τοῦ ὁποίου ἡ λύσις εἶναι φανερὰ, προτείνομεν τὰ ἀκόλουθα πρόβλημματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

Σχ. 1. Ζητεῖται νὰ φερθῇ εἰς δεδομένον τρίγωνον ΑΒΓ, εὐθεῖά τις ΔΕ, εἰς τρόπον, ὥςε νὰ χωρίσῃ ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ δύο τμήματα ΔΒ, ΕΓ, ὁ λόγος τῶν ὁποίων, καὶ τῆς γραμμῆς ΔΕ νὰ ἦναι ὁ αὐτὸς μὲ ἐκεῖνον τριῶν δεδομένων ἀριθμῶν μ, ν, π: δηλαδὴ ΔΒ: ΕΓ: ΔΕ :: μ: ν: π.

Αρχίζομεν οὕτως. Ὑποθέτομεν, ὅτι εἰς τὸ δεδομένον τρίγωνον ἤχθη ἡ εὐθεῖα ΔΕ, εἰς τρόπον ὥςε ΔΒ: ΕΓ :: μ: ν, καὶ ΔΒ: ΔΕ :: μ: π, καὶ ΕΓ: ΔΕ :: ν: π, τότε ἔχομεν τὰς ςιγμὰς Δ, Β, Γ, Ε γνωςὰς, καὶ τὰς πλευρὰς τοῦ δεδομένου τριγώνου. Πρέπει λοιπὸν μεταξὺ τῶν πλευρῶν, καὶ τῶν εἰρημένων ςιγμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ Δ καὶ Ε εἶναι εἰς θέσιν ἄγνωςον, πλὴν τὴν ὑποθέτομεν γνωςὴν, νὰ εὕρωμεν σχέσεις διὰ νὰ γνωρίσωμεν τὴν κατασκευὴν τῆς λύσεως.

Τώρα τὸ μόνον πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ πράξωμεν, ὅταν ἔχωμεν ςιγμὰς καὶ γραμμὰς; εἶναι νὰ φέρωμεν ἐκ τῶν ςιγμῶν παραλλήλους τῶν δεδομένων γραμμῶν. Διὰ τοῦτο ἐκ τῆς ςιγμῆς Δ ἂς φερθῇ παράλληλος τῆς ΑΓ ἡ ΔΖ, καὶ ἐκ τῆς Γ ἄλλη παράλληλος τῆς ΔΕ ἡ ΓΖ· τὸ σχῆμα λοιπὸν ΕΔΖΓ εἶναι παραλληλόγραμμον, καὶ τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΔΕ, θέλει ἔχει ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΖΓ, καὶ ἐπειδὴ ἔχομεν ἐξ ὑποθέσεως, ΕΓ: ΔΕ:: ν: π· διὰ τοῦτο καὶ ΔΖ: ΖΓ:: ν: π. Περιπλέον ἡ ςιγμὴ τῆς συναπαντήσεως τῶν δύο ἠγμένων παραλλήλων, δηλαδὴ ἡ Ζ, εἶναι γνωςῆς θέσεως. Ας ἑνωθῇ

λοιπὸν αὕτη ἡ στιγμὴ μὲ τὴν Β διὰ τῆς ΒΖ, καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἕως ὁποῦ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Η, ἐκβαλλομένην, ὥστε ἔχομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΗ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΑΗ προσδιορίζεται ἐκ τῆς, ἐξαιτίας τῶν παραλλήλων ΔΖ, ΑΗ, συναγομένης ἀναλογίας ΒΔ: ΒΑ:: ΔΖ: ΑΗ, ἢ ΒΔ: ΔΖ:: ΑΒ: ΑΗ, ἀλλ' ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, ΒΔ: ΓΕ:: μ: ν καὶ ΔΖ=ΓΕ, διὰ τοῦτο μ: ν:: ΑΒ: ΑΗ· ἐκ τῆς ὁποίας ἀναλογίας προσδιορίζομεν τὴν ΑΗ· περιπλέον ἡ στιγμὴ Ζ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΒΗ, ὁποιαδήποτε εἶναι ἡ θέσις τῆς ΔΕ.

Τώρα δυνάμεθα νὰ προτείνωμεν τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα. Νὰ εὕρωμεν ἐπὶ τῆς ΑΒ πλευρᾶς τοῦ νέου τριγώνου, στιγμήντινα, Δ, ἐκ τῆς ὁποίας ἡ ἀγομένη παράλληλος τῆς ΑΗ νὰ προσδιορίζῃ ἄλλην ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΗ, τὴν Ζ, ὥστε ἑνόντες τὴν μὲ τὴν Γ, νὰ ἔχωμεν ΔΖ: ΖΓ:: ΕΓ: ΔΕ:: ν: π. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τοῦτο ὑπάρχει· διὰ τοῦτο ἐκ τῆς στιγμῆς Η ἂς φερθῇ παράλληλος τῆς ΓΖ ἡ ΗΧ· λοιπὸν ἔχομεν ΒΖ: ΒΗ:: ΖΓ: ΗΧ:: ΔΖ ἢ ΕΓ: ΗΑ· διὰ τοῦτο ΖΓ: ΗΧ:: ΕΓ: ΗΑ, ἢ ΕΓ: ΖΓ:: ΑΗ: ΗΧ, ἢ ΕΓ: ΔΕ:: ΑΗ: ΗΧ· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ΕΓ: ΔΕ:: ν: π· λοιπὸν ν: π:: ΑΗ: ΧΗ. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν εἰς τὸ δεύτερον τοῦτο πρόβλημα τὴν ΗΧ, πρέπει νὰ λύσωμεν τρίτον πρόβλημα, δηλαδὴ νὰ εὕρωμεν τετάρτην ἀνάλογον μεταξὺ ν, π, ΑΗ, τὸ ὁποῖον ἠξεύρομεν νὰ λύσωμεν. Κάμνοντες λοιπὸν κέντρον τὴν στιγμὴν Η καὶ διάστημα τὴν τιμὴν τῆς ΗΧ ἂς γράψωμεν τόξον κύκλου, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΒΓ προεκβαλλομένην, εἰς στιγμὴν τινὰ Χ, τὴν ὁποίαν ἑνοῦντες μὲ τὴν Η, ἔχομεν τὴν ΗΧ· ἐκ δὲ τῆς Γ φέροντες τὴν παράλληλον ταύτης ΓΖ,

ἔχομεν τὴν σιγμὴν Ζ· ἐκ δὲ τῆς Ζ ἄγοντες τὴν ΖΔ παράλληλον τῆς ΑΓ, προσδιορίζομεν τὴν σιγμὴν Δ· ἐκ τῆς ὁποίας τέλος πάντων ἄγοντες τὴν ΔΕ παράλληλον τῆς ΖΓ, γνωρίζομεν τὴν ἄλλην ζητουμένην σιγμὴν Ε.

Βλέπομεν λοιπὸν, ὅτι διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὰς σιγμὰς Δ καὶ Ε, πρέπει νὰ προσδιορίσωμεν τὴν σιγμὴν Η, ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ, ζητοῦντες τετάρτην ἀνάλογον μεταξὺ μ, ν καὶ ΑΒ· ἔπειτα, τὴν σιγμὴν Χ ἐπὶ τῆς ΒΓ προεκβαλλομένης, ζητοῦντες παρομοίως τετάρτην ἀνάλογον μεταξὺ ν, π, ΑΗ. Πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ γραφόμενον τόξον τέμνει τὴν ΒΓ εἰς δύο σιγμὰς Χ καὶ Χ'· λοιπὸν ἐκ τῆς Γ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν καὶ τὴν ΓΖ' παράλληλον τῆς ΗΧ', ἥτις συναπαντᾷ τὴν ΒΗ προεκβαλλομένην εἰς τὸ Ζ', ἐκ τοῦ ὁποίου ἄγομεν παράλληλον τῆς ΑΓ τὴν Ζ'Δ', ἥτις συναπαντᾶται ἀπὸ τὴν ΒΑ προεκβαλλομένην εἰς τὸ Δ', ἐκ τοῦ ὁποίου φέρομεν τὴν παράλληλον Δ'Ε', ἥτις συναπαντᾷ τὴν προεκβολὴν τῆς ἄλλης πλευρᾶς εἰς τὸ Ε'. Λοιπὸν ἡ ζητουμένη εὐθεῖα εἶναι ἡ Ε'Δ', καὶ ἔχομεν Δ'Β: Ε'Γ:: μ: ν κ.τ.λ. δηλαδὴ τὸ πρόβλημα εἶναι δεκτικὸν δύο λύσεων.

Παρατήρησις. Εἰς τὸ παρὸν πρόβλημα ἐχρειάσθη νὰ προσδιορίσωμεν τὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν δοθέντων καὶ τῶν ἀγνώστων τῆς προτάσεως.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ αὐτὸ πρόβλημα συνθετικῶς, πράττομεν οὕτω. Λαμβάνομεν τετάρτην ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δεδομένων μ, ν, ΑΒ, τὴν ὁποίαν ἐκτιμῶμεν ἐπὶ τῆς ΑΓ ἐκ τῆς Α εἰς τὴν Η, καὶ ἥτις εἶναι ἡ ΑΗ. Επιζευγνύομεν τὴν ΒΗ· ἔπειτα λαμβάνομεν τετάρτην ἀνάλογον μεταξὺ τῶν ποσοτήτων ν, π, ΑΗ, τὴν ὁποίαν ἐκτιμῶμεν ἐπὶ τῆς ΒΗ.

μετὰ ταῦτα ἐκ τῆς ςιγμῆς Η, ὡς ἐκ κέντρου, μὲ διάςημα τὴν τετάρτην ταύτην ἀνάλογον, γράφομεν τόξον κύκλου, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΒΓ εἰς Χ, καὶ ἐπιζευγνύομεν τὴν ΗΧ. Εκ τῆς ςιγμῆς Γ, φέρομεν τὴν ΓΖ παράλληλον τῆς ΗΧ, ἐκ δὲ τῆς Ζ τὴν ΖΔ παράλληλον τῆς ΑΓ, καὶ ἐκ τῆς Δ, τὴν ΔΕ παράλληλον τῆς ΖΓ· ἡ ΔΕ θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη.

Επειδὴ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἔχομεν μ: ν:: ΑΒ: ΑΗ, καὶ ν: π:: ΑΗ: ΗΧ, ἀλλὰ ΒΗ : ΒΖ :: ΗΧ: ΖΓ, καὶ ΒΗ : ΒΖ :: ΗΑ: ΔΖ, ἢ ΗΑ: ΔΖ :: ΗΧ: ΖΓ, ἢ ΗΑ: ΗΧ :: ΔΖ ἢ ΕΓ: ΓΖ ἢ ΔΕ, λοιπὸν ν: π :: ΕΓ: ΔΕ, ἢ ΕΓ: ΔΕ :: ν: π, ὡς ἐπροτείναμεν. Αλλὰ ποία μεταφυσικὴ ἤθελε μᾶς ἐμπνεύσει τὴν ἀνώτερω κατασκευὴν, ἐὰν ἔλλειπεν ἡ Αναλυτικὴ μέθοδος, ἡ ὁποία τὸν ηὗρε;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.

Νὰ γράψωμεν κύκλον, ὅστις νὰ ἅπτεται δύο ἄλλων δεδομένων, καὶ δεδομένης εὐθείας.

Εςωσαν οἱ δεδομένοι κύκλοι Α καὶ Β, (*) καὶ ἡ δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΓΔ. σχ: 2. Ας ὑποθέσωμεν τελειωμένην τὴν κατασκευὴν, καὶ ὅτι ὁ ζητούμενος κύκλος εἶναι ὁ αβγ, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον εἶναι τὸ Ο. Τὰ δοθέντα εἶναι τὰ κέντρα Α καὶ Β, αἱ ἀκτῖνες Αα, Ββ, ἡ εὐθεῖα ΔΓ, καὶ περιπλέον τὰ ὑποθετικῶς γνωστὰ: αἱ ςιγμαὶ τῶν ἁφῶν α, β, γ, τὸ κέντρον Ο καὶ ἡ ἀκτὶς Οβ. Διὰ τοῦτο ἔχοντες τὸ Ο καὶ τὴν ΟΛ εὐθεῖαν, ἥτις ἑνόνει τὸ κέντρον τοῦ δεδομένου μικροτέρου κύκλου, καὶ τὸ κέντρον τοῦ ὑποθετικῶς γεγραμ-

(*) Διὰ τῶν κέντρων Α καὶ Β παριστάνομεν τοὺς δεδομένους κύκλους.

μένου αβγ, καὶ κάμνοντες κέντρον τὸ τοιοῦτον σημεῖον, καὶ διάστημα τὴν ΟΑ, γράφομεν τὸν κύκλον ΑΜΝ. Ας ἐκβληθῇ ἡ Ογ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ αὐτὸν εἰς τὸ Ν· τότε ΟΝ=ΟΜ· ἀλλ' ἐπειδὴ ΟΜ=ΟΑ ἢ Οβ + βΜ=Οα + Αα, καὶ Οβ=Οα, διὰ τοῦτο αΑ=βΜ, λοιπὸν ΒΜ=Ββ — βΜ=Ββ — αΑ. Τώρα ἐκ τῆς στιγμῆς Ν φέρομεν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου ΑΜΝ τὴν ΝΚ, ἀπέχουσαν τῆς ΔΓ ποσότητα γΝ=αΑ. Λοιπὸν ὁ κύκλος ΑΜΝ διέρχεται ἐκ τοῦ κέντρου Α τοῦ μικροτέρου κύκλου, ἐκ τῆς στιγμῆς Μ, ἥτις ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον Β τοῦ μεγαλητέρου κύκλου, ὅσον ἐκφράζει ἡ διαφορὰ τῶν ἀκτίνων τῶν δεδομένων κύκλων, καὶ ἅπτεται τῆς ΚΝ τῆς ἠγμένης παραλλήλου τῆς δεδομένης εὐθείας, ἥτις ἀπέχει ἀπ' αὐτὴν γΝ=αΑ. Ἕπεται προσέτι, ὅτι, ἐὰν κάμνοντες κέντρον τὸ Β τοῦ μεγάλου κύκλου, καὶ διάστημα τὴν ΒΜ=Ββ — αΑ γράψωμεν τὸν κύκλον ΤΜΙ, ὁ κύκλος ΑΜΝ θέλει διέρχεται ἐκ τῆς στιγμῆς Α, ἅπτεται τοῦ κύκλου ΤΜΙ, καὶ τῆς εὐθείας ΝΚ· ὅθεν ἐὰν διδάξωμεν, πῶς γράφεται ὁ τοιοῦτος κύκλος, τότε ὁ ζητούμενος αβγ συγκεντρικὸς, ἔχων τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ δι' ἀκτῖνα τὴν διαφορὰν μεταξὺ τῆς ΟΝ καὶ Αα θέλει προσδιορισθῆ. Τὸ πρόβλημα λοιπὸν ἤχθη εἰς τὸ νὰ γράψωμεν κύκλον, ὅστις νὰ ἅπτεται τῆς ΝΚ, τοῦ κύκλου ΤΜΙ, καὶ νὰ διέρχεται ἐκ τοῦ κέντρου Α.

Ἔστω λοιπὸν ἡ δεδομένη στιγμὴ Α, Β τὸ κέντρον τοῦ δεδομένου κύκλου ΤΜΙ, καὶ ἡ δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΝΚ.

Ας ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ ζητούμενος κύκλος εἶναι ὁ ΑΜΝ, ὅστις διέρχεται ἐκ τοῦ Α, ἅπτεται τοῦ κύκλου ΤΜΙ εἰς τὴν στιγμὴν Μ, καὶ τῆς δεδομένης

εὐθείας εἰς τὴν στιγμὴν Ν. Τὰ δοθέντα εἶναι τὸ Β, τὸ Α, ἡ ΚΛ, καὶ τὰ ὑποθετικῶς γνωστὰ Μ καὶ Ν· ἔχομεν λοιπὸν στιγμὰς, εὐθεῖαν, καὶ κύκλους· διὰ τοῦτο ἐκ τῶν στιγμῶν φέρομεν καθέτους, ἢ παραλλήλους, ἢ ἐφαπτομένας, ἢ γράφομεν κύκλους. Ας φέρωμεν ἐκ τοῦ κέντρου Β κάθετον ἐπὶ τῆς ΚΛ τὴν ΤΒΙΘ. Ἐὰν τώρα ἐκβάλωμεν τὴν ἀκτῖνα ΝΟ ἕως εἰς τὸ Ζ, ΖΜΝ θέλει εἶναι ἡμικύκλιον, καὶ διὰ τοῦτο ἡ γωνία ΖΜΝ ὀρθή. Παρομοίως ἐὰν ἑνώσωμεν τὸ Μ μὲ τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου ΤΙ, ἡ γωνία ΤΜΙ, ὡς ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ θέλει εἶναι ὀρθή· καὶ ἐπειδὴ αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι: δηλαδὴ ἡ ΖΜΝ ἴση τῇ ΤΜΙ· διὰ τοῦτο ἡ ΜΝ εἶναι ἡ προεκβολὴ τῆς ΤΜ, καὶ ἡ ΜΖ τῆς ΙΜ. Επεται λοιπὸν ὅτι προσδιορίζομεν τὴν στιγμὴν Ν, ἐὰν φέρωμεν ἐκ τοῦ κέντρου Β κάθετον ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας, διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὰς στιγμὰς Τ καὶ Ι, καὶ ἑνόντες τὴν στιγμὴν Τ μὲ τὴν ἄφὴν Μ διὰ τῆς ΤΜ ἐκβάλωμεν αὐτὴν, ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΚΛ· δηλαδὴ εἰς τὸ Ν. Τώρα τὰ τρίγωνα ΝΘΤ καὶ ΤΙΜ ἔχουν κοινὴν γωνίαν τὴν Τ, τὴν δὲ ΤΘΝ = ΤΜΙ· λοιπὸν εἶναι ὅμοια· διὰ τοῦτο ΤΙ : ΤΜ :: ΤΝ : ΤΘ ἢ ΤΙ. ΤΘ = ΤΜ. ΤΝ, καὶ ἐπειδὴ ΤΙ καὶ ΤΘ εἶναι γνωσταὶ, ἄρα καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΤΜ.ΜΝ γίνεται γνωστόν. Ας ἐπιζευχθῇ ἡ ΤΑ, ἔχομεν ΤΑ. ΤΠ = ΤΜ. ΤΝ = ΤΘ. ΤΙ· λοιπὸν ΤΑ. ΤΠ = ΤΘ. ΤΙ, καὶ ἐπειδὴ ΤΑ, ΤΘ, ΤΙ εἶναι γνωσταὶ, διὰ τοῦτο καὶ ἡ ΤΠ γίνεται γνωστὴ, καὶ ἑπομένως ἡ στιγμὴ Π. Τώρα λοιπὸν γνωρίζομεν τὰς στιγμὰς Α καὶ Π, ἐκ τῶν ὁποίων θὰ ἀπεράσῃ ὁ κύκλος ΑΜΝ, καὶ τὴν εὐθείαν ΚΛ, εἰς τὴν ὁποίαν θέλει ἅπτεται ὁ ζητούμενος κύκλος. Η λύσις λοιπὸν τοῦ δευτέρου προβλήματος

ἄγεται εἰς ἐκείνην ἑνὸς τρίτου: δηλαδὴ νὰ εὕρωμεν κύκλον, ὅστις νὰ διέρχεται ἐκ τῶν δεδομένων σιγμῶν Α καὶ Π, καὶ νὰ ἅπτεται τῆς δεδομένης εὐθείας ΚΛ.

Ας ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ ζητούμενος κύκλος εἶναι ὁ ΑΠΝ. Ας ἐκβληθῶσιν αἱ ΑΚ καὶ ΑΠ, ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Ρ, τότε ἔχομεν $\overline{PN}^2 = PΠ \times PA$· καὶ ἐπειδὴ ΡΠ καὶ ΡΑ εἶναι δεδομέναι, διὰ τοῦτο $\overline{PN}^2$ ἡ PN γίνεται γνωστὴ, καὶ ἑπομένως ἡ σιγμὴ Ν. Ο ζητούμενος λοιπὸν κύκλος διέρχεται ἐκ τῶν σιγμῶν Α, Π, Ν. Διὰ νὰ λύσωμεν λοιπὸν τὸ τρίτον πρόβλημα πρέπει νὰ λύσωμεν τὸ ἀκόλουθον τέταρτον, δηλαδὴ νὰ εὕρωμεν κύκλον, ὅστις νὰ διέρχεται ἐκ τῶν τριῶν στιγμῶν Α, Π, Ν.

Ας ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ζητούμενος κύκλος εἶναι ὁ ΑΠΝ· ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΠ καὶ ἡ ΠΝ. Ἐκ τοῦ κέντρου Ο ἂς φερθῶσιν αἱ κάθετοι ΟΧ καὶ ΟΨ. Τώρα ἐξαιτίας τῶν καθέτων ἀκτίνων ἐπὶ τῶν χορδῶν ΑΠ καὶ ΠΝ, ἡ σιγμὴ Χ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἡμισείας τῆς ΑΠ, ἡ δὲ Ψ τῆς ἡμισείας τῆς ΠΝ. Λοιπὸν διὰ νὰ λύσωμεν τὸ τέταρτον πρόβλημα, ἀνάγκη πρότερον να λύσωμεν τοῦτο τὸ πέμπτον, δηλαδὴ νὰ διαιρέσωμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΠ ἢ ΠΝ εἰς δύο ἴσα μέρη. Ας ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ΑΠ ἐδιαιρέθη εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὴν σιγμὴν Χ, τότε κάμνοντες κέντρον τὸ Α, καὶ ἀκτῖνα διάστημα μεῖζον τῆς ἡμισείας τῆς ΑΠ, γράφομεν κύκλον, καὶ πάλιν κέντρον τὸ Π καὶ ἀκτῖνα τὸ αὐτὸ διάστημα γράφομεν ἄλλον κύκλον. Οἱ κύκλοι οὗτοι τέμνονται, καὶ ἡ ἑνόνουσα τὰς τομὰς ΟΞ τέμνει τὴν ΑΠ εἰς τὴν στιγμὴν Χ εἰς δύο ἴσα μέρη. Τὸ αὐτὸ πράττο-

μεν καὶ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς ΠΝ εἰς τὴν στιγμὴν Ψ. Εφέραμεν λοιπὸν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος εἰς πράγματα, τὰ ὁποία εἶναι συγχωρημένον νὰ πραχθῶσι· διότι εἶναι τὰ λεγόμενα αἰτήματα: δηλαδὴ ἔχοντες κέντρον καὶ διάστημα δυνάμεθα νὰ γράψωμεν κύκλον. Τώρα πρέπει νὰ ὑψώσωμεν ἐκ τῶν στιγμῶν Χ καὶ Ψ δύο καθέτους. Πλὴν ἡ εὑρεθεῖσα ΟΞ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἥμισυ τῆς ΑΠ, τὸ αὐτὸ ὑπάρχει καὶ διὰ τὴν ΠΝ. Η στιγμὴ Ο τῆς συναπαντήσεως τῶν δύο καθέτων εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ὅστις διέρχεται ἐκ τῶν στιγμῶν Α, Π, Ν, καὶ ἅπτεται τῆς ΚΛ εἰς τὸ Ν. Οὗτος δὲ εἶναι ἐκεῖνος, ὅστις διέρχεται ἐκ τοῦ Α, ἅπτεται τῆς εὐθείας ΚΛ εἰς Ν καὶ τοῦ δεδομένου κύκλου, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον εἶναι Β, καὶ ἡ ἀκτὶς Ββ — Αα. Ο ἴδιος εἶναι ὁ συγκεντρικὸς ἐκείνου, ὅστις ἅπτεται τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει Α διὰ κέντρον, καὶ Αα δι' ἀκτῖνα, παρομοίως τοῦ κύκλου, ὅστις ἔχει Β διὰ κέντρον καὶ Ββ δι' ἀκτῖνα, καὶ τῆς εὐθείας ΓΔ παραλλήλου τῆς ΑΚ. Περιπλέον ἡ ἀκτὶς τοῦ ζητουμένου κύκλου διαφέρει, ὡς εἴπομεν, τῆς ἀκτῖνος τοῦ ΑΠΝ κύκλου ποσότητα ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα Αα. Εὰν λοιπὸν κάμνοντες κέντρον τὸ Ο, καὶ διάστημα τὴν διαφορὰν μεταξὺ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου ΑΠΝ, καὶ τοῦ κύκλου, ὅστις ἔχει Α διὰ κέντρον καὶ Αα δι' ἀκτῖνα, δηλαδὴ ΟΝ — Νγ, γράψωμεν κύκλον αβγ, οὗτος θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος.

Παρατήρησις. Εἰς τὸ παρὸν πρόβλημα διὰ νὰ προσδιορίσωμεν σχέσεις μεταξὺ τῶν δοθέντων καὶ τῶν ἀγνώστων ἐχρειάσθη νὰ εὕρωμεν κατὰ πρῶτον σχέσεις μεταξὺ ἄλλης συμβοηθητικῆς ἀγνώστου καὶ τῶν δεδομένων, ἥτις εἶχε γνωστὴν σχέσιν μὲ τὴν ἄγνωστον τῆς προτάσεως.

Η συνθετικὴ λύσις τοῦ ἰδίου προβλήματος εἶναι ἡ ἀκόλουθος.

Ας ἀχθῇ ἡ ΚΛ παράλληλος τῆς ΔΓ εἰς διάστημα ἴσον μὲ τὴν Αα ἀκτῖνα τοῦ μικροτέρου κύκλου. Εκ τοῦ Β, κέντρου τοῦ μεγαλητέρου κύκλου, μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων τῶν δεδομένων κύκλων, ἂς γραφθῇ κύκλος· ἐκ τοῦ κέντρου Β ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΘ κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΛ, ἥτις προεκβαλλομένη τέμνει τὴν περιφέρειαν τοῦ ἤδη γεγραμμένου κύκλου εἰς τὰς στιγμὰς Τ καὶ Ι. Ας ἑνωθῇ ἡ Τ μὲ τὴν Α κέντρον τοῦ δεδομένου μικροτέρου κύκλου· ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΤΑ στιγμή τις Π, εἰς τρόπον ὥστε ΤΘ : ΤΑ :: ΤΠ : ΤΙ· λοιπὸν ἡ ΤΠ γίνεται γνωστή. Ας προεκβληθῇ ἡ ΑΤ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΚΛ προεκβαλλομένην εἰς τὴν στιγμὴν Ρ· ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΚΛ στιγμή τις Ν, ὥστε ΡΑ : ΡΝ :: ΡΝ : ΡΠ, καὶ ἐπειδὴ ΡΑ, ΡΠ εἶναι γνωσταί, διὰ τοῦτο προσδιορίζεται καὶ ἡ ΡΝ. Εκ τῶν τριῶν στιγμῶν Α, Π, Ν, ἂς διέλθῃ ἡ περιφέρεια ΑΜΝ, ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ὁποίας μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν διαφορὰν μεταξὺ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου ΑΜΝ, καὶ τοῦ μικροτέρου τῶν δεδομένων, ἂς γραφθῇ κύκλος· λέγω ὅτι οὗτος εἶναι ὁ ζητούμενος

Δεῖξις. Επειδὴ ἔχομεν ΡΑ : ΡΝ :: ΡΝ : ΡΠ· ὁ κύκλος ΑΜΝ διέρχεται ἐκ τῶν στιγμῶν Α καὶ Π, καὶ ἅπτεται τῆς ΡΑ. Πάλιν, ἐπειδὴ ἔχομεν ΤΘ : ΤΑ :: ΤΠ : ΤΙ ἢ ΤΘ × ΤΙ = ΤΑ × ΤΠ, καὶ ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἡ ΤΝ, αὕτη συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν τοῦ ΑΜΝ εἰς τὴν στιγμὴν Μ, ὅπου ἔχομεν ΤΑ.ΤΠ = ΤΜ.ΤΝ· διὰ τοῦτο ΤΘ.ΤΙ = ΤΜ.ΤΝ. Τώρα ἑνόντες τὰς τρεῖς στιγμὰς Τ, Μ, Ι, σχηματίζομεν τὸ τρίγωνον ΤΜΙ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΜΝΘ·

διότι, ἐπειδὴ ΤΘ. ΤΙ = ΤΜ. ΤΝ, ἔχομεν ΤΘ: ΤΝ :: ΤΜ :: ΤΙ. Περιπλέον ἡ γωνία Τ εἶναι κοινή· λοιπὸν τὰ δύο ταῦτα τρίγωνα ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων, διὰ τοῦτο εἶναι ὅμοια· ἀλλ' ἡ γωνία ΤΘΝ εἶναι ὀρθὴ, ἕπεται ἄρα ὅτι καὶ ἡ ΤΜΙ εἶναι ὀρθή. Ἐπειδὴ δὲ ἡ βάσις ΤΙ τοῦ τριγώνου ΤΜΙ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου ΤΜΙ, ἕπεται ὅτι τὸ Μ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ· ἀλλὰ τὸ ἴδιον σημεῖον εὑρίσκεται καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ΑΜΙΝ, διὰ τοῦτο αἱ δύο αὗται περιφέρειαι ἅπτονται. Τώρα, ἐὰν ἑνώσωμεν τὸ κέντρον Ο τοῦ κύκλου ΑΜΙΝ μὲ τὸ Β, ἡ στιγμὴ τῆς ἁφῆς Μ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΟΒ· ἐπειδὴ δὲ ἂν ἀπὸ τὴν ΟΜ ἀφαιρέσωμεν τὴν ΒΜ· δηλαδὴ τὴν ἀκτῖνα τοῦ μικροτέρου κύκλου, ἢ ἀπὸ τὴν ἄλλην ἀκτῖνα, ἥτις ἑνόνει τὴν στιγμὴν τῆς ἁφῆς ἐπὶ τῆς εὐθείας ΡΛ, ἢ ἀπὸ τὴν διερχομένην ἐκ τοῦ κέντρου Α τοῦ μικροτέρου κύκλου, τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἰδίου, εὑρίσκομεν τὴν αὐτὴν διαφορὰν, συνάγομεν ὅτι ἐὰν, κάμνοντες κέντρον, τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΜΙΝ, καὶ ἀκτῖνα τὴν διαφορὰν μεταξὺ τῆς ἀκτῖνος τούτου τοῦ κύκλου, καὶ ἐκείνης τοῦ μικροτέρου, γράψωμεν ἐκ νέου κύκλον, ὁ γραφόμενος οὗτος κύκλος θέλει ἁπτέχει ἀπὸ τὴν ΑΡ, τὸν κύκλον ΤΜΙ, τὸ κέντρον Α τοῦ μικροῦ κύκλου, ποσότητα ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ μικροῦ κύκλου· διὰ τοῦτο ἅπτεται τῆς ΓΔ, τοῦ μεγαλητέρου κύκλου, ὅστις ἔχει Β διὰ κέντρον, καὶ τοῦ μικροτέρου κύκλου, ὅστις ἔχει Α διὰ κέντρον. Ἀλλὰ τὴν τοιαύτην κατασκευὴν, ἐὰν δὲν ἤθελε μᾶς τὴν διδάξῃ ἡ Αναλυτικὴ Μέθοδος, πῶς ἦτον δυνατὸν νὰ τὴν γνωρίσωμεν; Ἐκ τούτου φανερὸν γίνεται, πόσον ἡ Αναλυτικὴ Μέθοδος ὑπερέχει τῆς Συνθετικῆς.

Ας λάβωμεν τώρα καὶ μερικὰ θεωρήματα, τὰ ὁποῖα σκοπὸν ἔχουν τὴν ἀπόδειξιν ὑπαρκτικῆς τινὸς ἰδιότητος, τὴν ὁποίαν τὰ δοθέντα ἔχουν, ἐξαιτίας ἄλλων ὑπαρκτικῶν ἰδιοτήτων ἀποδιδομένων εἰς αὐτά.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α'.

Σχ. 3. Ἐὰν εἰς σταθερὰν στιγμὴν Α τεθῇ ἡ κορυφὴ δεδομένης καὶ ἀμεταβλήτου μεγέθους γωνίας, καὶ αἱ δύο πλευραὶ ταύτης τῆς γωνίας κινοῦνται ὁλόγυρα τῆς σταθερᾶς στιγμῆς Α, εἰς τρόπον ὥστε νὰ φυλάττουν πάντοτε τὴν αὐτὴν κλίσιν μεταξύ των, καὶ τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ προσέτι τὸ ἄκρον τῆς μιᾶς τῶν πλευρῶν νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῶν στιγμῶν δεδομένης περιφερείας, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εἶναι Δ, καὶ ἡ ἀκτὶς ΔΒ· λέγω ὅτι τὸ ἄκρον τῆς ἄλλης πλευρᾶς θέλει εὑρίσκεται ἐπὶ μιᾶς ἄλλης περιφερείας προσδιορισμένου κύκλου.

Ἔστω ἡ γωνία ΒΑΓ ἔχουσα τὴν κορυφήν της εἰς τὴν σταθερὰν στιγμὴν Α, ἀμεταβλήτου μεγέθους· ὁ λόγος τῶν δύο πλευρῶν της: δηλαδὴ τῆς ΑΒ πρὸς ΑΓ ἔστω μ:ν εἰς ὅλας τὰς καταστάσεις τῶν διαφόρων μεγεθῶν, ὁποῦ εἰς τὴν τοιαύτην κίνησιν δύνανται νὰ λάβουν.

Συνθετικῶς.

Ας ἑνωθῇ ἡ στιγμὴ Α μὲ τὸ κέντρον Δ· ἂς σχηματισθῇ ἡ γωνία ΔΑΕ = ΒΑΓ· ἂς ληφθῇ ἡ ΑΕ εἰς τρόπον ὥστε ΑΒ: ΑΓ :: ΑΔ: ΑΕ, καὶ ἐκ τοῦ Ε ὡς ἐκ κέντρου μὲ διάστημα ΓΕ = ΒΔ. $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}}$ ἂς γραφθῇ ὁ κύκλος ΜΚΝ. Λέγω ὅτι εἶναι ὁ ζητούμενος, ἐκεῖνος δηλαδή, τοῦ ὁποίου τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας θέλει διατρέχει τὸ ἄκρον Γ.