Ας λάβωμεν τώρα καὶ μερικὰ θεωρήματα, τὰ ὁποῖα σκοπὸν ἔχουν τὴν ἀπόδειξιν ὑπαρκτικῆς τινὸς ἰδιότητος, τὴν ὁποίαν τὰ δοθέντα ἔχουν, ἐξαιτίας ἄλλων ὑπαρκτικῶν ἰδιοτήτων ἀποδιδομένων εἰς αὐτά.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.

Σχ. 3. Ἐὰν εἰς σταθερὰν στιγμὴν Α τεθῇ ἡ κορυφὴ δεδομένης καὶ ἀμεταβλήτου μεγέθους γωνίας, καὶ αἱ δύο πλευραὶ ταύτης τῆς γωνίας κινοῦνται ὁλόγυρα τῆς σταθερᾶς στιγμῆς Α, εἰς τρόπον ὥστε νὰ φυλάττουν πάντοτε τὴν αὐτὴν κλίσιν μεταξύ των, καὶ τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ προσέτι τὸ ἄκρον τῆς μιᾶς τῶν πλευρῶν νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῶν στιγμῶν δεδομένης περιφερείας, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εἶναι Δ, καὶ ἡ ἀκτὶς ΔΒ· λέγω ὅτι τὸ ἄκρον τῆς ἄλλης πλευρᾶς θέλει εὑρίσκεται ἐπὶ μιᾶς ἄλλης περιφερείας προσδιορισμένου κύκλου.

Ἔστω ἡ γωνία ΒΑΓ ἔχουσα τὴν κορυφήν της εἰς τὴν σταθερὰν στιγμὴν Α, ἀμεταβλήτου μεγέθους· ὁ λόγος τῶν δύο πλευρῶν της: δηλαδὴ τῆς ΑΒ πρὸς ΑΓ ἔστω μ:ν εἰς ὅλας τὰς καταστάσεις τῶν διαφόρων μεγεθῶν, ὁποῦ εἰς τὴν τοιαύτην κίνησιν δύνανται νὰ λάβουν.

Συνθετικῶς.

Ας ἑνωθῇ ἡ στιγμὴ Α μὲ τὸ κέντρον Δ· ἂς σχηματισθῇ ἡ γωνία ΔΑΕ = ΒΑΓ· ἂς ληφθῇ ἡ ΑΕ εἰς τρόπον ὥστε ΑΒ: ΑΓ :: ΑΔ: ΑΕ, καὶ ἐκ τοῦ Ε ὡς ἐκ κέντρου μὲ διάστημα ΓΕ = ΒΔ. $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}}$ ἂς γραφθῇ ὁ κύκλος ΜΚΝ. Λέγω ὅτι εἶναι ὁ ζητούμενος, ἐκεῖνος δηλαδή, τοῦ ὁποίου τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας θέλει διατρέχει τὸ ἄκρον Γ.

Δεῖξις. Τὸ πᾶν συνίσταται νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὸ ἄκρον Γ πρέπει εἰς ὅλας τὰς θεσεις του νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας ΚΜΝ· διὰ τοῦτο ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐν ᾧ τὸ Β φθάνει εἰς Β', τὸ Γ εὑρίσκεται εἰς τὴν στιγμὴν Γ', τοιαύτην ὥστε ἡ γωνία Β'ΑΓ' = ΒΑΓ ἢ ΔΑΕ, καὶ ΑΒ' : ΑΓ' :: ΑΒ : ΑΓ· λέγω, ὅτι ἡ δευτέρα θέσις Γ' τῆς στιγμῆς Γ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας ΚΜΝ. Τῷ ὄντι, ἂς ἑνωθῇ τὸ Ε μὲ τὴν Γ', ὅπου εὑρίσκεται, καὶ τὸ κέντρον Δ μὲ τὴν Β'. Επειδὴ τὰ τρίγωνα ΔΑΒ' καὶ ΕΑΓ' ἔχουν τὴν γωνίαν ΔΑΒ' = ΕΑΓ', καὶ ὑπάρχει ἡ ἀναλογία ΑΔ : ΑΕ :: ΑΒ' : ΑΓ', διὰ τοῦτο εἶναι ὅμοια· Επομένως ΔΒ', ἢ ΔΒ : ΑΒ' :: ΕΓ' : ΑΓ'· λοιπὸν $ΕΓ' = \frac{ΔΒ \times ΑΓ'}{ΑΒ'}$, ἀλλὰ $\frac{ΑΓ'}{ΑΒ'} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$ ἄρα $ΕΓ' = ΔΒ \times \frac{ΑΓ}{ΔΒ}$. Λοιπὸν τὸ σημεῖον Γ' εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας ΚΜΝ,

Παρομοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι τοῦτο ὑπάρχει διὰ κάθε ἄλλην θέσιν τῆς στιγμῆς Γ. Λοιπὸν ἐὰν ἡ κορυφὴ κ.τ.λ.

Αναλυτικῶς.

Ας ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ ζητούμενος κύκλος εἶναι ἐκεῖνος, ὅστις ἔχει Ε διὰ κέντρον, τὸν ὁποῖον μετὰ ταῦτα προσδιορίζομεν. Εν ᾧ λοιπὸν κατὰ πρῶτον ἡ στιγμὴ τῆς πλευρᾶς ΑΒ, τουτέστι ἡ Β εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ κύκλου Δ, ἡ στιγμὴ Γ θέλει εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ κύκλου ὅστις ἔχει κέντρον τὸ Ε.

Τούτου τεθέντος, ἑνωθήτω τὸ Δ καὶ Α, παρομοίως Α καὶ Ε, καθὼς Γ καὶ Ε, Β καὶ Ζ, Γ καὶ Η. Επειδὴ ἐξ ὑποθέσεως ΑΒ : ΑΓ :: ΑΖ : ΑΗ, καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ = ΖΑΗ· διὰ τοῦτο τὸ τρίγωνον ΒΑΖ εἶναι

ὅμοιον μὲ τὸ ΓΑΗ· λοιπὸν ἡ γωνία ΒΖΑ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΗΑ· ἀλλ' ἐπειδὴ ΑΖΒ + ΒΖΔ εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς, καθὼς καὶ ΑΗΓ + ΓΗΕ, ἕπεται ὅτι ΑΗΓ + ΓΗΕ = ΑΖΒ + ΒΖΔ· δέδεικται δὲ ἡ ΒΖΑ = ΓΗΑ· ἄρα καὶ ΒΖΔ = ΓΗΕ. Περιπλέον ΒΖΔ = ΔΒΖ, καὶ ΓΗΕ = ΕΓΗ· τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΔΒΖ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ τρίγωνον ΕΓΗ, δηλαδὴ ἡ γωνία ΒΔΖ ἢ ΒΔΑ = ΓΕΗ ἢ ΓΕΑ· ἀλλὰ πρότερον δέδεικται ἡ ΒΑΖ = ΓΑΗ, λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΔΒΑ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΓΕΑ· ἔχομεν ἄρα ΑΒ: ΑΓ:: ΑΔ: ΑΕ· ἐπειδὴ δὲ αἱ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ εἶναι δεδομέναι, διὰ τοῦτο γίνεται γνωστὴ καὶ ἡ ΑΕ. Περιπλέον ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν ἰδίων τριγώνων ἔχομεν, ΑΒ: ΑΓ:: ΒΔ: ΕΓ· λοιπὸν καὶ ἡ ΓΕ, δηλαδὴ ἡ ἀκτὶς τοῦ ζητουμένου κύκλου, προσδιορίζεται.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν λοιπὸν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, τὴν ὁποίαν διατρέχει τὸ ἄκρον Γ τῆς δευτέρας πλευρᾶς, κατὰ μὲν πρῶτον ἑνόνομεν τὴν σταθερὰν στιγμὴν Α μὲ τὸ κέντρον τοῦ δεδομένου κύκλου, μετὰ ταῦτα εἰς τὴν στιγμὴν Α κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν ΔΑΕ ἴσην μὲ τὴν δεδομένην ΒΑΓ, καὶ λαμβάνομεν τετάρτην ἀνάλογον μεταξὺ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, καὶ οὕτως ἔχομεν τὴν στιγμὴν Ε, δηλαδὴ τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου. Κάμνοντες μετὰ ταῦτα κέντρον ταύτην τὴν στιγμὴν, καὶ διάστημα ΕΓ, δηλαδὴ $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}}$· ΒΔ, γράφομεν τὸν ζητούμενον κύκλον.

ΘΕΩΡΗΜΑ Β'.

Σχ. 4. Ἐὰν ἐκ δύο δεδομένων σταθερῶν στιγμῶν, φέρωμεν εἴς τινα στιγμὴν δύο εὐθείας, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των νὰ ἦναι ἴσον μὲ δεδομένον τετράγωνον, καὶ ἡ στιγμὴ αὕτη κινῆται φυλάττουσα

πάντοτε τοιαύτην θέσιν, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο γραμμῶν, αἵτινες ἀναχωροῦσιν ἐκ τῆς νέας θέσεως τῆς στιγμῆς, καὶ ἑνόνουν τὰς δεδομένας καὶ σταθερὰς στιγμὰς, νὰ ἦναι πάντοτε ἴσον μὲ τὸ δεδομένον τετράγωνον· λέγω ὅτι ἡ στιγμὴ αὕτη κινεῖται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας προσδιορισμένου κύκλου, ἢ ὁ γεωμετρικὸς τόπος ταύτης τῆς στιγμῆς εἶναι περιφέρεια προσδιορισμένου κύκλου.

Ἔστωσαν αἱ δεδομέναι στιγμαὶ A καὶ B, καὶ ἡ στιγμὴ M, ἐκ τῆς ὁποίας φέροντες τὰς AM, MB ἔχομεν $\overline{AM}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{ZH}^2$· λέγω ὅτι κινουμένη ἡ στιγμὴ M, καὶ φυλάττουσα πάντοτε εἰς ὅλας της τὰς θέσεις τὴν σχέσιν $\overline{AM}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{ZH}^2$, θέλει εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου προσδιορισμένου.

Συνθετικῶς.

Ἂς τμηθῇ ἡ AB δίχα εἰς τὸ O· ἐπὶ τῆς OA ἂς κατασκευασθῇ τετράγωνον τὸ AOΛK, ἐπὶ τῆς διαγωνίου τοῦ ὁποίου OK εἰς τὴν στιγμὴν O, ἂς ὑψωθῇ ἡ OT κάθετος. Ἐκ τοῦ K ὡς κέντρου, μὲ διάστημα ἴσον μὲ τὴν ZH, ἂς γραφθῇ, τὸ τόξον T· ἐπὶ τῆς TO ἂς γραφθῇ τὸ τετράγωνον OTNΠ, ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ διαγώνιος ON, ἥτις ἂς τμηθῇ δίχα εἰς τὴν στιγμὴν Σ· λέγω ὅτι ὁ ἐκ τοῦ σημείου O ὡς κέντρου, μὲ διάστημα τὴν OΣ γραφόμενος κύκλος εἶναι ὁ ζητούμενος.

Δεῖξις. Ἐπειδὴ $\frac{\overline{NO}^2}{4} = \overline{O\Sigma}^2$, καὶ $\overline{O\Sigma}^2 = \frac{\overline{OT}^2}{2}$, καὶ $\overline{OT}^2 = \overline{ZH}^2 - \overline{OK}^2 = \overline{ZH}^2 - 2\overline{AO}^2$, ἄρα $\overline{O\Sigma}^2 = \frac{\overline{ZH}^2 - 2\overline{AO}^2}{2}$. Ἀπὸ ἄλλο μέρος ἐξαιτίας τοῦ ζητουμένου κύκλου $\overline{MB}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{BO}^2 - 2\overline{OB}.\overline{OE}$, καὶ $\overline{AM}^2 = \overline{MO}^2 +$

$\overline{OA}^2 + 2OA.\ OE$, καὶ $\overline{AM}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{ZH}^2 = 2\overline{MO}^2 + 2\overline{OA}^2$· ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς κατασκευῆς $OA = OB$· διὰ τοῦτο $2\overline{MO}^2 = \overline{ZH}^2 - 2\overline{AO}^2$ ἤ $\overline{MO}^2 = \frac{\overline{ZH}^2 - 2\overline{OA}^2}{2}$· ἀλλ' OM εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ ζητουμένου κύκλου ἄρα $MO = \Sigma O$.

Αναλυτικῶς.

Ας ὑποθέσωμεν ὅτι τῷ ὄντι οὕτως ἔχει, ὅτι δηλαδὴ ἡ σιγμὴ M διατρέχει τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΓΜΔ, τοῦ ὁποίου ὑποθέτω, ὅτι τὸ κέντρον εἶναι εἰς τὴν σιγμὴν O. Τώρα ἐπειδὴ καὶ ἡ σιγμὴ Δ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας ΓΜΔ, διὰ τοῦτο $\overline{AΔ}^2 + \overline{ΔB}^2 = \overline{ZH}^2$, καὶ παρομοίως $\overline{ΓB}^2 + \overline{ΓA}^2 = \overline{HZ}^2$· καὶ διὰ τοῦτο $\overline{ΓA}^2 - \overline{AΔ}^2 = \overline{ΔB}^2 - \overline{ΓB}^2$, ἤ $(ΓA + ΔA)\ (AΓ - AΔ) = (ΔB + BΓ)\ (ΔB - BΓ)$ ἤ $ΓΔ\ (AΓ - AΔ) = ΓΔ\ (ΔB - BΓ)$ ἤ $AΓ - AΔ = ΔB - BΓ$, ἤ $AΓ + BΓ = ΔB + ΔA$, καὶ διὰ τοῦτο $(AΓ + BΓ)^2 = (ΔB + ΔA)^2$, καὶ $\overline{AΓ}^2 + \overline{BΓ}^2 + 2AΓ.\ BΓ = \overline{ΔB}^2 + \overline{ΔA}^2 + 2ΔB.\ ΔA$ καὶ ἐπειδὴ δέδεικται, ὅτι $\overline{AΓ}^2 + \overline{BΓ}^2 = \overline{ΔB}^2 + \overline{ΔA}^2$, διὰ τοῦτο καὶ $2AΓ.\ BΓ = 2ΔB.\ ΔA$, ἤ $AΓ : ΔB :: ΔA : BΓ$, ἤ $AΓ : ΔA :: ΔB : BΓ$, καὶ διὰ τοῦτο $ΓΔ : ΔA :: ΓΔ : BΓ$, δηλαδὴ $AΔ = BΓ$ πάλιν ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἶναι $OΔ$ ἤ $OA + AΔ$, καὶ $OB + ΓB$, διὰ τοῦτο $OA + AΔ = OB + ΓB$· ἀλλὰ δέδεικται ὅτι $AΔ = BΓ$, ἄρα $OA = OB$, δηλαδὴ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εἶναι ἡ σιγμὴ τῆς ἡμισείας τῆς εὐθείας, ἥτις ἑνόνει τὰς δεδομένας σιγμάς.

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἀκτῖνα τοῦ τοιούτου κύκλου, κάμνομεν, ὡς ἀκολούθως.

Ἐκ τῆς στιγμῆς Μ φέρομεν τὴν κάθετον ΜΕ ἐπὶ τῆς διαμέτρου, τότε ἑνόντες τὸ κέντρον Ο μὲ τὸ Μ, ἔχομεν δύο πλάγια ἰσοϋψῆ τρίγωνα, τὸ μὲν ἀμβλυγώνιον, τὸ δὲ ὀξυγώνιον· διὰ τοῦτο $\overline{AM}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{AO}^2 + 2AO.\ OE$, καὶ $\overline{BM}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{BO}^2 - 2OE.\ BO$.

Ἐπειδὴ δὲ $AO = OB$, διὰ τοῦτο ἀθροίζοντες τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις ἔχομεν

$$\overline{AM}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{ZH}^2 = 2\overline{MO}^2 + 2\overline{AO}^2,$$

ὅθεν $$\overline{MO}^2 = \frac{\overline{ZH}^2 - 2\overline{OA}^2}{2}.$$

Πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ταύτης τῆς ἐκφράσεως ἐπὶ 2, ἔχομεν $\overline{MO}^2 = 2\left(\frac{\overline{ZH}^2 - 2\overline{OA}^2}{4}\right)$ ἢ $MO = \frac{1}{2}\sqrt{[2(\overline{ZH}^2 - 2\overline{AO}^2)]}$. Ἂς κατασκευασθῇ τὸ τετράγωνον ΛΟΚΛ $= \overline{AO}^2$· διὰ τοῦτο $\overline{OK}^2 = 2\overline{AO}^2$· λοιπὸν $MO = \frac{1}{2}\sqrt{[2(\overline{ZH}^2 - \overline{OK}^2)]}$. Ἐπὶ τῆς ΟΚ εἰς τὴν στιγμὴν Ο ἂς ὑψωθῇ κάθετος ἡ ΟΤ, καὶ ἐκ τοῦ Κ, ὡς κέντρου μὲ διάστημα τὴν ΖΗ, ἂς γραφθῇ τὸ τόξον Τ. Ἐπὶ τῆς ΟΤ ἂς κατασκευασθῇ τὸ τετράγωνον ΟΠΝΤ. Τότε $\overline{TK}^2 - \overline{OK}^2 = \overline{TO}^2 = \overline{ZH}^2 - 2\overline{OA}^2$· λοιπὸν . . . . . .

$$MO = \frac{1}{2}\sqrt{[2(\overline{ZH}^2 - 2\overline{OA}^2)]} = \frac{1}{2}\sqrt{[2(\overline{TK}^2 - \overline{OK}^2)]} =$$

$\frac{1}{2}\sqrt{(2 \cdot \overline{TO}^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{\overline{ON}^2} = \frac{1}{2}\,ON = O\Sigma.$

Εκ τούτου ἕπεται, ὅτι ὁ ἐκ τοῦ Ο ὡς κέντρου μὲ ἀκτῖνα τὴν ΟΣ γραφόμενος κύκλος εἶναι ὁ ζητούμενος.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΓ.

Ἐὰν ἐκ μιᾶς τῶν κοινῶν τομῶν δύο κύκλων φέρωμεν τὰς διαμέτρους εἰς τοὺς τοιούτους κύκλους, καὶ μετὰ ταῦτα ἑνώσωμεν δι' εὐθείας τὰ ἄκρα τῶν δύο διαμέτρων· λέγω 1.ον ὅτι αὕτη ἡ εὐθεῖα διέρχεται ἐκ τῆς δευτέρας τομῆς τῶν κύκλων· 2.ον ὅτι εἶναι ἡ μεγίστη ὅλων τῶν εὐθειῶν, αἵτινες δύνανται νὰ φερθῶσιν ἐκ ταύτης τῆς κοινῆς τομῆς τῶν δύο κύκλων, καὶ αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰ ἄκρατων ἐπὶ τῶν περιφερειῶν τῶν ἰδίων κύκλων.

Σχ. 5. Ἔστω τὸ κέντρον τοῦ ἑνὸς Γ, καὶ τοῦ ἄλλου Δ· αἱ κοιναὶ τομαὶ αὐτῶν Α καὶ Β. Ἂς φερθῶσιν αἱ διάμετροι ΑΕ, ΑΖ· λέγω 1.ον ὅτι ἡ ΖΕ διέρχεται ἐκ τῆς στιγμῆς Β· 2.ον ὅτι ἡ ΖΕ εἶναι ἡ μεγίστη ὅλων τῶν ἄλλων, αἵτινες φέρονται ἐκ τῆς Β, καὶ συναπαντῶσι τὰς δύο περιφερείας, καθὼς αἱ Ε'Ζ', Ε''Ζ'' . . . .

Συνθετικῶς.

Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΕ καὶ ΖΒ. 1.ον ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΒΕ εἶναι ὀρθὴ, καθὼς καὶ ἡ ΑΒΖ· διὰ τοῦτο ἡ ΕΒ εἶναι ἐπ' εὐθείας τῆς ΕΖ, ὅ ἐστιν ἡ εὐθεῖα, ἥτις ἑνόνει τὴν στιγμὴν Ε καὶ Ζ διέρχεται καὶ ἐκ τῆς Β· λοιπὸν 1.ον ἡ εὐθεῖα ΕΖ κ.τ.λ. 2.ον ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΕΑΖ, Ε'ΑΖ', Ε''ΑΖ'' . . . . εἶναι ὅμοια· διὰ τοῦτο ἔχομεν.

ΖΕ: Ζ'Ε': Ζ''Ε'' . . . . :: ΑΕ: ΑΕ': ΑΕ'',

ἀλλὰ ΑΕ, ὡς διάμετρος, εἶναι μείζων ἑκάστης χορδῆς ΑΕ', ΑΕ'' . . . . ἄρα καὶ ἡ ΕΖ εἶναι μείζων κάθε ἄλλης, φερομένης ἐκ τῆς σιγμῆς Β, γραμμῆς ἐντὸς τῶν κύκλων, δηλαδὴ τῆς Ζ'Ε' ἢ Ζ''Ε'' . . . λοιπὸν 2.ον ἡ ΖΕ εἶναι ἡ μεγίστη κ.τ.λ.

Ἀναλυτικῶς.

Ας ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ΖΕ διέρχεται ἐκ τῆς σιγμῆς Β, τότε τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΕ, ΑΒΖ εἶναι ὀρθογώνια εἰς Β· λοιπὸν ἡ ΑΒ, ἥτις ἑνόνει τὰς τομὰς Α καὶ Β εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΕ. Ἀλλὰ καὶ ἡ εὐθεῖα, ἥτις ἑνόνει τὰ κέντρα Γ καὶ Δ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς ἰδίας εὐθείας, ἄρα ἡ ΔΓ εἶναι παράλληλος τῆς ΖΕ· λοιπὸν πρέπει νὰ ἔχωμεν ΑΓ: ΓΕ:: ΑΔ: ΔΖ· ἐπειδὴ δὲ τοῦτο ὑπάρχει· διὰ τοῦτο ἀληθὲς εἶναι ὅτι ἡ ΖΕ διέρχεται ἐκ τῆς Β.

Νὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι ἡ ΖΕ εἶναι ἡ μεγίστη τῆς Ε'Ζ' καὶ κάθε ἄλλης. Τὸ τρίγωνον ΖΑΕ εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ Ζ'ΑΕ'· ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Ε καὶ Ε' ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον $\frac{\text{ΑλΒ}}{2}$, καὶ αἱ Ζ, Ζ' τὸ αὐτὸ μέτρον $\frac{\text{ΑμΒ}}{2}$: δηλαδὴ γωνία Ε = Ε', καὶ Ζ = Ζ', διὰ τοῦτο ΖΑΕ = Ζ'ΑΕ'. Λοιπὸν ἔχομεν ΖΕ: Ζ'Ε':: ΑΕ ΑΕ'· ἀλλὰ ΖΕ > Ζ'Ε', ἄρα καὶ ΑΕ > ΑΕ'. Τὸ αὐτὸ δεικνύομεν διὰ κάθε ἄλλην ΑΕ'' κ.τ.λ. ἐπειδὴ δὲ ΑΕ εἶναι διάμετρος, διὰ τοῦτο εἶναι ἀληθὲς, ὅτι εἶναι μεγαλητέρα κάθε ἄλλης χορδῆς ΑΕ', ΑΕ'' . . . ἑπομένως ἡ ΕΖ εἶναι ἡ μεγίστη τῶν Ζ'Ε', Ζ''Ε'' . . . .

10.ον Τὰ δύο πρῶτα θεωρήματα, τὰ ὁποῖα ἐδῶ ἔθεσα, σκοπὸν ἔχουν νὰ ἐξηγήσουν τὰς στοιχειώδεις

ἀρχὰς τῶν Γεωμετρικῶν τόπων. Καλοῦσι δὲ οἱ Μαθηματικοὶ Γεωμετρικὸν τόπον, τὴν γραμμὴν ἢ ἐπιφάνειαν, τὴν ὁποίαν διατρέχει μία σιγμὴ κατὰ δεδομένον νόμον κινήσεως.

Τὸ τρίτον θεώρημα δίδει μίαν ἰδέαν τῆς μεγίστης ποσότητος μεταξὺ ποσοτήτων τοῦ ἰδίου εἴδους.

Περὶ δὲ τῆς ἐλαχίστης ποσότητος εἴδομεν εἰς τὴν Στοιχειώδη Γεωμετρίαν, ὅτι ἀπὸ ὅλας τὰς εὐθείας, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ δεδομένην σιγμὴν εἰς τὰς διαφόρους σιγμὰς δεδομένης εὐθείας, ἡ ἐλαχίστη εἶναι ἡ κάθετος.

Παρακαλῶ τοὺς σπουδαστὰς τῆς Μαθηματικῆς νὰ ἀναγνώσουν ἐπιμελῶς τὴν Αναλυτικὴν Γεωμετρίαν τοῦ Κυρίου Leslie· ἀλλ' ἀφ' οὗ τὴν ἀναγνώσουν, ὡς ὁ συγγραφεὺς τὴν ἔγραψε, νὰ τὴν σπουδάσουν ἐκ νέου κατὰ τὴν μέθοδον, τὴν ὁποίαν εἰς αὐτὰ τὰ προλεγόμενα ἐδίδαξα, δηλαδὴ νὰ ἐκλέγουν ἐκείνας τὰς προτάσεις, αἵτινες ἐξαρτῶνται ἀπὸ πολλὰς ἄλλας πρὸ αὐτῶν ἀποδεδειγμένας, καὶ ὑποθέτοντες, ὅτι ἀγνοοῦσιν ὅλας αὐτὰς, καθὼς καὶ τὴν προτεθεῖσαν, νὰ ἄγουν διὰ τῆς Αναλυτικῆς μεθόδου, τὴν δεδομένην εἴς τινα τῶν πρὸ αὐτῆς ἀποδεδειγμένων· τὸ αὐτὸ νὰ πράττουν εἰς αὐτὴν τὴν νεοευρεθεῖσαν, ἄγοντες την εἰς ἄλλην δηλαδὴ, καὶ πάλιν τὴν τρίτην εἰς μίαν τετάρτην, καὶ οὕτω διαδοχικῶς, ἕως οὗ νὰ φθάσουν εἰς τὰ ἀξιώματα ἢ ὁρισμοὺς, ἢ αἰτήματα τῆς ἐπιστήμης.

Προσέτι εἰδοποιῶ τοὺς Αναγνώστας ὅτι ὁ Κύριος Leslie δὲν ἐφύλαξε τὴν ἀκρίβειαν, τὴν ὁποίαν εἰς αὐτὰ τὰ προλεγόμενα ἐδίδαξα, ὅπου δὲν ἔφερα οὐδεμίαν γραμμὴν, ἢ ἔπραξα τὴν παραμικρὰν κατασκευὴν, θέλων νὰ προσδιορίσω τὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν δο-

θέντων καὶ τῶν ζητουμένων, χωρὶς νὰ φανερώσω πῶς ἐγνώρισα, ὅτι οὕτω πρέπει νὰ πράξω. Μ' ὅλον τοῦτο τὸ σύγγραμμα τοῦ Κυρίου Leslie εἶναι ἀξιοσύγατον τόσον διὰ τὴν ὕλην, τὴν ὁποίαν πραγματεύεται, ὅσον καὶ διὰ τὴν τάξιν, μὲ τὴν ὁποίαν ἐκθέτονται τὰ διάφορα ζητήματα, ἐκ τῆς ὁποίας φαίνεται ἡ πρὸς ἄλληλα σχέσις.

Ἐὰν αἱ περιγράσεις μὲ τὸ συγχωρήσουν, καὶ ἡ τύχη ἦναι βοηθὸς, θέλω δώσει καὶ ἄλλας τινὰς θεωρίας ἐπάνω εἰς διαφόρους κλάδους τῆς Μαθηματικῆς. Ἀμποτε καὶ αἱ Μαθηματικαὶ ἐπιστῆμαι νὰ εὕρουν εἰς τὴν ἀρχαίαν των πατρίδα καταφύγιον· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, χωρὶς τῆς θείας βοηθείας. Διότι τινὲς δοκησίσοφοι, καὶ τῷ ὄντι τυφλώττοντες, ἀγνοοῦντες τὴν ἐκ τῶν ἐπιστημῶν τούτων ὠφέλειαν, ἢ διότι ἀπὸ ἀδυναμίαν πνεύματος δὲν ἐδυνήθησαν νὰ προχωρήσουν εἰς τοὺς διαφόρους κλάδους αὐτῶν, ἢ ἐπειδὴ ἡ ψυχή των ἐσυνείθισε νὰ ἑλκύεται ἀπὸ φανταστικὰς ἰδέας, καὶ κατ' ἐπίνοιαν ὡραιότητας, ἐμποδίζουν τὴν Νεολαίαν ἀπὸ τὴν σπουδὴν τῶν ἐπιστημῶν τούτων.