ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ.

Η Ανάλυσις εἶναι ἡ μέθοδος, διὰ τῆς ὁποίας μία πρότασις ἄγεται ὕστερα ἀπὸ σειρὰν τινὰ ἀναγκαίων συνεπειῶν ἢ εἰς μίαν γνωστὴν πρᾶξιν, ἢ εἰς μίαν δεκτὴν ἀρχήν.

Η Μέθοδος αὕτη ἐφαρμόζεται εἰς τὴν ἔρευναν τῆς ἀληθείας ἑνὸς θεωρήματος, καὶ εἰς τὴν ἐφεύρεσιν τῆς ἀναγκαίας κατασκευῆς διὰ τὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος. Η Ανάλυσις εἶναι ἕνας τρόπος ἀντίστροφος τῆς λύσεως· ἡ μὲν ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ζητουμένης ἀληθείας, καὶ θεωροῦσα αὐτὴν ὡς ἤδη γνωστὴν, προχωρεῖ βαθμηδὸν ἕως οὗ νὰ φθάσῃ εἰς μίαν ἀρχὴν προηγουμένως γνωστήν· ἡ δὲ λύσις ἥτις συνιστᾷ τὴν σύνθεσιν, ἀναχωρεῖ ἀπὸ γνωστὴν ἀρχὴν, καὶ προχωρεῖ βαθμηδὸν ἕως εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως· εἶναι δὲ ἐν χρήσει ὡς ἐπιτοπλεῖστον εἰς τὴν ἔκθεσιν τῶν στοιχείων τῶν ἐπιστημῶν. Η ἀνάλυσις τῷ ὄντι εἶναι τὸ μόνον μέσον, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ βοηθήσῃ τὸ ἀνθρώπινον πνεῦμα εἰς τὰς ἐφευρέσεις του, ἐν ᾧ ἡ σύνθεσις εἶναι ἐκ φύσεως ἀφιερωμένη εἰς τὸ νὰ διευθύνῃ τὴν διάταξιν τῶν ἐφευρέσεων.

ΒΙΒΛΙΟΝ Α'.

Ορισμοί.

1.ον Εἰς κάθε ζήτημα καλοῦνται δεδομέναι, αἱ ποσότητες αἱ ὑποῖαι προσδιορίζονται ἀπὸ μόνην τὴν ἔκφρασιν τοῦ προβλήματος, καὶ ἐκεῖναι, αἵτινες δύνανται νὰ συναχθοῦν ἐκ τῶν πρώτων διὰ γνωστῶν μέσων.

2.ον Εἷς λόγος λέγεται, ὅτι εἶναι δεδομένος, ὅταν ἦναι ἴσος μὲ ἐκεῖνον ποσοτήτων δεδομένων.

3.ον Αἱ γραμμαὶ, αἱ στιγμαὶ, αἱ ἐκτάσεις λέγονται, ὅτι εἶναι δεδομέναι εἰς μίαν σταθερὰν θέσιν, ὅταν αὗται συναγωνται ἀπὸ τὴν ἔκφρασιν τοῦ προβλήματος, ἢ ὅταν δύνανται νὰ συναχθοῦν διὰ γνωστῶν μέσων.

4.ον Εἷς κύκλος εἶναι δεδομένης θέσεως, καὶ μεγέθους, ὅταν τὸ κέντρον του καὶ ἡ ἀκτίς του ἦναι δεδομένα.

5.ον Εν εὐθύγραμμον σχῆμα καλεῖται δεδομένου εἴδους, ὅταν ἦναι ὅμοιον μὲ ἓν δεδομένον σχῆμα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

Πρόβλημα.

Εκ δύο δεδομένων στιγμῶν νὰ ἄξωμεν δύο πλαγίας εἰς μίαν γνωστὴν εὐθεῖαν, ὥστε νὰ κλίνουν ἰσάκις εἰς αὐτήν.

Εστωσαν Α καὶ Β (σχ. 1. Πίναξ. 1.) αἱ δύο δεδομέναι στιγμαὶ, καὶ ΓΔ μία δεδομένης θέσεως εὐθεῖα· ζητεῖται νὰ ἄξωμεν ΑΗ καὶ ΒΗ εἰς τρόπον ὥστε αἱ γωνίαι ΑΗΓ καὶ ΒΗΕ νὰ ἦναι ἴσαι.

Ανάλυσις.

Υποθέτω, ὅτι αἱ δύο πλάγιαι, αἵτινες πληροῦν εἰς τὸ ζήτημα, εἶναι ἡ ΑΗ ΒΗ· καὶ ἐκ μιᾶς τῶν δεδομένων σιγμῶν Β φέρω ἐπὶ τῆς ΓΔ τὴν κάθετον ΒΕ, καὶ ἐκβάλλω αὐτὴν ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν προεκβολὴν τῆς ΑΗ εἰς τὴν σιγμὴν Ζ. Τώρα, ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ γωνία ΒΗΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΗΓ, εἶναι ὁμοίως ἴση καὶ μὲ τὴν ΖΗΕ ἡ δὲ ὀρθὴ γωνία ΒΕΗ = ΖΕΗ· προσέτι ἐπειδὴ ἡ πλευρὰ ΗΕ εἶναι κοινὴ εἰς τὰ τρίγωνα ΗΒΕ, ΗΖΕ· ἕπεται, ὅτι τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἴσα, καὶ διὰ τοῦτο ἡ πλευρὰ ΒΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΖΕ· καὶ ἐπειδὴ ἡ κάθετος ΒΕ εἶναι δεδομένη, διὰ τοῦτο ἡ ΖΕ εἶναι γνωστὴ τόσον εἰς θέσιν, ὅσον καὶ εἰς μέγεθος· τοῦτο δὲ προσδιορίζει τὴν σιγμὴν Ζ, καὶ οὕτω προσδιορίζεται καὶ ἡ σιγμὴ Η, ἥτις εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ τῆς ΑΖ μὲ τὴν ΓΔ.

Σύνθεσις.

Επὶ τῆς ΔΓ ἄγομεν τὴν κάθετον ΒΕ τὴν ὁποίαν ἐκβάλλομεν ὑπὸ τῆς ΓΔ ἴσην ποσότητα· καὶ ἐπιζευγνύομεν τὴν ΛΖ ἥτις συναπαντᾷ τὴν ΓΔ εἰς τὸ Η· λέγω ὅτι ΑΗ καὶ ΒΗ εἶναι αἱ ζητούμεναι αὐθεῖαι.

Επειδὴ τὰ τρίγωνα ΗΒΕ, ΗΖΕ ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην ΒΕΗ=ΖΕΗ περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἴσων (ἐπειδὴ ΒΕ=ΖΕ καὶ ΗΕ εἶναι κοινὴ) διὰ τοῦτο εἶναι ἴσα. Καὶ ἐκ τούτου ἕπεται ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν ΒΗΕ καὶ ΑΗΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'.

Πρόβλημα.

Εκ μιᾶς δεδομένης στιγμῆς νὰ ἄξωμεν μίαν εὐθεῖαν, ἥτις νὰ κάμνη γωνίας ἴσας μὲ δύο εὐθείας δεδομένης θέσεως.

Εστω Α (σχ. 2.) ἡ δεδομένη στιγμὴ, καὶ ΓΒ, ΗΔ αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ, αἵτινες εἶναι δεδομένης θέσεως.

Ανάλυσις.

Ας ὑποθέσωμεν ὅτι ἐκ τῆς στιγμῆς Α ἤχθη ἡ εὐθεῖα ΕΖ, καὶ ἐσυναπάντησε τὰς δύο δεδομένας εὐθείας, ὥστε ἡ γωνία ΓΕΖ νὰ ἦναι ἴση μὲ τὴν ΓΖΕ· ἂς φερθῇ ἡ ΓΘ παράλληλος τῆς ΖΕ· ἐπειδὴ ἡ ἐκτὸς γωνία ΗΓΘ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΖΕ, καὶ ἡ ΕΓΘ ἴση μὲ τὴν ἐναλλὰξ ΓΕΖ, καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΓΖΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΕΖ, διὰ τοῦτο ΗΓΘ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΕΓΘ. Οὕτως ἡ γωνία ΗΓΕ διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΓΘ· τώρα ἡ ΓΘ εἶναι δεδομένης θέσεως, λοιπὸν καὶ ἡ παράλληλος ταύτης, τοῦτ' ἔστιν ἡ ΖΕ, εἶναι παρομοίως γνωστή.

Σύνθεσις.

Ας διαιρεθῇ ἡ γνωστὴ γωνία ΗΓΒ εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τῆς εὐθείας ΓΘ, καὶ ἐκ τῆς δεδομένης στιγμῆς Α ἂς ἀχθῇ ἡ παράλληλος ΓΘ· ἡ γωνία ΓΕΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΖΕ. Επειδὴ αἱ δύο αὗται γωνίαι εἶναι ἀμοιβαίως ἴσαι, ἡ μὲν μὲ τὴν ἐντὸς γωνίαν ΕΓΘ, ἡ δὲ μὲ τὴν ἀντικειμένην ΗΓΘ, διὰ τοῦτο εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Πρόβλημα.

Εκ μιᾶς δεδομένης ςιγμῆς νὰ φέρωμεν μίαν εὐθεῖαν οὕτως, ὥςε τὰ τμήματα, τὰ ὁποῖα χωρίζουν αἱ ἀγόμεναι κάθετοι ἐκ δύο δεδομένων ςιγμῶν εἰς τὴν ἠγμένην εὐθεῖαν, νὰ ἦναι ἴσα.

Επειδὴ αἱ ςιγμαὶ Α, Β, Γ εἶναι δεδομέναι (σχ. 3.), ζητοῦμεν νὰ φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΖΓΕ εἰς τρόπον ὥςε τὰ μέρη ΓΖ καὶ ΓΕ, τὰ ἐκ τῶν καθέτων ΑΖ καὶ ΒΕ προσδιοριζόμενα, νὰ ἦναι ἴσα.

Ανάλυσις.

Εςωσαν, καθ' ὑπόθεσιν, τὰ μέρη ΓΖ καὶ ΓΕ ἴσα. Ας ἐκβάλωμεν τὴν ΑΓ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΒΕ κατὰ τὸ Δ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΖΓ καὶ ΔΕΓ, ἐπειδὴ ἔχουν τὴν γωνίαν ΑΓΖ ἴσην μὲ τὴν ΔΓΕ, καὶ τὴν πλευρὰν ΓΖ ἴσην μὲ τὴν ΓΕ, εἶναι ἴσα· ἕπεται λοιπὸν, ὅτι ἡ πλευρὰ ΓΑ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΔ· ἀλλ' ἐπειδὴ ΓΑ εἶναι δεδομένη, διὰ τοῦτο ΓΔ καὶ ἡ ςιγμὴ Δ εἶναι γνωςὰ, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ ΒΔ εἶναι δεδομένη. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι γνωςὴ καὶ ἡ κάθετος ΓΕ.

Σύνθεσις.

Ας ἐκβληθῇ ἡ ΑΓ κατ' ἴσην ποσότητα ἕως εἰς τὸ Δ. Ας ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΔ, καὶ ἂς ἀχθῇ μία παράλληλος ΑΖ τῆς ΒΔ, καὶ μία κάθετος ΓΕ ἐπὶ τῆς ἰδίας γραμμῆς. Λέγω ὅτι ἡ ΖΓΕ εἶναι ἡ ζητουμένη γραμμὴ· διότι, ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΖΕΓ καὶ ΕΔΓ ἔχουν τὰς γωνίας ΑΓΖ, ΑΖΓ ἀμοιβαίως ἴσας μὲ τὰς ΔΓΕ, ΔΕΓ, καὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ ἴσην μὲ τὴν ΓΔ· διὰ τοῦτο εἶναι ἴσα, καὶ οὕτως ἔχομεν ΓΖ = ΓΕ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Πρόβλημα.

Νὰ διαιρέσωμεν ἓν τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα διὰ μιᾶς εὐθείας ἠγμένης ἔκ τινος σιγμῆς ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν.

Ας προτεθῇ λοιπὸν νὰ φέρωμεν ἐκ τῆς σιγμῆς Δ τὴν εὐθεῖαν ΔΖ ὥστε νὰ διαιρῇ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Ἀνάλυσις.

Ας ὑποθέσωμεν λοιπὸν, ὅτι ἡ ΔΖ ἐκτελεῖ τὸ ζητούμενον, δηλαδὴ ὅτι διαιρεῖ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 4.).

Ας ληφθῇ ἡ σιγμὴ Ε τῆς ἡμισείας τῆς ΑΓ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΕΒ, ΒΔ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ΕΒΓ, καὶ διὰ τοῦτο εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓ. Οθεν, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ΑΒΕ πρέπει νὰ ἦναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ΑΖΔ. Εὰν ἀφαιρέσωμεν ἐξ ἑκάστου τούτων τῶν τριγώνων τὸ κοινὸν μέρος ΑΖΕ, μένουν δύο τρίγωνα ἰσοδύναμα ΕΖΒ καὶ ΕΖΔ. Καὶ ἐπειδὴ τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα, ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν, πρέπει νὰ ἔχουν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, δηλαδὴ ἡ ΕΖ νὰ ἦναι παράλληλος τῆς ΒΔ· ἀλλ' αἱ σιγμαὶ Β καὶ Δ ἐπειδὴ εἶναι δεδομέναι, ἡ εὐθεῖα ΒΔ εἶναι δεδομένης θέσεως, διὰ τοῦτο ἕπεται ὅτι ΕΖ εἶναι παρομοίως γνωστή.

Σύνθεσις.

Αφ' οὗ λάβωμεν τὴν σιγμὴν Ε τῆς ἡμισείας τῆς ΑΓ, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΒΔ, ἄγομεν τὴν παράλληλον ΕΖ ταύτης τῆς εὐθείας, ἥτις συναπαντᾷ τὴν ΑΒ εἰς τὴν Ζ. Η εὐθεῖα ΔΖ θέλει διαιρέσει τὸ τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

Τῷ ὄντι ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΕ. Επειδὴ ΒΔ εἶναι παράλληλος τῆς ΕΖ, τὸ τρίγωνον ΕΖΒ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ΕΖΔ· καὶ ἐὰν προσθέσωμεν τὸ ΑΖΕ εἰς ἕκαςον τούτων τῶν δύο τριγώνων, τὰ προκύπτοντα τρίγωνα ΑΖΔ καὶ ΑΒΕ εἶναι ἴσα. Λοιπὸν τὸ πρῶτον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓ, καὶ τοῦτο, ἐπειδὴ τὸ δεύτερον εἶναι τοιοῦτο.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'.

Πρόβλημα.

Νὰ εὕρωμεν μίαν στιγμὴν ἐντὸς ἑνὸς τριγώνου, ἐκ τῆς ὁποίας αἱ ἠγμέναι εὐθεῖαι εἰς τὰς τρεῖς κορυφὰς νὰ διαιρῶσι τὸ τρίγωνον εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη.

Εςω Ζ (σχ. 5.) ἡ ζητουμένη στιγμὴ, ἐκ τῆς ὁποίας ἀναχωροῦν αἱ εὐθεῖαι ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, καὶ ἂς διαιρῶσιν εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Ανάλυσις.

Αγομεν ΖΔ, ΖΕ παραλλήλους τῶν πλευρῶν ΑΒ ΒΓ καὶ ἐπιζευγνύομεν τὰς ΒΔ, ΒΕ. Επειδὴ ΖΔ εἶναι παράλληλος τῆς ΑΒ, τὸ τρίγωνον ΑΒΖ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ΑΒΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ΑΒΓ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ τρίγωνον ΒΕΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ΒΖΓ, εἶναι παρομοίως τὸ τρίτον μέρος τοῦ ΑΒΓ. Διὰ τοῦτο ἑκάςη τῶν βάσεων ΑΔ καὶ ΕΓ εἶναι τὸ τρίτον τῆς πλευρᾶς ΑΓ, καὶ διὰ τοῦτο αἱ στιγμαὶ τῆς διαιρέσεως Δ καὶ Ε εἶναι δεδομέναι. Αἱ παράλληλοι ΔΖ καὶ ΕΖ εἶναι παρομοίως δεδομέναι, καὶ διὰ τοῦτο γνωςὴ εἶναι καὶ ἡ στιγμὴ τῆς συναπαντήσεώς των Ζ.

Η στιγμὴ Ζ δύναται νὰ προσδιορισθῇ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον. Τῷ ὄντι, ἂς ἐκβληθῶσιν αἱ ΑΖ, ΓΖ ἕως εἰς τὰς στιγμὰς Η, Θ· τὸ τρίγωνον ΔΖΓ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΓ· ὅθεν συνάγομεν ΑΓ: ΑΒ :: ΔΕ: ΔΖ· ἀλλὰ ΑΓ = 3ΔΕ, λοιπὸν ΑΒ = 3ΔΖ· περιπλέον, ἐπειδὴ ΑΘ καὶ ΔΖ εἶναι παράλληλοι, ἔχομεν ΑΓ: ΑΘ :: ΔΓ: ΔΖ, ἤ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, 2ΑΓ: 2ΑΘ :: 3ΔΓ: 3ΔΖ· ἀλλὰ 2ΑΓ = 6ΑΔ = 3ΔΓ· διὰ τοῦτο 2ΑΘ = 3ΔΖ = ΑΒ· οὕτως ἡ στιγμὴ Θ εἶναι ἡ στιμὴ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ, καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον Η εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἡμισείας τῆς ΒΓ· ἀφ' οὗ ἔγιναν γνωσταὶ αἱ δύο αὗται στιγμαὶ, ἡ κοινὴ τομὴ Ζ τῶν δύο γραμμῶν ΓΘ καὶ ΑΗ προσδιορίζεται παρομοίως.

Σύνθεσις.

Ἑκάστη τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἂς τμηθῇ εἰς δύο ἴσα μέρη, ἡ μὲν εἰς τὴν στιγμὴν Θ, ἡ δὲ εἰς τὴν Η, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΓΘ, ΑΗ. Ἐκ δὲ τῆς κοινῆς τομῆς τούτων ἂς φερθῶσιν αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ. Οὕτω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θέλει διαιρεθῇ εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη.

Τῷ ὄντι, ἐκ τῶν στιγμῶν Α καὶ Β ἂς κατεβάσωμεν τὰς καθέτους ΑΙ, ΒΛ· τὰ τρίγωνα ΘΑΙ καὶ ΘΒΛ εἶναι ἴσα, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΘΙ = ΒΘΛ, καὶ ΑΙΘ = ΒΛΘ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΘ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΒΘ. Λοιπὸν ἡ ΑΙ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΒΛ. Τὰ τρίγωνα ΑΖΓ, ΒΖΓ ἐπειδὴ εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ΖΓ καὶ ἔχουν ὕψη ἴσα ΑΙ, ΒΛ, εἶναι ἰσοδύναμα. Μὲ τὸν αὐτὸν συλλογισμὸν δεικνύομεν, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΖΓ, ΑΖΒ εἶναι ἰσοδύναμα. Διὰ τοῦτο τὸ ὅλον τρίγωνον ΑΒΓ διαιρεῖται εἰς τρία

τρίγωνα ἴσα κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἔχοντα διὰ κοινὴν κορυφὴν τὴν στιγμὴν Ζ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ.

Πρόβλημα.

Νὰ διαιρέσωμεν ἓν τρίγωνον εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη δι' εὐθειῶν γραμμῶν, αἵτινες νὰ ἀναχωροῦν ἀπὸ μίαν ἐντὸς τοῦ τριγώνου δεδομένην στιγμήν.

Ανάλυσις.

Εστω ΑΒΓ (σχ. 6.) τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ὑποθέτω, ὅτι διαιρεῖται εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη ἀπὸ τὰς εὐθείας ΔΒ, ΔΗ, ΔΘ ἠγμένας ἀπὸ τὴν στιγμὴν Δ.

Ας φέρωμεν τὴν ΒΗ, καὶ τὴν παράλληλον αὐτῆς ΔΕ, καὶ ἄς ἑνώσωμεν τὴν Β καὶ Ε. Τὸ τρίγωνον ΒΔΗ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ΒΕΗ, καὶ διὰ τοῦτο τὸ τετράπλευρον ΑΒΔΗ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τρίτον μέρος τοῦ ΑΒΓ. Εκ τούτου ἕπεται, ὅτι ἡ βάσις ΑΕ εἶναι τὸ τρίτον τῆς ΑΓ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ στιγμὴ Ε εἶναι γνωστή. Η παράλληλος λοιπὸν ΒΗ τῆς ΔΕ εἶναι προσδιορισμένη, καὶ παρομοίως ἡ στιγμὴ Η καθὼς καὶ ἡ ΔΗ.

Εὰν τώρα ἄξωμεν τὴν ΒΘ καὶ τὴν παράλληλόν της ΔΖ, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΔΘ, συλλογιζόμενοι ὡς ἀνωτέρω, θέλομεν ἰδεῖ, ὅτι καὶ ἡ γραμμὴ ΘΒ εἶναι παρομοίως προσδιορισμένη.

Σύνθεσις.

Ας διαιρέσωμεν τὴν βάσιν ΑΓ εἰς τρία ἴσα μέρη, καὶ ἐκ τῶν στιγμῶν τῆς διαιρέσεως Ε, Ζ ἄς φέρωμεν τὰς γραμμὰς ΔΕ, ΔΖ, καὶ ἄς ἄξωμεν τούτων τῶν γραμμῶν τὰς παραλλήλους ΒΗ, ΒΘ, καὶ ἄς ἐπιζεύξωμεν τὰς εὐθείας ΔΒ, ΔΗ, ΔΘ· αὗται διαιροῦσι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη.

Διότι, ἐπειδὴ ΔΕ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΗ, τὸ τρίγωνον ΒΔΗ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ΒΕΗ, καὶ διὰ τοῦτο τὸ τετράπλευρον ΑΒΔΗ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, τὸ τετράπλευρον ΒΔΘΓ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ τρίγωνον ΒΖΓ. Λοιπὸν τὰ ὑπόλοιπα τρίγωνα ΗΔΘ, ΒΖΕ εἶναι ἰσοδύναμα. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΕΖ, ΖΒΓ ἐπειδὴ ἔχουν βάσεις ἴσας καὶ τὰς κορυφὰς κοινὰς, διὰ τοῦτο ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν. Λοιπὸν ἕκαστον τῶν ἐμβαδῶν ΑΒΔΗ, ΗΔΘ, ΒΔΘΓ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ δεδομένου τριγώνου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ.

Πρόβλημα.

Νὰ ἐγγράψωμεν ἓν τετράγωνον εἰς ἓν δεδομένον τρίγωνον.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 7.) καὶ ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐγγράψαμεν τὸ τετράγωνον ΙΗΖΘ εἰς αὐτό.

Ἀνάλυσις.

Ας φερθῇ ἡ ΑΖ, καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ εἰς Ε τὴν παράλληλον ΒΕ τῆς ΑΓ. Καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ΒΔ καὶ ΕΚ.

Επειδὴ ΕΒ εἶναι παράλληλος τῆς ΑΓ, ἢ τῆς ΖΗ, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΑΖ: ΑΕ:: ΖΗ: ΕΒ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ κάθετος ΕΚ εἶναι παράλληλος τῆς ΖΘ, ἔχομεν παρομοίως ΑΖ: ΑΕ:: ΖΘ: ΕΚ. Ἐκ τῶν ὁποίων δύο ἀναλογιῶν συνάγομεν ΖΗ: ΕΒ:: ΖΘ: ΕΚ. Καὶ ἐπειδὴ ΖΗ=ΖΘ, διὰ τοῦτο ΕΒ=ΕΚ. Τώρα, ἡ γραμμὴ ΕΚ εἶναι γνωστὴ· ἐπειδὴ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΒΔ, ἥτις εἶναι τὸ ὕψος τοῦ δεδομένου τριγώνου, λοιπὸν ΕΒ εἶναι καὶ αὐτὴ προσδιορισμένη, τόσον εἰς θέσιν, ὅσον καὶ εἰς μέγεθος· ὅθεν ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ

στιγμὴ Ε εἶναι γνωστή. Παρομοίως εἶναι γνωστὴ καὶ ἡ κοινὴ τομὴ τῆς ΑΕ μὲ τὴν ΒΓ, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ κοινὴ τομὴ τῆς παραλλήλου ΖΗ καὶ τῆς καθέτου ΖΘ. Λοιπὸν τὸ τετράγωνον ΖΗΙΘ εἶναι εἰς ὅλην του τὴν ἔκτασιν προσδιορισμένον.

Σύνθεσις.

Ἐκ τῆς στιγμῆς Β ἄγομεν μίαν παράλληλον ΒΕ τῆς εὐθείας ΑΓ καὶ μίαν κάθετον ΒΔ. Λαμβάνομεν ΒΕ ἴσην μὲ τὴν ΒΔ, καὶ φέρομεν τὴν γραμμὴν ΑΕ, ἥτις τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ζ, καὶ ἂς γραφθῇ τὸ ὀρθογώνιον ΙΗΖΘ.

Ἐπειδὴ ΒΕ καὶ ΕΚ εἶναι ἀμοιβαίως παράλληλοι τῶν ΗΖ, ΖΘ, ἔχομεν ΑΕ: ΑΖ :: ΒΕ: ΗΖ καὶ ΑΕ: ΑΖ :: ΕΚ: ΖΘ· ὅθεν συνάγομεν ὅτι ΒΕ: ΗΖ :: ΕΚ: ΖΘ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ΒΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΕΚ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, λοιπὸν ΗΖ=ΖΘ, καὶ διὰ τοῦτο τὸ ὀρθογώνιον ΙΗΖΘ εἶναι ἓν τετράγωνον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΙ.

Πρόβλημα.

Ἐκ μιᾶς δεδομένης στιγμῆς νὰ ἄξωμεν μίαν εὐθεῖαν τοιαύτην, ὥστε τὰ μέρη ταύτης τῆς εὐθείας, τὰ ὁποῖα τελειόνουν (δηλαδὴ συναπαντῶνται) εἰς δύο δεδομένας γραμμὰς, νὰ ἔχουν μεταξύτων λόγον δεδομένον.

Ἔστω Α (σχ. 8.) ἡ δεδομένη στιγμὴ, καὶ ΒΓ, ΒΔ αἱ δύοδεδομέναι γραμμαὶ, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι φέρομεν τὴν γραμμὴν ΕΑΖ εἰς τρόπον ὥστε ἡ ΕΑ νὰ ἶναι εἰς τὴν ΑΖ ὡς ἡ Μ πρὸς τὴν Ν.

Ἀνάλυσις.

Ἐὰν ἐκ τῆς στιγμῆς Α ἄξωμεν τὴν ΑΗ παράλληλον τῆς ΒΓ, αὕτη ἡ εὐθεῖα συναπαντᾷ τὴν ΒΔ εἰς

μίαν στιγμὴν Η, ἥτις εἶναι φανερὰ γνωστή. Αἱ γραμμαὶ ΖΕ, ΖΒ τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα διὰ τῶν παραλλήλων ΒΕ, ΗΑ, καὶ διὰ τοῦτο ΕΑ: ΑΖ:: ΒΗ: ΗΖ. Καὶ ἐπειδὴ ὁ λόγος τῆς ΑΕ πρὸς τὴν ΑΖ, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι δεδομένος, ἕπεται, ὅτι γνωστὸς εἶναι καὶ ἐκεῖνος τῆς ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ. Ἀλλὰ ΒΗ εἶναι γνωστή, λοιπὸν καὶ ἡ ΗΖ εἶναι παρομοίως. Ἐκ τούτου συνάγομεν, ὅτι ἡ στιγμὴ Ζ καὶ ἡ γραμμὴ ΕΛΖ εἶναι προσδιορισμέναι.

Σύνθεσις.

Ἂς ἀξωμεν τὴν ΑΗ παράλληλον τῆς ΒΓ, καὶ ἂς προσδιορισθῇ ἡ ΗΖ εἰς τρόπον ὥστε ΒΗ: ΗΖ:: Μ: Ν καὶ ἂς φερθῇ ἡ ΖΑΕ· αὕτη ἡ εὐθεῖα εἶναι ἡ ζητουμένη. Διότι, ἐπειδὴ ΒΕ καὶ ΑΗ εἶναι παράλληλοι, ἔχομεν ΕΑ: ΑΖ:: ΒΗ: ΗΖ, καὶ ἐπειδὴ ΒΗ: ΗΖ:: Μ: Ν· ἕπεται, ὅτι καὶ ΕΑ: ΑΖ:: Μ: Ν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

Πρόβλημα.

Ἐκ μιᾶς δεδομένης στιγμῆς νὰ ἀξωμεν μίαν εὐθεῖαν, ἥτις νὰ διαιρῆται εἰς δεδομένον λόγον διὰ μιᾶς δεδομένης περιφερείας.

Ἔστω Α (σχ. 9.) ἡ δεδομένη στιγμὴ καὶ ΒΔΓΕ ὁ δεδομένος κύκλος· καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΓ ἥτις νὰ ἦναι πρὸς τὴν ΑΓ ὡς ἡ Μ πρὸς τὴν Ν.

Ἀνάλυσις.

Ἂς φερθῶσιν ἡ διάμετρος ΔΑΕ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΔΒ, ΓΕ· καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΖ παράλληλος τῆς ΔΒ. Ἐπειδὴ ἡ στιγμὴ Α καὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εἶναι δεδομένα, ἡ διάμετρος ΔΕ εἶναι γνωστῆς θέσεως, καθὼς καὶ τὰ ἄκρα αὐτῆς Δ καὶ Ε. Ἐπειδὴ δὲ ΔΒ εἶναι παράλληλος τῆς ΓΖ· διὰ τοῦτο ΒΑ: ΑΓ:: ΔΑ: ΑΖ.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι ὁ λόγος τῆς ΔΑ πρὸς τὴν ΑΖ εἶναι γνωστὸς. Καὶ ἐπειδὴ ΑΔ εἶναι δεδομένη, τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖ καὶ διὰ τὴν ΑΖ. Περιπλέον ἐκ τῆς ἰδιότητος τοῦ κύκλου, ἔχομεν, ΒΑ×ΑΓ=ΑΔ×ΑΕ, τουτ' ἔστιν ΑΕ: ΑΓ:: ΒΑ: ΑΔ· καὶ ἐπειδὴ ΑΒ: ΑΔ:: ΑΓ: ΑΖ· λοιπὸν ΑΕ: ΑΓ:: ΑΓ: ΑΖ· δηλαδὴ ΑΓ προσδιορίζεται διὰ μιᾶς μέσης ἀνάλογου μεταξὺ ΑΖ καὶ ΑΕ· οὕτως ἡ στιγμὴ Γ γίνεται γνωστὴ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ εὐθεῖα ΒΓ προσδιορίζεται.

Σύνθεσις.

Ἀφ' οὗ φέρωμεν τὴν διάμετρον ΔΕ, λαμβάνομεν ΑΖ εἰς τρόπον ὥστε ΔΑ: ΑΖ:: Μ: Ν. Μετὰ ταῦτα ζητοῦμεν μίαν μέσην ἀνάλογον ΑΗ μεταξὺ ΑΖ καὶ ΑΕ, καὶ προσδιορίζομεν τὴν Γ ὥστε ἡ ΑΓ νὰ ἦναι ἴση μὲ ταύτην τὴν μέσην ἀνάλογον· λέγω, ὅτι ἡ ΒΑΓ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τοῦτο, ἐπιζευγνύομεν τὰς εὐθείας ΔΒ, ΓΖ, ΖΕ. Τώρα, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον ΒΑ×ΑΓ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον ΑΔ×ΑΕ· ἕπεται, ὅτι ΑΕ: ΑΓ:: ΒΑ: ΑΔ.

Ἀλλ' ἐκ τῆς κατασκευῆς, ΑΕ: ΑΓ:: ΑΓ: ΑΖ. Λοιπὸν ΑΓ: ΑΖ:: ΒΑ: ΔΑ. Ὅθεν συνάγομεν ΑΓ: ΒΑ:: ΑΖ: ΔΑ· τοῦτ' ἔστι:: Μ: Ν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

Πρόβλημα.

Ἐκ δύο δεδομένων στιγμῶν ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου, νὰ φέρωμεν εἰς μίαν ἄλλην στιγμὴν ταύτης τῆς περιφερείας δύο εὐθείας, αἵτινες νὰ ὦναι μεταξύτων εἰς λόγον δεδομένον.

Ας ὑποθέσωμεν λοιπὸν, ὅτι ἐκ τῶν στιγμῶν Α καὶ Β (σχ. 10) φέρομεν εἰς τὴν στιγμὴν Γ τὰς δύο εὐθείας, ΑΓ καὶ ΒΓ, καὶ ὅτι αὗται ἔχουν μεταξύ των τὸν δεδομένον λόγον.

Ἀνάλυσις.

Ας ἀχθῇ ἡ ΓΕ ὥστε νὰ διαιρῇ εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν ΑΓΒ. Ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΑΓ: ΓΒ:: ΑΔ: ΔΒ, καὶ διὰ τοῦτο ὁ λόγος τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ εἶναι δεδομένος· τοῦτο μᾶς προσδιορίζει τὴν στιγμὴν Δ. Καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΓΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΒΓΕ, τὸ τόξον ΑΕ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τόξον ΕΒ. Οὕτως ἡ στιγμὴ Ε προσδιορίζεται, λαμβανομένου τοῦ ἡμίσεως τοῦ τόξου ΑΕΒ. Αἱ στιγμαὶ Δ', Ε ἀφ' οὗ προσδιορισθοῦν, γίνεται γνωστὴ ἡ εὐθεῖα ΕΔΓ. Τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖ διὰ τὴν στιγμὴν Γ καὶ τὰς εὐθείας ΑΓ, ΒΓ.

Σύνθεσις.

Ας τμηθῇ τὸ τόξον ΑΕΒ εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὴν στιγμὴν Ε. Διαιροῦμεν εἰς τὴν στιγμὴν Δ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς δύο μέρη, τὰ ὁποῖα νὰ ἦναι μεταξύ των εἰς τὸν δεδομένον λόγον· φέρομεν τὴν γραμμὴν ΔΕ, τὴν ὁποίαν ἐκβάλλομεν ὑπὸ τῆς ΑΒ, ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὴν στιγμὴν Γ.

Λέγω ὅτι αἱ χορδαὶ ΑΓ, ΒΓ εἶναι μεταξύ των εἰς τὸν δεδομένον λόγον. Διότι, ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΕ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΕΒ, ἡ γωνία ΑΓΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΒΓΔ, καὶ διὰ τοῦτο ὁ λόγος τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ εἶναι ὁ αὐτὸς τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΒΔ, τοῦτ' ἔστιν ἴσος μὲ τὸν δεδομένον λόγον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΑ'

Πρόβλημα.

Εἰς μιᾶς δεδομένης στιγμῆς νὰ φέρωμεν εἰς ἕνα κύκλον μίαν διατέμνουσαν τοιαύτην, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τὸ σχηματιζόμενον ἀπὸ τὸ ἐκτὸς μέρος, καὶ τὸ ἐντὸς τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου περιεχόμενον, νὰ ἦναι ἰσοδύναμον μὲ ἓν δεδομένον ἐμβαδόν.

Ας ὑποθέσωμεν, ὅτι φέρομεν ἐκ τῆς στιγμῆς Α (Σχ. 11) τὴν εὐθεῖαν ΑΒΓ εἰς τρόπον ὥστε τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ×ΒΓ νὰ ἦναι ἰσοδύναμον μὲ ἓν δεδομένον ἐμβαδόν.

Ἀνάλυσις.

Ἐκ τοῦ κέντρου Ο φέρομεν τὴν ΑΖ, καὶ ζητοῦμεν ἓν μῆκος ΑΕ, τὸ ὁποῖον νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν ΑΔ ἓν ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον ἐμβαδόν. Ἐπειδὴ ΑΒ×ΑΓ = ΑΔ×ΑΖ, ἐκ δὲ τῆς κατασκευῆς ΑΒ×ΒΓ = ΑΔ×ΑΕ· ἕπεται, ὅτι ΑΔ: ΑΒ: : ΑΓ: ΑΖ: : ΒΓ: ΑΕ. Ἐκ ταύτης τῆς ἀναλογίας συνάγομεν, ὅτι ΑΔ: ΑΒ: : ΑΓ—ΒΓ τοῦτ' ἔστιν ΑΒ: ΑΖ—ΑΕ τοῦτ' ἔστιν ΕΖ. Λοιπὸν ΑΒ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ΑΔ καὶ ΕΖ. Καὶ ἐπειδὴ ΑΕ εἶναι δεδομένη, διὰ τοῦτο καὶ ἡ ΕΖ εἶναι προσδιορισμένη, καὶ ἑπομένως ἡ ΑΒ εἶναι γνωστὴ τόσον εἰς μέγεθος, ὅσον καὶ εἰς θέσιν.

Σύνθεσις.

Ας ἀχθῇ ἡ ΑΖ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ ΑΕ εἰς τρόπον ὥστε τὸ ὀρθογώνιον ΑΔ×ΑΕ νὰ ἦναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον ἐμβαδόν. ἂς ζητήσωμεν μίαν μέσην ἀνάλογον μεταξὺ τῆς ΑΔ καὶ ΕΖ. Καὶ ἂς φερθῇ αὐτὴ ἐκ τῆς στιγμῆς Α ἐπὶ τῆς περιφερείας μέχρι τῆς στιγμῆς Β. Λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ×ΒΓ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον ἐμβαδόν.

Ἐπειδὴ ΑΔ: ΑΒ: : ΑΒ: ΕΖ καὶ ΑΔ: ΑΒ: : ΑΓ: ΑΖ συνάγομεν ὅτι ΑΔ: ΑΒ: : ΑΓ—ΑΒ ἢ ΒΓ: ΑΖ—ΕΖ ἢ ΑΕ, διὰ τοῦτο ΑΔ×ΑΕ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ×ΒΓ.