ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

Πρόβλημα.

Διὰ δύο δεδομένων στιγμῶν νὰ κάμωμεν νὰ περάσῃ ἕνας κύκλος, ὅστις νὰ τέμνῃ εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν περιφέρειαν ἄλλου δεδομένου κύκλου.

Εστωσαν Α καὶ Β (Σχ. 12.) αἱ δύο στιγμαὶ διὰ τῶν ὁποίων μέλει νὰ διέλθῃ ἡ ζητουμένη περιφέρεια, ἡ ὁποία ὑποθέτω ὅτι εἶναι ἡ ΑΔΗΕΒ, ἥτις διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν δεδομένην περιφέρειαν. ΘΔΖΕ.

Ανάλυσις.

Εστωσαν Δ καὶ Ε αἱ στιγμαὶ τῶν κοινῶν τομῶν τῶν δύο κύκλων. Επειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, ΔΖΕ εἶναι ἡμιπεριφέρεια, ΔΕ εἶναι διάμετρος, ἐπὶ τῆς ὁποίας πρέπει νὰ εὑρίσκεται τὸ κέντρον Γ. Ας φερθῇ τώρα ἡ εὐθεῖα ΑΓ, καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἕως εἰς τὴν Ζ. Επειδὴ ΔΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΕ, εἶναι φανερὸν ὅτι ΑΓ×ΓΗ=ΓΔ=ΘΓ×ΓΖ. Αλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΘΓ×ΓΖ εἶναι δεδομένον, λοιπὸν γνωστὸν εἶναι καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ×ΓΗ. Καὶ ἐπειδὴ ΑΓ εἶναι γνωστὴ, διὰ τοῦτο γνωστὴ εἶναι καὶ ἡ ΓΗ, καὶ ἡ στιγμὴ Η εἶναι προσδιορισμένη. Αλλ' ἔχοντες τὰς τρεῖς στιγμὰς Α, Β, Η, μὲ εὐκολίαν γράφομεν τὸν κύκλον ΑΗΒ.

Σύνθεσις.

Εκ τῆς στιγμῆς Γ, κέντρου τοῦ δεδομένου κύκλου, ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΓΖ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ ταύτης τῆς γραμμῆς μίαν στιγμὴν Η, τοιαύτην ὥστε ΑΓ:ΘΓ::ΘΓ:ΓΗ.

Ο διερχόμενος κύκλος ἐκ τῶν τριῶν στιγμῶν Α, Β, Η, λέγω ὅτι διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν περιφέρειαν ΘΔΖΕ.

Τῷ ὄντι, διὰ μιᾶς τῶν στιγμῶν τῶν κοινῶν τομῶν ἂς ἄξωμεν τὴν διάμετρον ΔΓΙ ἡ ὁποία ἂς ἐκβληθῇ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὸν κύκλον ΑΗΒ εἰς Κ. Επειδὴ ΑΓ:ΘΓ::ΘΓ:ΓΗ, διὰ τοῦτο τὸ τετράγωνον τῆς ΘΓ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ×ΓΗ. Αλλὰ ΘΓ=ΔΓ×ΓΙ, λοιπὸν ΑΓ×ΓΗ=ΔΓ×ΓΙ. Καὶ ἐπειδὴ ΑΓ×ΓΗ=ΔΓ×ΓΚ, ἄρα καὶ ΔΓ×ΓΙ=ΔΓ×ΓΚ· τὸ ὁποῖον φανερόνει ὅτι ΓΙ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΚ, τοῦτ' ἔστι αἱ στιγμαὶ Ι καὶ Κ συγχέονται, καὶ ὁ κύκλος ΑΗΒ διέρχεται ἐκ τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ΘΖΕΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Πρόβλημα.

Νὰ διαιρέσωμεν μίαν δεδομένην εὐθεῖαν εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ κατασκευαζόμενον τετράγωνον ἐπὶ τοῦ πρώτου μέρους αὐτῆς νὰ ἦναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ κατασκευαζόμενον ὀρθογώνιον ἐπὶ τοῦ ἄλλου μέρους τῆς ἰδίας καὶ μιᾶς ἄλλης δεδομένης εὐθείας.

Εστω ΑΒ (Σχ. 13) μία εὐθεῖα δεδομένου μεγέθους, τῆς ὁποίας θὰ προσδιορισθῇ ἓν τμῆμα, τὸ τετράγωνον τοῦ ὁποίου νὰ ἦναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ κατασκευαζόμενον ὀρθογώνιον ἐπὶ τοῦ ὑπολοίπου τῆς γραμμῆς, καὶ ἐπὶ τῆς δεδομένης ἄλλης γραμμῆς Γ.

Ανάλυσις.

Ας ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ζητούμενον τμῆμα εἶναι ἡ ΑΗ. Ας ἐκβληθῇ ἡ ΒΑ κατὰ τὴν ΑΔ μίαν ποσότητα ἴσην μὲ τὴν Γ, καὶ ἐπὶ τῆς ΒΔ, ὡς διαμέτρου, ἂς γραφθῇ ἡμιπεριφέρεια, καὶ ἂς ὑψωθῇ ἡ κάθετος ΑΖ. Επειδὴ ΑΗ=ΑΔ×ΗΒ, ἕπεται ὅτι ΔΑ:ΑΗ::ΑΗ:ΗΒ·

ὅθεν, ἐν συνθέσει, ΔΑ : ΑΗ :: ΔΗ : ΑΒ· διὰ τοῦτο ΔΑ × ΑΒ = ΑΗ × ΔΗ. Ἀλλὰ, κατὰ τὴν ἰδιότητα τοῦ κύκλου, ΔΑ × ΑΒ = $\overline{\text{ΑΖ}}^2$, λοιπὸν ΑΗ × ΔΗ = $\overline{\text{ΑΖ}}^2$. Ἕπεται ἐκ τούτου ὅτι ΑΖ εἶναι μία ἐφαπτομένη ἠγμένη ἐκ τῆς στιγμῆς Η εἰς τὸ ἡμικύκλιον τὸ ὁποῖον ἔχει ΔΑ διὰ διάμετρον. Ἂς λάβωμεν τὴν στιγμὴν τῆς ἡμισείας τῆς ΑΔ, τὴν Ε, καὶ ἂς φέρωμεν τὴν ΕΖ. Ἐπειδὴ ΑΗ × ΔΗ = $\overline{\text{ΑΖ}}^2$, ἐὰν προσθέσωμεν $\overline{\text{ΕΑ}}^2$ εἰς τὰ δύο μέλη ταύτης τῆς ἐξισώσεως, εὑρίσκομεν ΑΗ × ΔΗ + $\overline{\text{ΕΑ}}^2$ = $\overline{\text{ΕΖ}}^2$. δηλαδὴ $\overline{\text{ΕΗ}}^2$ (1) εἶναι ἴσον μὲ $\overline{\text{ΑΖ}}^2$ + $\overline{\text{ΕΑ}}^2$ τοῦτ' ἔστι $\overline{\text{ΕΖ}}^2$. Λοιπὸν ΕΗ εἶναι ἴση μὲ ΕΖ καὶ διὰ τοῦτο ἡ στιγμὴ Η εἶναι προσδιορισμένη.

Σύνθεσις

Ἀφ' οὗ ἐκβάλωμεν τὴν ΑΒ κατὰ μίαν ποσότητα ΑΔ ἴσην μὲ τὴν Γ καὶ γράψωμεν ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ ἡμικύκλιον, ὑψώνομεν τὴν κάθετον ΑΖ, καὶ ἑνώνομεν τὴν στιγμὴν Ε τῆς ἡμισείας τῆς ΑΔ μὲ τὴν στιγμὴν Ζ, καὶ λαμβάνομεν τὴν ΕΗ ἴσην μὲ τὴν ΕΖ. Λέγω ὅτι τὸ σχηματιζόμενον τετράγωνον εἰς τὸ τμῆμα ΑΗ, οὕτω προσδιορισμένον ἐπὶ τῆς ΑΒ, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΗΒ ἐπὶ τὴν δεδομένην γραμμήν.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΕΖΑ εἶναι ὀρθογώνιον, ἔχομεν $\overline{\text{ΕΖ}}^2$ = $\overline{\text{ΕΑ}}^2$ + $\overline{\text{ΑΖ}}^2$· λοιπὸν $\overline{\text{ΑΖ}}^2$ = $\overline{\text{ΕΖ}}^2$ − $\overline{\text{ΕΑ}}^2$ = $\overline{\text{ΕΗ}}^2$ − $\overline{\text{ΕΑ}}^2$ = (ΕΗ + ΕΑ) (ΕΗ − ΕΑ) = ΔΗ × ΑΗ.

---

(1) ΑΗ = ΕΗ − ΕΑ, ΕΗ + ΑΕ = ΔΗ, καὶ ΑΗ × ΔΗ = $\overline{\text{ΕΗ}}^2$ − $\overline{\text{ΑΕ}}^2$

Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος $\overline{AZ}^2 = ΔA \times AB$, λοιπὸν $ΔA \times AB = ΔH \times AH$· ὅθεν προκύπτει $AH : AB :: ΔA : ΔH$. Τώρα ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι $AB - AH$ ἢ $HB : AH :: ΔH - ΔA$ ἢ $AH : ΔA$· λοιπὸν $\overline{AH}^2 = HB \times ΔA = HB \times Γ$.

Πόρισμα. Δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἐὰν ἡ δεδομένη γραμμὴ ἦναι ἴση μὲ τὴν AB, τότε $\overline{AH}^2 = AB \times BH$, τοῦτ' ἔστιν ὅτι ἡ εὐθεῖα AB διαιρεῖται εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον εἰς τὴν στιγμὴν H. Ἡ κατασκευὴ τότε ταυτίζεται μὲ ἐκείνην τῶν στοιχείων, ἥτις ἄλλο δὲν εἶναι παρὰ μια μερικὴ περίγασις τῆς ἀνωτέρω προτάσεως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Πρόβλημα.

(Σχ. 14 καὶ 14 δίς). Νὰ διαιρέσωμεν μίαν δεδομένην εὐθεῖαν εἰς δύο μέρη τὰ ὁποῖα νὰ ἦναι μεταξύ των εἰς λόγον ὑποπολλαπλάσιον δύο ἄλλων δεδομένων μερῶν τῆς ἰδίας εὐθείας.

Ας ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δεδομένη εὐθεῖα AB (Σχ. 14) ἐδιαιρέθη ὥστε τὰ τμήματα AΔ, BΔ εἶναι μεταξύ των εἰς λόγον ὑποδιπλάσιον τῶν δεδομένων τμημάτων AΓ, BΓ.

Πρώτη περίστασις. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο δεδομένων τμημάτων, ἂς ἦναι ἴσον μὲ τὴν δεδομένην εὐθεῖαν.

Ἡ στιγμὴ Γ, κοινὴ τῶν δύο τμημάτων, εὑρίσκεται τότε μεταξὺ τῆς A καὶ B.

Ἀνάλυσις.

Ἐπὶ τῆς ΑΒ (Σχ. 14) ἂς γραφθῇ ἡμικύκλιον· ἂς ὑψωθῇ ἡ κάθετος ΓΕ, καὶ ἂς φερθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΕ, ΒΕ καὶ ἡ ΕΔ ἢ ΕΔ΄. Επειδὴ ἡ ΑΕΒ εἶναι ὀρθὴ γωνία, ὁ λόγος τῆς ΑΕ πρὸς ΒΕ εἶναι ὑποδιπλάσιος τῆς ΑΓ πρὸς ΒΓ, καὶ διὰ τοῦτο ΑΕ:ΒΕ::ΑΔ:ΒΔ ἢ ΑΔ΄:ΒΔ΄. Η ἀναλογία αὕτη κάμνει νὰ γνωρίσωμεν ὅτι ἡ γωνία ΑΕΒ ἢ τὸ συμπλήρωμά της ΑΕΖ, διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τῆς εὐθείας ΕΔ ἢ ΕΔ΄· ἀλλ' ἡ κάθετος καὶ τὸ ἡμικύκλιον εἶναι δεδομένα, λοιπὸν ἡ κορυφὴ Ε, ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΕΔ ἢ ΕΔ΄ καὶ αἱ στιγμαὶ τῆς διαιρέσεως Δ καὶ Δ΄ εἶναι παρομοίως προσδιορισμένα.

Σύνθεσις.

Ἀφ' οὗ γράψωμεν ἐπὶ τῆς ΑΒ μίαν ἡμιπεριφέρειαν, ὑψώνομεν τὴν κάθετον ΓΕ, καὶ ἐπιζευγνύομεν τὰς ΑΕ, ΕΒ· διαιροῦμεν εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν ΑΕΒ διὰ τῆς ΕΔ ἢ τὸ συμπλήρωμά της ΑΕΖ διὰ τῆς εὐθείας Δ΄Ε· λέγω ὅτι τὰ ἐντὸς τμήματα ΑΔ, ΔΒ ἢ τὰ ἐκτὸς τμήματα ΑΔ΄, Δ΄Β θέλουν εἶναι εἰς λόγον ὑποδιπλάσιον τῆς ΑΓ πρὸς ΓΒ. Επειδὴ ἐκ τῆς κατασκευῆς ΑΕ:ΒΕ::ΑΔ:ΔΒ ἢ ΑΔ΄:ΒΔ΄· καὶ τὸ τρίγωνον ΑΕΒ ἐπειδὴ εἶναι ὀρθογώνιον, ὁ λόγος τῆς ΑΕ πρὸς ΒΕ εἶναι ὑποδιπλάσιος ἐκείνου τῆς ΑΓ πρὸς ΒΓ· λοιπὸν τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖ διὰ τὸν λόγον τῆς ΑΔ πρὸς ΒΔ ἢ ΑΔ΄ πρὸς ΒΔ΄.

Δευτέρα περίστασις. Η διαφορὰ τῶν δύο δεδομένων τμημάτων ἔστω ἴση μὲ τὴν δεδομένην γραμμήν· τότε ἡ στιγμὴ Γ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΒ.

Ἀνάλυσις.

(Σχ. 14 δίς). Ἐπὶ τῆς ΑΒ ἂς γραφθῇ ἡμιπεριφέρεια, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΓΕ· ἂς φερθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΕ, ΒΕ καὶ ΕΔ ἢ Δ΄Ε. Τὰ τρίγωνα ΑΓΕ, ΕΓΒ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν μίαν γωνίαν κοινὴν τὴν ΕΓΒ καὶ περιπλέον τὰς γωνίας ΓΕΑ, ΓΒΕ ἴσας. Ἐπειδὴ ἑκάστη ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΕ, ἕπεται διὰ τοῦτο ὅτι ΑΓ:ΓΕ::ΓΕ:ΒΓ. Ἐπειδὴ δὲ ΓΕ εἶναι ἐφαπτομένη, διὰ τοῦτο $\overline{\text{ΓΕ}}^{2}$ = ΓΒ^{2}ΧΓΑ· λοιπὸν ΑΕ:ΓΕ::ΑΓ:ΒΓ^{2}ΧΓΑ, ἢ ΑΓ:ΓΕ::ΑΓ:ΒΓ. Συμπλέκοντες ταύτην τὴν ἀναλογίαν μὲ τὴν ἀνωτέρω, συνάγομεν ὅτι ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΒΓ εἶναι εἰς λόγον ὑποδιπλάσιον τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ ἢ ΓΕ:ΒΓ::ΑΓ:ΒΓ^{2}. Ἀλλ' εἰς τὰ αὐτὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΕ:ΒΕ::ΓΕ:ΒΓ· λοιπὸν ΑΕ:ΒΕ::$\sqrt{\text{ΑΓ}}$:$\sqrt{\text{ΒΓ}}$::ΑΔ:ΒΔ ἢ ::ΑΔ΄:ΒΔ΄ καὶ διὰ τοῦτο ἡ γωνία ΑΕΒ διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τῆς ΕΔ, ἢ τὸ συμπλήρωμάτης ΑΕΖ διὰ τῆς ΕΔ΄.

Σύνθεσις.

Ἂς γραφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμιπεριφέρεια, καὶ ἂς ἀχθῇ εἰς αὐτὴν ἡ ἐφεπτομένη ΓΕ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΕ, ΒΕ. Ἂς διαιρεθῇ εἰς δύο ἴσα μέρη ἡ γωνία ΑΕΒ ἢ τὸ συμπλήρωμάτης διὰ τῆς ΕΔ ἢ ΕΔ΄. Τὰ ἐσωτερικὰ τμήματα ΑΔ, ΒΔ ἢ τὰ ἐξωτερικὰ τμήματα ΑΔ΄, ΒΔ΄ θέλουν εἶναι εἰς λόγον ὑποδιπλάσιον ἐκείνου τῆς ΑΓ πρὸς ΒΓ.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΓΕΑ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΒΕ, καὶ ΒΓΕ κοινὴ εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΕ, τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ὅμοια· καὶ διὰ τοῦτο ΑΓ:ΓΕ::ΓΕ:ΒΓ. Λοιπὸν ὁ λόγος τῆς ΓΕ πρὸς

ΒΓ εἶναι ὑποδιπλάσιος τοῦ λόγου τῆς ΑΓ πρὸς ΒΓ. Περιπλέον διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ἰδίων τριγώνων ἔχομεν, ΑΕ: ΒΕ:: ΓΕ: ΒΓ· καὶ διὰ τοῦτο ΑΕ εἶναι πρὸς τὴν ΒΕ εἰς λόγον ὑποδιπλάσιον τῆς ΑΓ πρὸς ΒΓ. Ἀλλὰ ΑΕ: ΒΕ :: ΑΔ: ΒΔ ἢ ΑΔ': ΒΔ'.. Λοιπὸν ὁ λόγος τῆς ΑΔ πρὸς ΒΔ ἢ τῆς ΑΔ' πρὸς ΒΔ' εἶναι ὑποδιπλάσιος ἐκείνου τῆς ΑΓ πρὸς ΒΓ.

Πόρισμα. Εἰς ταύτην τὴν δευτέραν περίστασιν, ἡ γωνία ΓΔΕ, ἐπειδὴ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ΔΕΒ, ΔΒΕ, ἤ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΔΕΑ, ΑΕΓ, ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ΓΔΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΓΕΔ, καὶ ὅτι τὸ τρίγωνον ΓΔΕ εἶναι ἰσοσκελὲς· περιπλέον, ἐξ αἰτίας τῆς ὑποθέσεως, Δ'ΕΖ = Δ'ΕΑ = Δ'ΕΓ + ΑΕΓ. Ἀλλ' ἀπὸ ἄλλο μέρος Δ'ΕΖ = ΓΔ'Ε + Δ'ΒΕ = ΓΔ'Ε + ΑΕΓ, καὶ ἡ σύγκρισις τῶν δύο τούτων ἐξαγομένων μᾶς κάμνει νὰ γνωρίσωμεν ὅτι αἱ γωνίαι ΓΔ'Ε καὶ Δ'ΕΓ εἶναι ἴσαι καὶ ὅτι τὸ τρίγωνον Δ'ΓΕ εἶναι ἰσοσκελὲς. Λοιπὸν ΔΕ = ΓΔ = ΓΔ'.

Λοιπὸν χωρὶς νὰ ἦναι ἀνάγκη νὰ διαιρεθῇ ἡ γωνία ΑΕΒ ἢ ΑΕΖ εἰς δύο ἴσα μέρη, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν στιγμὴν Δ ἢ Δ' διὰ μέσου τῆς ἐφαπτομένης ΓΑ, ἥτις εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν τμημάτων ΑΓ, ΒΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

Πρόβλημα.

Νὰ εὕρωμεν μίαν στιγμὴν ἐπὶ τῆς διαμέτρου τινὸς κύκλου τοιαύτην, ὥστε ἐὰν ἄξωμεν ἐκ ταύτης τῆς στιγμῆς, ὑπὸ μίαν δεδομένην κλίσιν, μίαν εὐθεῖαν ἥτις νὰ τελειόνῃ εἰς τὴν περιφέρειαν, τὸ τετράγωνον ταύτης τῆς εὐθείας νὰ ἦναι εἰς δεδομένον λόγον μὲ τὸ ὀρθογώνιον τῶν δύο τμημάτων τῆς διαμέτρου.

Ας προτεθῇ νὰ ἀχθῇ (σχ. 15.) ἡ ΔΕ ἥτις νὰ κάμνῃ μὲ τὴν ΔΒ μίαν γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δεδομένην εἰς τρόπον ὥστε τὸ τετράγωνον τῆς ΔΕ νὰ ἔχῃ τὸν δεδομένον λόγον μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΑΔ×ΒΔ.

Ανάλυσις.

Ας λάβωμεν τὴν ΕΗ=ΖΔ. Ας ἄξωμεν τὴν ΓΖ, τὴν ἀκτῖνα ΓΗΘ καὶ τὴν ΑΘ. Εκβάλλομεν ταύτην τὴν τελευταίαν ἕως ὁποῦ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΓΕ εἰς Ι. Επειδὴ ΓΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΖ, ἡ γωνία ΓΕΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΖΕ. Εκ τῆς ἰσότητος τούτων τῶν δύο γωνιῶν, καὶ ἐκ τῆς ἀμοιβαίας ἰσότητος τῶν πλευρῶν ΓΕ, ΕΗ μὲ τὰς πλευρὰς ΓΖ, ΖΔ, συνάγομεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΓΔΖ καὶ ΓΗΕ εἶναι ἴσα· διὰ τοῦτο ἡ γωνία ΕΓΗ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΖΓΔ. Λοιπὸν τὸ τόξον ΕΘ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΑΖ, καὶ διὰ τοῦτο ΑΘ εἶναι παράλληλος τῆς ΖΕ. Επειδὴ ἡ γωνία ΒΔΕ εἶναι δεδομένη, ἡ γωνία ΒΑΘ εἶναι δεδομένη, καὶ ἡ χορδὴ ΑΘ εἶναι γνωστή· περιπλέον τὸ ὀρθογώνιον ΑΔ×ΔΒ, ἐπειδὴ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΖΔ×ΖΕ, εἶναι παρομοίως ἴσον μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΔΕ×ΕΗ. Διὰ τοῦτο ΔΕ εἶναι πρὸς τὸ ΔΕ×ΕΗ ἡ ΔΕ εἶναι πρὸς ΕΗ εἰς τὸν δεδομένον λόγον· ἀλλὰ ΔΕ : ΕΗ :: ΑΙ : ΙΘ· λοιπὸν ὁ λόγος τῆς ΑΙ πρὸς ΙΘ εἶναι γνωστός· τὸ αὐτὸ ὑπάρχει καὶ διὰ τὴν ΑΘ σχετικῶς πρὸς τὴν ΘΙ. Επειδὴ δὲ ΑΘ εἶναι δεδομένη, διὰ τοῦτο καὶ ΙΘ εἶναι παρομοίως δεδομένη. Διὰ τοῦτο ἡ στιγμὴ Ι, ἡ εὐθεῖα ΙΓ, ἡ στιγμὴ Ε καὶ ἡ εὐθεῖα ΔΕ εἶναι προσδιορισμένα.

Σύνθεσις.

Ας ἀχθῇ ἡ ΑΘ κλίνουσα πρὸς τὴν ΑΒ κλίσιν ἴσην μὲ τὴν δεδομένην. Ας ἐκβάλωμεν ταύτην τὴν εὐθεῖαν κατὰ μίαν ποσότητα ΑΙ ἥτις νὰ ἔχῃ λόγον μὲ τὴν ΙΘ ἴσον μὲ τὸν δεδομένον. Ας φερθῇ ἡ ΙΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΔ παράλληλος τῆς ΑΙ. Λέγω ὅτι Δ εἶναι ἡ ζητουμένη στιγμή.

Επειδὴ ἔχομεν ΑΙ: ΙΘ:: ΔΕ: ΕΗ· διὰ τοῦτο ΔΕ ἔχει μὲ τὴν ΕΗ τὸν δεδομένον λόγον· ὅθεν ΔΕ περιέχεται εἰς τὸ ΔΕ×ΕΗ ὅσον ἐκφράζει ὁ δεδομένος λόγος. Επειδὴ δὲ ΖΕ εἶναι παράλληλος τῆς ΑΘ, τὸ τόξον ΘΕ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τόξον ΑΖ, λοιπὸν ἡ γωνία ΘΓΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΓΖ. Διὰ τοῦτο τὰ τρίγωνα ΗΓΕ, ΓΔΖ εἶναι ἴσα· ἐπειδὴ ἡ πλευρὰ ΓΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν ΓΖ, αἱ δὲ γωνίαι ΕΓΗ, ΓΕΗ εἶναι ἀμοιβαίως ἴσαι μὲ τὰς γωνίας ΖΓΔ, ΓΖΔ. Λοιπὸν ΗΕ=ΖΔ. Διὰ τοῦτο ΔΕ×ΕΗ=ΔΕ×ΖΔ=ΑΔ×ΔΒ. Λοιπὸν ΔΕ εἶναι εἰς τὸ ΑΔ×ΔΒ εἰς τὸν δεδομένον λόγον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ.

Πρόβλημα.

(Σχ. 16 καὶ 16 δίς). Εκ δύο δεδομένων στιγμῶν νὰ ἄξωμεν εἰς μίαν στιγμὴν τῆς περιφερείας δεδομένου κύκλου, δύο εὐθείας τοιαύτας ὥστε ἡ χορδὴ τοῦ τόξου, ὁποῦ αὗται διαχωρίζουν, νὰ ἦναι παράλληλος τῆς εὐθείας ἥτις ἑνόνει τὰς δύο δεδομένας στιγμάς.

Εκ τῶν στιγμῶν Α καὶ Β πρόκειται νὰ φερθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΒΓ, ὥστε νὰ συναπαντοῦν τὴν πε-

περιφέρειαν τοῦ δεδομένου κύκλου εἰς τὰς στιγμὰς Δ, Ε εἰς τρόπον ὥστε ἡ ΔΕ νὰ ἦναι παράλληλος τῆς ΑΒ.

Ἀνάλυσις.

Ἂς ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΔΖ ἥτις συναπαντᾷ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ. Ἡ γωνία ΖΔΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΕΓΔ (σχ. 16) ἢ μὲ τὸ παραπλήρωμά της (σχ. 16 δίς). Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος τῆς ΑΒ, ἡ γωνία ΖΔΕ ἢ τὸ παραπλήρωμά της εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΑΖΔ, ἡ ὁποία διὰ τοῦτο εἶναι ἴση μὲ τὴν ΕΓΔ ἢ ΑΓΒ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα (σχ. 16) ΑΖΔ, ΑΒΓ τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν κοινὴν γωνίαν ΓΑΒ εἶναι ὅμοια· διὰ τοῦτο ΑΔ : ΑΖ :: ΑΒ : ΑΓ· ὅθεν ΑΔ × ΑΓ = ΑΒ × ΑΖ. Τώρα, ἐπειδὴ ἡ στιγμὴ Α καὶ ὁ κύκλος ΔΓΕ εἶναι δεδομένος, τὸ ὀρθογώνιον ΑΔ × ΑΓ εἶναι γνωστόν· διότι εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης ΑΗ, ὅταν ἡ στιγμὴ Α ἦναι ἐκτὸς τῆς περιφερείας, καὶ μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΗ καθέτου ἐπὶ τῆς διαμέτρου, ὅταν ἡ στιγμὴ Α εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς περιφερείας· ὥστε τὸ ὀρθογώνιον ΑΖ × ΑΒ εἶναι προσδιορισμένον· ἡ δὲ ΑΒ, ἐπειδὴ εἶναι δεδομένη, μὲ εὐκολίαν προσδιορίζομεν τὴν ΑΖ, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ θέσις τῆς στιγμῆς Ζ προσδιορίζεται. Οὕτως ἔχομεν τὴν θέσιν τῆς ἐφαπτομένης ΖΔ καὶ τῆς στιγμῆς Δ. Ἀφ' οὗ δὲ ἑνώσωμεν τὴν στιγμὴν ταύτην μὲ τὴν Α ἥτις εἶναι δεδομένη, ἡ γραμμὴ ΑΓ καὶ μετὰ ταῦτα ἡ ΒΓ καθὼς καὶ ἡ κοινὴ τομή της εἰς Ε μὲ τὴν περιφέρειαν εἶναι προσδιορισμένα.

Σύνθεσις.

Ἐὰν ἡ στιγμὴ Α (σχ. 16) ἦναι ἐκτὸς τοῦ κύκλου ἂς ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΑΗ, ἢ, ἂν ἦναι ἐντὸς,

(σχ. 16 δις) ἂς ὑψωθῇ ἡ κάθετος ΑΗ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἥτις διέρχεται ἐκ τῆς Α. Ας ληφθῇ μία τρίτη ἀνάλογος τῶν γραμμῶν ΑΗ, ΑΒ, καὶ ἂς φερθῇ αὕτη ἐκ τῆς Α εἰς τὴν Ζ. Εκ τῆς στιγμῆς Ζ ἂς ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΖΔ, καὶ ἂς φερθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΔ τὴν ὁποίαν ἐκβάλλομεν ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Γ. Ας φερθῇ ἡ ΓΒ ἥτις τέμνει τὸν κύκλον εἰς τὸ Ε. Λέγω ὅτι ἡ γραμμὴ ΔΕ εἶναι παράλληλος τῆς ΑΒ.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ ΑΒ : ΑΗ :: ΑΗ : ΑΖ, διὰ τοῦτο $AH^2 = AB \times AZ$. Αλλ' $AH^2 = ΓΑ \times ΑΔ$; λοιπὸν $AB \times AZ = ΓΑ \times ΑΔ$. Διὰ τοῦτο, ΑΒ : ΑΓ :: ΑΔ : ΑΖ. Επεται ἐκ τούτου ὅτι τὰ τρίγωνα ΒΑΓ, ΔΑΖ εἶναι ὅμοια· ἐπειδὴ ἔχουν μίαν κοινὴν γωνίαν μεταξὺ δύο πλευρῶν ἀναλόγων, διὰ τοῦτο ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΖΔ. Αλλ' ἡ ΑΓΒ ἢ ΔΓΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΕΔΖ ἢ μὲ τὸ παραπληρωμά της· διὰ τοῦτο ἡ γωνία ΑΖΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΕΔΖ ἢ μὲ τὸ παραπληρωμά της, καὶ διὰ τοῦτο ἡ χορδὴ ΔΕ εἶναι παράλληλος τῆς ΑΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 12'.

Πρόβλημα.

Εκ δύο δεδομένων στιγμῶν νὰ ἄξωμεν εἰς μίαν στιγμὴν δεδομένης περιφερείας δύο εὐθείας τοιαύτας, ὥστε ἡ χορδὴ τοῦ τόξου τοῦ διαχωριζομένου ἐξ αὐτῶν νὰ συναπαντᾷ εἰς μίαν δεδομένην στιγμὴν, τὴν εὐθεῖαν ἥτις ἑνόνει τὰς δύο δεδομένας στιγμάς.

Ας ὑποθέσωμεν λοιπὸν ὅτι ἐκ τῶν στιγμῶν Α καὶ Β (σχ. 17) φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΖ, ΒΖ εἰς τρόπον ὥστε ἡ χορδὴ ΔΗ ἐκβαλλομένη νὰ συναπαντήσῃ εἰς Γ τὴν προεκβολὴν τῆς ΑΒ,

Ανάλυσις.

Ας ἀχθῇ ἡ ΔΕ παράλληλος τῆς ΑΓ, καὶ ἂς φερθῇ ἡ γραμμὴ ΕΗ, ἥτις ἂς ἐκβληθῇ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΑΒ εἰς Θ. Η γωνία ΒΘΗ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐναλλὰξ ΗΕΔ ἥτις εἶναι ἴση μὲ τὴν ΗΖΔ, ἐπειδὴ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα. Λοιπὸν αἱ γωνίαι ΒΘΗ, ΒΖΑ εἶναι ἴσαι, καὶ τὰ τρίγωνα ΒΘΗ, ΒΖΑ εἶναι ὅμοια. Διὰ τοῦτο ΒΗ : ΒΘ :: ΒΑ : ΒΖ, καὶ ΒΗ × ΒΖ = ΒΘ × ΒΑ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΒΗ × ΒΖ εἶναι γνωστὸν· διότι εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἠγμένης εἰς τὴν σιγμὴν Β. Λοιπὸν ΒΘ × ΒΑ εἶναι προσδιορισμένον, καὶ διὰ τοῦτο ἡ σιγμὴ Θ εἶναι καὶ αὐτὴ προσδιορισμένη. Οθεν τὸ πρόβλημα ἤχθη εἰς τὸ ἀνωτέρω· διότι ἀρκεῖ νὰ ἄξωμεν ἐκ τῶν σιγμῶν Γ καὶ Θ τὰς εὐθείας ΓΔ, ΘΕ εἰς τρόπον ὥστε ἡ ΔΕ χορδὴ τοῦ διαχωριζομένου τόξου νὰ ἦναι παράλληλος τῆς ΘΓ.

Σύνθεσις.

Εκ τῆς σιγμῆς Β ἄγομεν εἰς τὸν κύκλον μίαν ἐφαπτομένην ΒΙ, καὶ λαμβάνομεν ΒΘ εἰς τρόπον ὥστε ΒΑ : ΒΙ :: ΒΙ : ΒΘ· καὶ διὰ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ἄγομεν τὰς εὐθείας ΘΕ, ΓΔ ὥστε ΔΕ νὰ ἦναι παράλληλος τῆς ΘΓ. Τότε ἐὰν ἐκβάλλωμεν τὴν ΒΗ ἕως εἰς τὴν Ζ εἰς τὴν περιφέρειαν· ΑΔΖ θέλει σχηματίζει μίαν μόνην εὐθεῖαν.

Επειδὴ ΒΑ : ΒΙ :: ΒΙ : ΒΘ· ἕπεται ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΒΑ × ΒΘ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΒΙ ἢ μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΒΗ × ΒΖ. Λοιπὸν ΒΑ : ΒΖ :, ΒΗ : ΒΔ· καὶ τὰ τρίγωνα ΒΑΖ, ΑΗΘ εἶναι ὅμοια. Λοιπὸν ἡ γωνία ΒΖΑ = ΒΘΗ = ΗΕΔ = ΗΖΔ. Τώρα ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΒΖΑ, ΗΖΔ εἶναι ἴσαι, φα-

νερὸν εἶναι ὅτι αἱ γραμμαὶ ΖΑ, ΖΔ εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας, δηλαδὴ ἡ μία εἶναι ἡ προεκβολὴ τῆς ἄλλης.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'

Πρόβλημα.

Ἐκ δύο δεδομένων σιγμῶν ἐπὶ τῆς περιφερείας δεδομένου κύκλου, νὰ ἄξωμεν εἰς μίαν ἄλλην στιγμὴν τοῦ ἀπόντα μέρους τῆς περιφερείας γραμμὰς, αἵτινες νὰ τέμνουν τὴν δεδομένην διάμετρον εἰς δύο στιγμὰς, αἱ ὁποῖαι νὰ ἀπέχουν ἰσάκις τοῦ κέντρου.

Ας ὑποθέσωμεν ὅτι φέρομεν ἐκ τῶν στιγμῶν Α καὶ Β (σχ. 18) τὰς εὐθείας ΑΓ, ΒΓ, ὥστε αἱ σιγμαὶ Ζ καὶ Η, τὰς ὁποίας προσδιορίζουν ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΔΕ, νὰ ἀπέχουν ἰσάκις τοῦ κέντρου Ο.

Ας φερθῇ ἡ εὐθεῖα ΒΑ, ἥτις ἂς ἐκβληθῇ, καθὼς καὶ ἡ διάμετρος ΕΔ, ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς τὸ Μ· καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΟΛ. Ἐκ τοῦ κέντρου Ο ἂς ἄξωμεν ἐπὶ τῆς ΑΒ τὴν κάθετον ΟΚ. Ας ἑνωθῇ ἡ σιγμὴ Κ καὶ Λ, ἐκ τῆς Α ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΙ παράλληλος τῆς ΔΕ καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΘΚ.

Ἀνάλυσις.

Αἱ παράλληλοι ΖΗ καὶ ΑΙ τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα ἐκ τῶν εὐθειῶν ΓΑ, ΓΘ καὶ ΓΙ. Επειδὴ δὲ ΖΟ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΟΗ, πρέπει ἡ ΑΘ νὰ ἦναι ἴση μὲ τὴν ΘΙ· καὶ ἐπειδὴ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἡ σιγμὴ Κ εἶναι ἐκείνη τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΘΚ εἶναι παράλληλος τῆς ΙΒ, καὶ ἡ γωνία ΑΚΘ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒΙ. Τώρα ἡ γωνία ΑΒΙ ἢ ΑΒΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΛΓ· λοιπὸν ΑΚΘ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΛΘ ἢ ΑΛΓ.

Παρατηροῦντες περιπλέον ὅτι αἱ γωνίαι ΑΛΘ καὶ ΑΚΘ εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς ἰδίας βάσεως ΑΘ, καὶ εἶναι ἴσαι, βλέπομεν ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΛΚΘ πρέπει νὰ δύναται νὰ ἐγγραφθῇ εἰς μίαν περιφέρειαν, καὶ διὰ τοῦτο αἱ γωνίαι ΘΑΚ, ΘΛΚ νὰ ἦναι ἴσαι. Ἀλλὰ ΘΑΚ = ΟΜΚ ἐξ αἰτίας τοῦ παραλληλισμοῦ τῶν εὐθειῶν ΑΙ καὶ ΔΕ· λοιπὸν ΟΜΚ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΘΛΚ ἢ ΟΛΚ. Οὕτως τὸ τετράπλευρον ΜΟΚΛ παραμοίως ἐγγράφεται εἰς ἕνα κύκλον, καὶ διὰ τοῦτο ἡ γωνία ΜΛΟ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΜΚΟ. Τώρα ΜΚΟ εἶναι ὀρθή, λοιπὸν ΜΛ εἶναι μία ἐφαπτομένη, ἥτις εἶναι δεδομένη, διότι γνωρίζομεν τὴν στιγμὴν Μ, ὅπου συντρέχουσιν αἱ εὐθεῖαι ΕΔ καὶ ΒΑ. Λοιπὸν δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὴν διάμετρον ΛΓ καὶ τὴν στιγμὴν Γ.

Σύνθεσις.

Ας ἐκβάλωμεν ΕΔ καὶ ΒΑ ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς τὴν στιγμὴν Μ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΜΛ καὶ ἡ διάμετρος ΛΓ. Αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ ΑΓ καὶ ΒΓ εἶναι τοιαῦται, ὥστε αἱ στιγμαὶ τῶν κοινῶν τομῶν των μὲ τὴν διάμετρον ΔΕ ἀπέχουν ἐκ τοῦ κέντρου Ο ποσότητας ἴσας ΟΖ καὶ ΟΗ.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τοῦτο, ἂς ἄξωμεν τὴν ΑΙ παράλληλον τῆς ΔΕ, καὶ τὴν ΟΚ κάθετον εἰς τὴν ΑΒ, καὶ ἂς φέρωμεν τὰς εὐθείας ΛΚ καὶ ΚΘ. Επειδὴ ἡ ΜΛ εἶναι ἐφαπτομένη, ἡ γωνία ΟΛΜ εἶναι ὀρθή, εἶναι λοιπὸν ἴση μὲ τὴν ΜΚΟ· καὶ διὰ τοῦτο ΜΚΛ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΜΟΛ, καὶ περιπλέον μὲ τὴν ΑΘΛ. Επεται ἐκ τούτου ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΛΚΘ ἐγγράφεται εἰς ἕνα κύκλον, καὶ διὰ τοῦτο ἡ γωνία ΑΛΘ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΚΘ. Αλλὰ, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον,

ΑΔΘ ἡ ΔΑΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΒΓ ἡ ΑΒΙ. Λοιπὸν ΑΚΘ = ΑΒΙ καὶ ΚΘ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΙ. Τώρα ἐπειδὴ ΑΚ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΚΒ, διὰ τοῦτο ἕπεται ὅτι ΑΘ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΘΙ καὶ ἡ ΖΟ ἴση μὲ τὴν ΟΗ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ἰθ'.

Πρόβλημα.

Ἐκ μιᾶς δεδομένης στιγμῆς νὰ ἄξωμεν μίαν εὐθεῖαν τοιαύτην, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τῶν διαχωριζομένων τμημάτων ἐπ' αὐτῆς ἀπὸ δύο δεδομένας γραμμὰς, νὰ ἦναι ἰσοδύναμον μὲ μίαν δεδομένην ἐπιφάνειαν.

Ἐστωσαν ΑΒ, ΑΓ (Σχ. 19 ἢ 19 δὶς) αἱ δύο δεδομέναι γραμμαὶ καὶ Δ ἡ στιγμὴ, ἐκ τῆς ὁποίας φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΖ, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τῶν τμημάτων ΕΔ, ΔΖ, νὰ ἰσοδυναμῇ μὲ μίαν δεδομένην ἐπιφάνειαν.

Ἀνάλυσις.

Ἂς φέρωμεν τὴν ΑΔ, καὶ ἐκ τῆς Ζ ἂς ἄξωμεν μίαν εὐθεῖαν ΖΗ ἥτις νὰ κάμνῃ μὲ τὴν ΕΖ γωνίαν ἴσην μὲ τὴν ΔΑΕ· αὕτη συναπαντᾷ τὴν ΑΔ ἢ τὴν προεκβολήν της εἰς τὴν Η. Τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΖΔΗ ἐπειδὴ εἶναι ὅμοια, δίδουν ΑΔ:ΕΔ::ΔΖ:ΔΗ, καὶ διὰ τοῦτο ΑΔ×ΔΗ = ΕΔ×ΔΖ. Ἀλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΕΔ×ΔΖ εἶναι δεδομένον, λοιπὸν δεδομένον εἶναι καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΑΔ×ΔΗ. Ἐπειδὴ δὲ ΑΔ εἶναι γνωστὴ, διὰ τοῦτο ΔΗ καὶ ἡ στιγμὴ Η δύνανται νὰ προσδιορισθῶσι. Περιπλέον, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΔΖΗ εἶναι ἴση μὲ τὴν γνωστὴν γωνίαν ΔΑΓ, ἐὰν