μίαν.

Σύνθεσις.

Ἂς φέρωμεν τὴν ΑΔ, καὶ ἂς λάβωμεν τὴν ΔΗ εἰς τρόπον ὥστε τὸ ὀρθογώνιον ΑΔ×ΔΗ νὰ ἦναι ἴσον δύναμον μὲ τὴν δεδομένην ἐπιφάνειαν, καὶ ἐπὶ τῆς ΔΗ γράφομεν τόξον ἱκανὸν νὰ χωρέσῃ τὴν γωνίαν ΔΑΓ. Τοῦτο τὸ τόξον συναπαντᾷ τὴν ΑΒ εἰς τὴν Ζ, Ζ΄. Λέγω ὅτι ΕΔΖ ἢ Ε΄ΔΖ΄ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

Επειδὴ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΖΔΗ εἶναι ὅμοια, διὰ τοῦτο ΑΔ : ΕΔ :: ΔΖ : ΔΗ, καὶ λοιπὸν ΑΔ×ΔΗ = ΕΔ×ΖΔ εἶναι ἴσον μὲ τὴν δεδομένην ἐπιφάνειαν.

Οταν ὁ κύκλος ἅπτεται τῆς εὐθείας ΑΔ, αἱ στιγμαὶ Ζ,Ζ΄ συμπίπτουσι, καὶ τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει παρὰ μίαν λύσιν. Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν ἡ γωνία ΑΖΔ ἢ ΒΖΔ ἐπειδὴ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΔΗΖ, εἶναι διὰ τοῦτο ἴση μὲ τὴν ΑΕΔ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΖΕ εἶναι ἰσοσκελές, λοιπὸν ΑΖ = ΑΕ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ΄.

Πρόβλημα.

Εκ μιᾶς δεδομένης στιγμῆς νὰ ἄξωμεν μίαν εὐθεῖαν ἥτις νὰ προσδιορίζῃ ἐπὶ δύο δεδομένων εὐθειῶν δύο τμήματα, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα, νὰ ἦναι ἴσον μὲ ἓν μῆκος δεδομένον.

Εστωσαν ΑΒ, ΑΓ (Σχ. 20 καὶ Σχ. 20 δίς) αἱ δύο δεδομέναι γραμμαὶ, καὶ Δ ἡ δεδομένη στιγμὴ, ἐκ τῆς ὁποίας διέρχεται ἡ εὐθεῖα ΕΖ εἰς τρόπον ὥςε συναπαντᾷ τὴν ΑΒ καὶ τὴν ΑΓ, καὶ κάμνει τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων ΑΕ καὶ ΑΖ νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὴν ΟΝ.

Τὸ πρόβλημα παρρησιάζει δύο περιςάσεις: Εκείνην εἰς τὴν ὁποίαν ἡ στιγμὴ Δ εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς σχηματιζομένης ὀξείας γωνίας ἀπὸ τὰς δεδομένας γραμμάς· καὶ ἐκείνην εἰς τὴν ὁποίαν ἡ στιγμὴ Δ εὑρίσκεται ἐκτὸς τῆς γωνίας.

Πρώτη περίστασις (Σχ. 20) ἡ στιγμὴ Δ εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς γωνίας ΒΑΓ.

Ανάλυσις.

Ας ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΔΗ καὶ ΔΘ ἀμοιβαίως παράλληλοι τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ.

Επειδὴ ἡ στιγμὴ Δ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ εἶναι δεδομένης θέσεως, τὸ παραλληλόγραμμον ΑΗΔΘ εἶναι προσδιορισμένον. Περιπλέον ἐκ τῆς φανερᾶς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΕΔΗ καὶ ΔΖΘ ἔχομεν, ΕΗ : ΗΔ :: ΔΘ : ΘΖ, καὶ διὰ τοῦτο ΕΗ × ΘΖ = ΗΔ × ΔΘ. Αλλὰ ΗΔ καὶ ΔΘ εἶναι δεδομέναι, λοιπὸν καὶ τὸ ΕΗ × ΘΖ εἶναι γνωςόν. Ας λάβωμεν ΖΚ = ΕΗ, καὶ τότε τὸ ὀρθογώνιον ΘΖ × ΖΚ εἶναι γνωστόν. Τώρα, ἡ εὐθεῖα ΘΚ εἶναι δεδομένη, ἐπειδὴ εἶναι ἴση μὲ ΑΖ + ΖΚ τοῦτ' ἔστιν ἴση μὲ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἀθροίσματος ΑΖ + ΑΕ ἐπὶ τοῦ ΗΔ + ΔΘ· λοιπὸν τὰ τμήματα ΘΖ, ΖΚ εἶναι προσδιορισμένα, καὶ ἡ στιγμὴ Θ ἐπειδὴ εἶναι δεδομένη, ἡ στιγμὴ Ζ ἢ Ζ' καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΔΖ ἢ Ε'ΔΖ' εἶναι γνωστά.

Σύνθεσις.

Ἂς ἀχθῶσιν αἱ παράλληλοι ΔΗ καὶ ΔΘ τῆς ΑΒ καὶ ΑΓ. Επὶ τῆς δεδομένης γραμμῆς ΟΝ ἥτις εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τμημάτων ΑΕ καὶ ΑΖ, φέρομεν ἓν διάστημα ΟΠ=ΑΗ+ΑΘ, καὶ κάμνομεν ΘΚ=ΠΝ. Επὶ τῆς ΘΚ, ὡς διαμέτρου, γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν, ἄγομεν εἰς ταύτην τὴν ἡμιπεριφέρειαν τὰς ἐφαπτομένας ΘΙ καὶ ΚΛ ἀμοιβαίως ἴσας μὲ τὴν ΑΘ καὶ ΑΗ, καὶ ἐπιζευγνύομεν τὴν εὐθεῖαν ΙΛ καὶ ὑψόνομεν καθέτους, ἐκ τῶν στιγμῶν ὅπου συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν ἡ γραμμὴ ΜΖ ἢ Μ'Ζ': λέγω ὅτι ἡ ΕΔΖ ἢ Ε'ΔΖ' εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

Επειδὴ ΘΙ×ΚΛ=ΖΘ×ΖΚ (1), διὰ τοῦτο ΑΘ×ΑΗ=ΘΖ×ΖΚ. Αλλ' ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΕΗΔ καὶ ΔΘΖ, ΕΗ:ΗΔ ἢ ΑΘ::ΔΘ ἢ ΑΗ:ΘΖ, λοιπὸν ΑΘ×ΑΗ=ΘΖ×ΕΗ. Καὶ συγκρίνοντες ταύτην τὴν ἐξίσωσιν μὲ τὴν ἀνωτέρω, συνάγομεν ΚΖ=ΕΗ. Επειδὴ δὲ ΑΗ+ΑΘ=ΟΠ καὶ ΘΗ+ΕΗ=ΘΚ=ΠΝ, ἕπεται ὅτι ΑΗ+ΕΗ+ΑΘ+ΘΖ ἢ ΑΕ+ΑΖ=ΟΝ.

Δευτέρα περίστασις. Οταν ἡ στιγμὴ Δ ἦναι ἐκτὸς τῆς γωνίας ΒΑΓ.

Ανάλυσις.

Ἂς ἀχθῇ (Σχ. 20 δὶς) ἡ ΔΘ παράλληλος τῆς ΑΓ, ἥτις συναπαντᾷ τὴν ΑΒ ἐκβαλλομένην εἰς τὸ Θ.

Τὰ τρίγωνα ΕΔΗ καὶ ΘΔΖ, ἐπειδὴ εἶναι ὅμοια, δίδουν ΕΗ:ΔΗ::ΔΘ:ΘΖ, ὅθεν ΕΗ×ΘΖ=ΔΗ×ΔΘ,

(1) Τὰ τρίγωνα ΘΙΜ, ΖΚΜ καθὼς καὶ τὰ ΖΘΜ, ΚΛΜ εἶναι ὅμοια· διὰ τοῦτο ΘΙ:ΘΜ::ΖΚ:ΚΜ καὶ ΘΜ:ΘΖ::ΚΜ:ΚΛ, λοιπὸν ΘΙ:ΘΖ::ΖΚ:ΚΛ ἢ ΘΙ·ΚΛ=ΘΖ·ΖΚ.

ἐπειδὴ δὲ ΔΗ καὶ ΔΘ εἶναι δεδομέναι, φανερὸν εἶναι, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΕΗ×ΘΖ εἶναι γνωστόν. Ἐὰν λάβωμεν τώρα τὴν ΖΚ=ΕΗ, ΘΚ θέλει εἶναι ἴση μὲ ΘΖ—ΕΗ=ΔΗ+ΑΖ—(ΔΘ—ΑΕ)=ΑΖ+ΑΕ (ΔΘ—ΔΗ). Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι ΘΚ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΘΖ×ΖΚ εἶναι γνωστὰ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ στιγμὴ Ζ εἶναι προσδιορισμένη.

Ἐὰν ἡ ΔΖΕ τέμνῃ τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τῆς κορυφῆς Α, τὸ πρόβλημα λύεται κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον. Ἡ ὁμοιότης τῶν τριγώνων Ε΄ΔΗ καὶ ΔΖ΄Θ ἐπειδὴ ἀκόμη ὑπάρχει, ἔχομεν Ε΄Η:ΔΘ::ΔΗ:ΗΖ΄· λοιπὸν Ε΄Η×ΘΖ΄ εἶναι γνωστόν· ἐπειδὴ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΔΗ×ΔΘ. Ἐὰν δὲ λάβωμεν Ζ΄Κ΄=Ε΄Η, φανερὸν εἶναι ὅτι ΘΚ΄=Ε΄Η—ΘΖ΄=ΑΕ΄+ΔΘ—(ΔΗ—ΑΖ΄)=ΑΖ΄+Ε΄Α+(ΔΘ—ΔΗ). Οὕτως ἡ εὐθεῖα ΘΚ΄ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΘΖ΄×Ζ΄Κ΄ εἶναι γνωστὰ καὶ διὰ τοῦτο γνωστὴ εἶναι καὶ ἡ στιγμὴ Ζ΄.

Σύνθεσις.

Ἂς ληφθῇ ἡ ΟΠ ἢ ΟΠ΄ ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν παραλλήλων ΔΘ καὶ ΔΗ. Ἀπὸ τὸ ἓν καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τῆς στιγμῆς Θ φέρομεν δύο διαστήματα ἴσα ΘΚ=ΠΝ καὶ ΘΚ΄=Π΄Ν. Ἐπὶ τῆς ΘΚ καὶ ΘΚ΄ γράφομεν ἡμικύκλια. Ἐκ τῆς Θ ὑψώνομεν τὴν κάθετον ΘΙ ἴσην μὲ τὴν ΔΗ, καὶ ἐκ τῶν στιγμῶν Κ καὶ Κ΄ τὰς καθέτους ΚΛ καὶ Κ΄Λ΄, ἑκάστη ἴση μὲ τὴν ΔΘ. Ἂς φερθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΙΛ καὶ ΙΛ΄, ἐκ δὲ τῶν στιγμῶν Μ καὶ Μ΄ ὅπου αὐταιτέμνουν τὰς περιφερείας, ἂς ὑψωθῶσιν ἐπ' αὐτῶν αἱ γραμμαὶ ΜΖ καὶ Μ΄Ζ΄. Αἱ εὐθεῖαι ΔΕΖ καὶ ΔΕ΄Ζ΄ χωρίζουσιν ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ ΑΓ δύο τμήματα τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ τὴν ΟΝ.

Επειδὴ ΘΖ × ΖΚ = ΘΙ × ΚΛ = ΔΗ × ΔΘ = ΘΖ × ΕΗ, ἕπεται ὅτι ΕΗ = ΖΚ, καὶ διὰ τοῦτο ΘΚ = ΘΖ − ΕΗ = ΑΖ + ΑΕ − (ΔΘ − ΔΗ), καὶ ἐπειδὴ ΘΚ = ΠΝ = ΟΝ − (ΔΘ − ΔΗ), ἕπεται ὅτι ΑΖ + ΑΕ = ΟΝ.

Συλλογιζόμενοι κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον δυκνύομεν ὅτι Ε΄Η = Ζ΄Κ΄, καὶ διὰ τοῦτο ΘΚ΄ = Ε΄Η − ΘΖ΄ = ΑΖ΄ + ΑΕ΄ + (ΔΘ − ΔΗ)· ἀλλὰ ΘΚ΄ = Π΄Ν΄ = ΟΝ + (ΔΘ − ΔΗ)· λοιπὸν ΑΖ΄ + ΑΕ΄ = ΟΝ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ΄.

Πρόβλημα.

Εκ μιᾶς τῶν κορυφῶν ἑνὸς τετραγώνου, νὰ ἄξωμεν μίαν εὐθεῖαν τοιαύτην, ὥστε τὸ διαχωριζόμενον μέρος μεταξὺ τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραγώνου, νὰ ἦναι ἴσον μὲ μίαν δεδομένην εὐθεῖαν.

Εστω ΑΒΓΔ (Σχ. 21) ἓν τετράγωνον, ἐκ τῆς κορυφῆς Α τοῦ ὁποίου ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΕΖ εἰς τρόπον ὥςε τὸ μέρος ΕΖ τὸ διαχωριζόμενον μεταξὺ τῶν πλευρῶν ΓΔ καὶ ΒΓ ἢ τῶν προεκβολῶν των νὰ ἦναι ἴσον μὲ μίαν δεδομένην εὐθεῖαν.

Ανάλυσις.

Ας ἀχθῇ ἡ ΖΗ κάθετος εἰς τὴν ΑΖ, καὶ ἐκ τῆς στιγμῆς Η ὅπου αὕτη ἡ εὐθεῖα συναπαντᾷ τὴν ΑΒ ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τῆς ΒΓ ἐκβαλλομένης ἡ κάθετος ΗΘ· καὶ ἂς φερθῇ ἡ ΕΗ.

Η Γωνία ΕΖΘ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ΖΕΓ, ΕΓΖ ἢ μὲ ΖΕΓ + ΕΓΖ· ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ ἴση μὲ ΕΖΗ + ΗΖΘ, φανερὸν εἶναι ὅτι μὲ τὸ νὰ ἦναι ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΕΓΖ, ΕΖΗ ἴση μὲ μίαν ὀρθὴν, αἱ γωνίαι ΓΕΖ καὶ ΗΖΘ εἶναι ἴσαι, καὶ τὰ τρίγωνα ΑΕΔ καὶ ΖΗΘ εἶναι λοιπὸν ἴσα, ἐπειδὴ ἔχουν τὰς γωνίας

των ἀμοιβαίως ἴσας, καὶ τὴν πλευρὰν ΑΔ ἴσην μὲ τὴν ΘΗ· ἕπεται ἐκ τούτου ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΖΗ· ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΕΖΗ καὶ ΕΔΗ μὲ τὸ νὰ ἦναι ὀρθογώνια, ἔχομεν $EZ^2 + ZH^2 = EH^2 = E\Delta^2 + \Delta H^2$, ἤ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, $EZ^2 + AE^2 = E\Delta^2 + \Delta H^2$. Ἀλλὰ $AE^2 = A\Delta^2 + E\Delta^2$, λοιπὸν $EZ^2 + A\Delta^2 + \Delta E^2 = E\Delta^2 + \Delta H^2$. Ἐκ τῆς ὁποίας ἐξισώσεως συνάγομεν $EZ^2 + A\Delta^2 = \Delta H^2$.

Ἐκ τοῦ τελευταίου τούτου ἐξαγομένου, φανερὸν γίνεται, ὅτι ΔΗ, καὶ διὰ τοῦτο ΑΗ, εἶναι γνωσταί. Ἐπειδὴ δὲ ΕΖ καὶ ΑΔ εἶναι δεδομέναι, καὶ ἡ ὀρθὴ γωνία ΔΖΗ θέλει ἔχει τὴν κορυφὴν ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις ἔχει διάμετρον τὴν ΑΗ, ἡ κορυφὴ Ζ ἢ Ζ' εἶναι προσδιορισμένη· διότι αὕτη εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ εἰρημένου κύκλου μὲ τὴν εὐθεῖαν ΒΘ. Οὕτως ἡ ΑΕΖ εἶναι γνωστή.

Σύνθεσις.

Ἂς ληφθῇ ἡ ΑΙ ἴση μὲ τὴν δεδομένην εὐθεῖαν· ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΙ, καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΑΔ ἕως εἰς τὸ Η, μίαν ποσότητα ἴσην μὲ τὴν ΔΙ. Ἐπὶ τῆς ΑΗ, ὡς διαμέτρου, ἂς γραφθῇ ἡμιπεριφέρεια καὶ ἐκ τῆς σιγμῆς Ζ ἢ Ζ' τῶν κοινῶν τομῶν της μὲ τὴν ΒΓ ἂς φερθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΕΖ ἢ ΑΕ'Ζ'· λέγω, ὅτι τὸ ἐκτὸς μέρος ταύτης τῆς γραμμῆς ΕΖ εἶναι ἴσον μὲ τὴν ΑΙ.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τοῦτο, ἐπιζευγνύομεν τὰς ΖΗ, ΕΗ· καὶ ἐπὶ τῆς ΒΖ ἄγομεν τὴν κάθετον

ΗΘ· φανερὸν εἶναι ὅτι $\overline{ΕΖ}^2 + \overline{ΖΗ}^2 = \overline{ΕΔ}^2 + \overline{ΔΗ}^2$. Ἐπειδὴ δὲ ΖΗ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΕ, διὰ τοῦτο $\overline{ΕΖ}^2 + \overline{ΑΕ}^2 = \overline{ΕΔ}^2 + \overline{ΔΗ}^2$. Ἀλλὰ $\overline{ΑΕ}^2 = \overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΕΔ}^2$ καὶ $\overline{ΔΗ}^2 = \overline{ΔΙ}^2 = \overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΑΙ}^2$· λοιπὸν $\overline{ΕΖ}^2 + \overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΕΔ}^2 = \overline{ΕΔ}^2 + \overline{ΑΔ}^2 + \overline{ΑΙ}^2$· ὅθεν ΕΖ = ΑΙ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ'.

Πρόβλημα.

Δεδομένης τῆς βάσεως ΑΓ ἑνὸς τριγώνου (σχ. 22.), τοῦ ὕψους του ΑΔ καὶ τοῦ ὀρθογωνίου τῶν δύο πλευρῶν νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον.

Ἀνάλυσις.

Ας ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον. Ας διέλθῃ εἰς κύκλος ἐξ αὐτοῦ, καὶ ἂς φερθῇ ἡ ΒΔ, καθὼς καὶ αἱ ἀκτῖνες ΑΕ καὶ ΓΕ. Ἐπειδὴ τὸ δεδομένον ὀρθογώνιον ΑΒ×ΒΓ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΒΔ×ΒΖ, ἐξ αἰτίας τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΒΖΓ, τὸ δεύτερον τοῦτο ὀρθογώνιον εἶναι παρομοίως γνωστόν. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὕψος ΒΔ εἶναι δεδομένον, διὰ τοῦτο ἡ διάμετρος ΒΖ, καὶ αἱ ἀκτῖνες ΑΕ, ΓΕ εἶναι προσδιορισμέναι· ἡ βάσις δὲ ΑΓ εἶναι δεδομένη, λοιπὸν αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι προσδιορισμέναι· τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὸ κέντρον Ε καὶ τὸν κύκλον ΑΒΓΖ. Περιπλέον τὸ ἀπόστημα τῆς κορυφῆς Β ἀπὸ τὴν βάσιν, ἐπειδὴ εἶναι δεδομένον, φανερὸν εἶναι, ὅτι ἡ κορυφὴ αὕτη πρέπει νὰ εὑρίσκεται ἐπάνω εἰς μίαν παράλληλον τῆς ΑΓ ἠγμένην εἰς ἓν διάστημα σον μὲ

τὸ δεδομένον ἀπόστημα καὶ ἡ στιγμὴ Β δίδεται διὰ τῆς κοινῆς τομῆς ταύτης τῆς παραλλήλου καὶ τῆς περιφερείας ΑΒΖΓ.

Σύνθεσις.

Επὶ τῆς ΒΔ ἂς κατασκευασθῇ ὃν ὀρθογώνιον ΒΖ×ΒΔ ἴσον μὲ τὸ δεδομένον. Επὶ τῆς ΑΓ ἂς σχηματισθῇ τὸ τρίγωνον ΑΕΓ, τὸ ὁποῖον ἔχει ἑκάστην τῶν πλευρῶν ΑΕ, ΓΕ ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τῆς μεγαλητέρας πλευρᾶς τοῦ τοιούτου ὀρθογωνίου. Εκ τῆς στιγμῆς Ε μὲ τὴν ἀκτῖνα ΕΑ ἂς γραφθῇ περιφέρεια κύκλου. Επὶ τῆς ΑΓ ἂς ὑψωθῇ ἡ κάθετος ΒΔ ἴση μὲ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, καὶ ἐκ τῆς Β ἂς φερθῇ μία παράλληλος τῆς ΑΓ, ἥτις συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν εἰς Β ἢ Β'. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Επειδὴ φανερὸν εἶναι, ὅτι τὸ ὕψος του εἶναι ἴσον μὲ τὸ δεδομένον ὕψος, καὶ περιπλέον τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ×ΒΓ ἴσον μὲ τὸ ΒΖ×ΒΔ, εἶναι ἴσον μὲ τὸ δεδομένον ὀρθογώνιον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ'.

Πρόβλημα.

Δεδομένης τῆς ὑποτεινούσης ἑνὸς ὀρθογωνίου, καὶ τῆς διαφορᾶς ἢ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον.

Ανάλυσις.

Ας ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶναι τὸ ΑΒΓ (σχ. 23.). Επὶ τῆς βάσεως ΑΒ ἢ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς της ἂς φερθῇ ἓν μῆκος ΒΔ ἢ ΒΕ ἴσον μὲ τὴν κάθετον ΒΓ· καὶ ἐπιζευγνύομεν τὴν ΓΔ ἢ ΓΕ.

Τὰ τρίγωνα ΓΒΔ καὶ ΓΒΕ εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἰσοσκελῆ· διὰ τοῦτο ἑκάστη τῶν γωνιῶν Δ καὶ Ε εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ μιᾶς ὀρθῆς. Τὸ ἄθροισμα ΑΔ τῶν δύο πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ, ἐπειδὴ εἶναι δεδομένον, ἡ σιγμὴ Δ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ εὐθεῖα ΔΓ, εἶναι γνωσαὶ, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἡ εὐθεῖα αὕτη κάμνει μὲ τὴν ΔΑ ὀρθὴν γωνίαν· ἐπειδὴ ἡ ΑΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο πλευρῶν, ἥτις εἶναι δεδομένη, τότε ἡ σιγμὴ Ε εἶναι προσδιορισμένη, καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΓ εἶναι γνωστοῦ μεγέθους καὶ θέσεως. Καὶ εἰς τὰς δύο ταύτας περιστάσεις, ἐπειδὴ ἡ ὑποτείνουσα ΑΓ εἶναι δεδομένη, ἡ σιγμὴ Γ πρέπει νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ γραφομένου κύκλου ἐκ τῆς σιγμῆς Α, ὡς κέντρου, μὲ τὴν ἀκτῖνα ΑΓ· ἡ σιγμὴ λοιπὸν αὕτη προσδιορίζεται διὰ τῆς κοινῆς τομῆς τούτου τοῦ κύκλου καὶ τῆς εὐθείας ΓΔ ἢ ΓΕ.

Σύνθεσις.

Ας λάβωμεν ΑΔ ἢ ΑΕ ἴσην μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῆς ΑΒ καὶ ΒΓ. Ας ἀχθῇ ἡ ΔΓ ἢ ΕΓ ποιοῦσα μὲ τὴν ΑΔ γωνίαν ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ μιᾶς ὀρθῆς. Εκ τῆς σιγμῆς Α, ὡς κέντρου, μὲ τὴν ἀκτῖνα ΑΓ ἂς γραφθῇ κύκλος, ὅστις συναπαντᾷ τὴν ΔΓ ἢ τὴν ΕΓ εἰς τὴν σιγμὴν Γ, καὶ ἐκ ταύτης τῆς σιγμῆς ἂς φερθῇ ἡ κάθετος ΓΒ. Τὸ τρίγωνον ΑΓΒ πληροῖ εἰς τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος.

Επειδὴ εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ τρίγωνα ΓΒΔ καὶ ΓΒΕ εἶναι ἰσοσκελῆ, καὶ διὰ τοῦτο ΑΔ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα, καὶ ΑΕ μὲ τὴν διαφορὰν τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ'.

Πρόβλημα.

Νὰ εὕρωμεν τὴν κατασκευὴν τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου.

1.ον Ἐπειδὴ κάθε κανονικὸν πολύγωνον δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν κύκλον, διὰ τοῦτο αἱ γωνίαι εἰς τὸ κέντρον τοῦ πολυγώνου ἢ τοῦ κύκλου, αἱ σχηματιζόμεναι ἐκ τῶν ἀκτίνων τῶν ἀγομένων εἰς τὰς διαφόρους κορυφὰς τοῦ πολυγώνου εἶναι ὅλαι ἴσαι· διότι τὰ τόξα τὰ ὁποῖα μετροῦν ταύτας τὰς γωνίας ὑποτείνονται ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου αἵτινες εἶναι ἴσαι. Λοιπὸν, ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ εἶναι ἴσαι, ἕπεται ὅτι καὶ τὰ τόξα εἶναι ἴσα, ἑπομένως καὶ αἱ γωνίαι αἱ σχηματιζόμεναι εἰς τὸ κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου κατὰ τὸν εἰρημένον τρόπον, εἶναι ἴσαι. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν τῶν σχηματιζομένων ὁλόγυρα τοῦ κέντρου εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρας ὀρθὰς· διὰ τοῦτο ἑκάστη τῶν εἰς τὸ κέντρον γωνιῶν προσδιορίζεται ποῖον μέρος τεσσάρων ὀρθῶν εἶναι ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Ἑκάστη λοιπὸν γωνία εἰς τὸ κέντρον τοῦ πενταγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ πέμπτον μέρος τεσσάρων ὀρθῶν, τοῦ δὲ δεκαγώνου μὲ τὸ δέκατον μέρος τεσσάρων ὀρθῶν. Τώρα, ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς ἑνὸς πενταγώνου φέρωμεν εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς τῶν πλευρῶν του δύο εὐθείας, τότε ἡ σχηματιζομένη ἐξ αὐτῶν γωνία ἔχουσα τὴν κορυφήν της ἐπὶ τῆς περιφερείας ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου μιᾶς τῶν πλευρῶν. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ τοιοῦτον τόξον, ὡς εἴπομεν, εἶναι τὰ 4 πέμπτα μιᾶς ὀρθῆς, ἢ ἓν πέμπτον 4 ὀρθῶν, τὸ ἥμισυ θέλει εἶναι ἓν δέκατον

4 ὀρθῶν, καὶ ἐπειδὴ διὰ νὰ σχηματισθῇ αὕτη ἡ γωνία φέρομεν δύο χορδὰς, ἑκάστη τῶν ὁποίων ὑποτείνει ἓν τόξον διπλάσιον τοῦ ὑποτεινομένου ἀπὸ τὴν πλευρὰν τοῦ πενταγώνου, διὰ τοῦτο αἱ δύο αὗται χορδαὶ εἶναι ἴσαι, καὶ σχηματίζουν μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ πενταγώνου ἓν τρίγωνον ἰσοσκελὲς, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἰς τὴν κορυφὴν ἔχει διὰ μέτραν τὸ δέκατον μέρος 4 ὀρθῶν, δηλαδὴ 2 πέμπτα μιᾶς ὀρθῆς, ἢ ἓν πέμπτον δύο ὀρθῶν. Ἐπειδὴ δὲ αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου ὁμοῦ λαμβανόμεναι ἰσοδυναμοῦν μὲ δύο ὀρθὰς, ἕπεται ὅτι αἱ πρὸς τὴν βάσιν γωνίαι τοῦ τοιούτου τριγώνου εἶναι ἴσαι μὲ 4 πέμπτα δύο ὀρθῶν, καὶ οὕτως ἑκάστη εἶναι δύο πέμπτα δύο ὀρθῶν. Λοιπὸν ἑκάστη τῶν γωνιῶν τῆς βάσεως εἶναι διπλασία τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι· ἠξεύροντες νὰ κατασκευάσωμεν ἓν τοιοῦτον τρίγωνον θέλομεν γνωρίσει τὴν πλευρὰν τοῦ πενταγώνου· διότι αὕτη εἶναι ἴση μὲ τὴν βάσιν τούτου τοῦ τριγώνου, καὶ ὅταν εἰς ἕνα δεδομένον κύκλον ἐγγράψωμεν ἓν τοιοῦτον τρίγωνον, ἡ βάσις αὐτοῦ θέλει παρισάνει τὴν πλευρὰν τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου πενταγώνου.

2.ον Ας παρατηρήσωμεν ποίας ἄλλας ἰδιότητας ἔχει τὸ τοιοῦτον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ὑποθέτω ὅτι εἶναι τὸ ΑΒΓ (σχ. 24), δηλαδὴ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον τὸ ὁποῖον ἔχει ἑκάστην τῶν γωνιῶν Α καὶ Γ διπλασίαν τῆς Β. Ας φέρωμεν τὴν ΓΔ ὥστε νὰ τέμνῃ δίχα τὴν γωνίαν Γ· τότε ἡ γωνία ΔΓΒ θέλει εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΒΔ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ πλευρὰ ΔΓ = ΔΒ. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΒΑΓ καὶ ΓΑΔ, ἔχουν τὴν γωνίαν ΑΒΓ = ΔΓΑ, τὴν δὲ ΒΑΓ κοινὴν· διὰ τοῦτο καὶ ἡ ΑΓΒ = ΓΔΑ· ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΓΒ = ΒΑΓ

ἕπεται ὅτι ΓΔΑ = ΒΑΓ, δηλαδὴ τὸ τρίγωνον ΔΓΑ εἶναι ἰσοσκελὲς, τοῦτ' ἔστιν ἔχει τὴν ΓΔ = ΑΓ· ἀλλ' ἐπειδὴ δέδεικται ἡ ΒΔ = ΔΓ, διὰ τοῦτο καὶ ΒΔ = ΑΓ, δηλαδὴ τὸ τμῆμα ΒΔ μιᾶς τῶν δύο ἴσων πλευρῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, εἶναι ἴσον μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ πενταγώνου.

Ας θεωρήσωμεν τώρα ποῖον μέρος ταύτης τῆς πλευρᾶς εἶναι τὸ ΔΒ. Συγκρίνοντες τὰ δύο τρίγωνα ΒΑΓ καὶ ΔΓΑ τὰ ὁποῖα ἐκ τῶν ἀνωτέρω εἶναι ὅμοια, ἔχομεν ΒΑ: ΑΓ:: ΑΓ: ΑΔ. Λοιπὸν ἡ ΑΓ, δηλαδὴ τὸ τμῆμα ΒΔ εἶναι τοιοῦτον, ὥστε ἡ μία τῶν ἴσων πλευρῶν διαιρεῖται εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν μίαν εὐθεῖαν ὡς τὴν ΑΒ (σχ. 24.) καὶ διαιρέσωμεν αὐτὴν εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον εἰς τὴν στιγμὴν Δ, καὶ ἀφ' οὗ κάμωμεν κέντρα τὴν Δ καὶ Α, γράψωμεν δύο τόξα μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὸ μεγαλήτερον τμῆμα ΑΒ· τὰ τοιαῦτα τόξα θέλει τέμνωνται εἰς τὴν στιγμὴν Γ, ὥστε τὸ τρίγωνον ΔΓΑ εἶναι ἰσοσκελὲς, καὶ περιπλέον ἡ πλευρὰ ΑΓ εἶναι ἴση μὲ τὸ μεῖζον τμῆμα ΔΒ, δηλαδὴ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ πενταγώνου. Ἐὰν λοιπὸν θέλωμεν νὰ ἐγγράψωμεν εἰς ἕνα κύκλον ἓν κανονικὸν πεντάγωνον, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, καὶ νὰ κατασκευάσωμεν, ὡς ἀνατέρω, τὸ τρίγωνον ΔΑΓ· τότε λέγομεν. Επειδὴ Α + Γ + Β = μὲ δύο ὀρθὰς καὶ ἡ Α = Γ = 2Β, ἔχομεν 2Β + 2Β + Β = 2 ὀρθὰς, δηλαδὴ 5Β = 2 ἢ Β = μὲ ἓν πέμπτον δύο ὀρθῶν, καὶ ἐπειδὴ τὸ ἥμισυ τοῦ ὑποτεινομένου τόξου ἀπὸ τὴν χορδὴν ΑΓ εἶναι τὸ μέτρον τῆς Β, διὰ τοῦτο τὸ τοιοῦτον τόξον εἶναι ἴσον μὲ 2 πέμπτα δύο ὀρθῶν

ἢ ἓν πέμπτον τεσσάρων ὀρθῶν, δηλαδὴ ἡ ὅλη περιφέρεια περιέχει πέντε τοιαῦτα ἴσα τόξα, τοῦτ' ἔστιν ἐγγράφεται τὸ κανονικὸν πεντάγωνον. Ἡ αὐτὴ κατασκευὴ χρησιμεύει διὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ δεκαγώνου. Ἀρκεῖ εἰς ἕνα κύκλον νὰ διαιρέσωμεν εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον τὴν ἀκτῖνα, ἐπειδὴ τότε ἡ γωνία Β τοῦ τριγώνου εὑρίσκεται εἰς τὸ κέντρον, καὶ τὸ τόξον τῆς χορδῆς ΑΓ μετρεῖ τὴν γωνίαν Β, καὶ ἐπειδὴ αὕτη εἶναι ἴση μὲ ἓν πέμπτον δύο ὀρθῶν, θέλει εἶναι ἴση μὲ ἓν δέκατον τεσσάρων ὀρθῶν· καὶ ἐπειδὴ τὸ τόξον τῆς χορδῆς ΑΓ εἶναι τὸ δέκατον μέρος τῆς ὅλης περιφερείας, ἕπεται ὅτι ἡ χορδὴ ΑΓ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ δεκαγώνου.

Τώρα ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 24 δὶς) διαιρεῖται εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, τοῦτ' ἔστιν ὡς ΑΒ: ΒΓ:: ΒΓ: ΑΓ, δηλαδὴ $\overline{\Gamma B}^2 = AB \times A\Gamma$· προσθέτοντες εἰς τὰ δύο μέλη ταύτας τῆς ἰσότητος τὸ ὀρθογώνιον ΒΑ×ΒΓ συνάγομεν $\overline{B\Gamma}^2 + AB \times B\Gamma = AB \times A\Gamma + AB \times B\Gamma$ ἢ $AB\,(A\Gamma + \Gamma B)$ ἢ $\overline{AB}^2$· ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΑΒ μίαν ποσότητα ἴσην ἐκ τῆς Β ἕως τῆς Δ. Φανερὸν εἶναι ὅτι $B\Gamma \times \Gamma\Delta = \overline{B\Delta}^2$· ἂς χηφθῇ ἡ σιγμὴ ΕΓ ὥστε ΕΔ = ΑΔ, αἱ εὐθεῖαι ΓΔ καὶ ΒΕ εἶναι τὸ ἄθροισμα καὶ ἡ διαφορὰ τῆς ΓΕ καὶ ΒΕ. Λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΓΔ×ΒΓ ἢ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ τετραγώνου τῆς ΓΕ καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς ΒΕ. Οὕτως $\overline{\Gamma E}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2$· ἂς ὑψωθῇ ἡ κάθετος ΒΖ = ΑΒ· καὶ ἂς

φανερὸν εἶναι ὅτι $EZ^2 = AB^2 + BE^2$ διὰ τοῦτο $EZ^2 = ΓE^2$ καὶ ἐπειδὴ EZ εἶναι δεδομένη, ἕπεται ὅτι καὶ ΓE καὶ BΓ εἶναι γνωραί.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ'.

Πρόβλημα.

Νὰ εὕρωμεν τὰς ἀναγκαίας συνθήκας διὰ τὴν τριτομὴν τῆς γωνίας.

Ἔστω ABΓ (σχ. 25) μία δεδομένη γωνία, καὶ ἧς ἡποίας ABΔ ἔστω τὸ τριτημόριον. Ἐκ τῆς κορυφῆς B, ὡς κέντρου, καὶ μὲ ἀπροσδιόριστον ἀκτῖνα ἂς γραφθῇ εἷς κύκλος· ἂς φερθῇ ἡ ΔZ παράλληλος τῆς AB· ἂς ἑνωθῇ ἡ στιγμὴ Z μὲ τὴν Γ, καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΓZ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν AB εἰς τὸ H. Ἐπειδὴ ἡ χορδὴ ΔZ εἶναι παράλληλος τῆς AE, τὸ τόξον EZ εἶναι ἴσον μὲ τὸ BΔ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ γωνία EBZ εἶναι ἴση μὲ τὴν ABΔ, τοῦτ' ἔστιν εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας ΔBΓ. Ἀλλ' ἡ τελευταία αὕτη γωνία εἶναι διπλασία τῆς γωνίας εἰς τὴν περιφέρειαν ΔZΓ ἢ τῆς ἴσης της BHZ, λοιπὸν αἱ γωνίαι BHZ καὶ HBZ εἶναι ἴσαι, καὶ τὸ τρίγωνον BZH εἶναι ἰσοσκελές.

Ἡ λύσις λοιπὸν τοῦ προτεθέντος προβλήματος ἀπαιτεῖ νὰ φέρωμεν τὴν ΓZH εἰς τρόπον ὥστε τὸ ἐκτὸς μέρος ZH νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.

Ἄλλη Λύσις.

Ἔστω ἡ γωνία ABΔ (σχ. 25 δὶς) τὸ τρίτον τῆς ABΓ· ἂς ὑψωθῇ ἡ κάθετος AΔΓ καὶ ἂς γραφθῇ τὸ ὀρθογώνιον BAΓE· ἂς ἐκβληθῶσιν αἱ εὐθεῖαι