ΠΡΟΛΕΓΟΜΕΝΑ ΤΟΥ ΜΕΤΑΦΡΑΣΤΟΥ.

1.ον Ζητοῦντες οἱ Μαθηματικοὶ νὰ φέρουν εἰς ἐντέλειαν τὰς μεθόδους τοῦ λύειν τὰ προβλήματα τῆς Γεωμετρίας, ἐπλούτισαν τὴν ἀνάλυσιν τοῦ ὑπολογισμοῦ, ἥτις τὴν σήμερον συνιςᾷ τὰς ἀκριβεῖς ἐπιςήμας. Διὰ νὰ δυνηθοῦν νὰ ἐκφράσουν ἀναλυτικῶς τὰς σχέσεις, αἵτινες ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν γωνιῶν καὶ τῶν πλευρῶν γεωμετρικοῦ τινὸς σχήματος, ἐφεῦρον τὴν τριγωνομετρίαν. Ο ἀθάνατος Καρτέσιος ζητῶν τὴν ἀλγεβραϊκὴν ἔκφρασιν τῶν ἀμοιβαίων σχέσεων μιᾶς μερικῆς σιγμῆς πρὸς ἐκείνας γραμμῆς τινὸς, ἢ ἐπιφανείας, κατέβαλε τὰ πρῶτα θεμέλια τῆς ἐφαρμογῆς τῆς Αλγέβρας εἰς τὴν Γεωμετρίαν. Εν ᾧ ἠσχολοῦντο εἰς τὴν ἔκφρασιν τῶν ἀφῶν, τῶν γεωμετρικῶν τόπων, εἰς τὴν ζήτησιν τῶν ἰδιοτήτων μιᾶς καμπύλης δι' ἐκείνων τῆς Εφαπτομένης ταύτης, ὁ Λεϊβνίτιος ἐφεῦρε τὸν διαφορικὸν ὑπολογισμόν. Ζητοῦντες δὲ νὰ ἐπιστρέψουν ἀπὸ τὰς ἰδιότητας τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰς καμπύλας, εἰς ἐκείνας τῶν ἰδίων καμπύλων, ἐπλούτισαν τὸν διαφορικὸν ὑπολογισμὸν ἀπὸ τὸν ὁλοκληρωτικόν. Διὰ νὰ διακρίνωνται αἱ πολλαπλάσιαι λύσεις ἑνὸς προβλήματος, ὁ Λαγράγγιος (Lagrange) ἐσύστησε τὴν γενικὴν θεωρίαν τῶν ἐξισώσεων. Διὰ νὰ μεταφρασθῶσιν εἰς τὴν Γεωμετρίαν τὰ ἐξαγόμενα τῆς ἀναλύσεως ὁ Μόγγιος (Monge) εὗρε τὴν διαγραφικὴν

Γεωμετρίαν (Géométrie descriptive) διὰ τὸ ὁποῖον ἀπεθανατίσθη. Ἐτελείωσε δὲ τὴν τοιαύτην μεγίστην οἰκοδομὴν τῆς Μαθηματικῆς, δίδων τὴν ἀνάλυσιν ἐφηρμοσμένην.

2.ον Ἂς μὴ διαφιλονεικῆται λοιπὸν, ἂν οἱ Μαθηματικοὶ ἔκαμον τόσας ἀνακαλύψεις διὰ τὴν ἐπιθυμίαν τοῦ νὰ ἦναι ὠφέλιμοι· διότι αἱ πρώτισαι αὐτῶν ἐφευρέσεις ἀπέβλεπον τὴν ἔκτασιν τῶν ἐφαρμογῶν τῶν ἀκριβῶν ἐπιστημῶν, καὶ προσέτι διότι κάθε ἀνακάλυψις ἀληθείας τινὸς ἐξ ἀνάγκης περιέχει ἰδίαν τινὰ ὠφέλειαν. Δὲν εἶναι ἴσως διὰ τὴν χρῆσιν τοῦ τῶν ἀπειροστημορίων ὑπολογισμοῦ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῆς Οὐρανίου κινήσεως, ὁποῦ ὁ Νεύτων ἐζήτει νὰ οἰκειοποιηθῇ τὴν φήμην τῆς ἐφευρέσεως τοῦ Λεϊβνιτίου; Δὲν ἀπέβλεπον εἰς τὸν αὐτὸν σκοπὸν οἱ κύριοι Λαπλάκιος (Laplace), Λεγένδρος (Le Gendre), Ποασσὼν (Poisson) καὶ τόσοι ἄλλοι, οἵτινες κατέστησαν πλῆρες τὸ πολυθήσαυρον τοῦτο μέρος τῆς Μαθηματικῆς; καὶ πῶς; Ἡ ἐφεύρεσις τοῦ Μογγίου τῆς διαγραφικῆς Γεωμετρίας δὲν κατέστησεν ἐντελεστέραν τὴν Αρχιτεκτονικὴν, τὴν πρακτικὴν Μηχανικὴν, τὴν Ζωγραφικὴν καὶ ὅλας τὰς ἄλλας τέχνας, αἵτινες χρεωστοῦνται εἰς τὴν ἐφεύρεσιν τοῦ ἀθανάτου τούτου ἀνδρός;

3.ον Ἀφ' οὗ οἱ Μαθηματικοὶ ἐγνώρισαν τὰ θεωρήματα καὶ τοὺς ἀρχικοὺς λόγους μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν, τῶν γραμμῶν, τῶν ἐπιφανειῶν, τῶν στερεῶν τῆς ἐπιστήμης τῆς ἐκτάσεως, θέλοντες νὰ ἐκτείνουν τὰς γνώσεις των, μεταχειριζόμενοι τὰς ἀποδεδειγμένας ἀρχὰς, εἶδον τὴν ὠφέλειαν τῶν τοιούτων ἀρχῶν, καὶ ἐνταῦτῷ τὴν ἀνικανότητά των, διὰ τὴν ὁποίαν ἠναγκάσθησαν νὰ ζητήσουν τὴν ἐφεύρεσιν ἄλλων.

Οθεν διὰ νὰ καταστήσουν γενικωτέραν τὴν Αριθμητικὴν καὶ ἐκφράσουν τὰς ὑπαγορευομένας σχέσεις ἀπὸ τὴν Γεωμετρίαν, ἐφεῦρον τὴν Αλγεβραν. Ζητοῦντες δὲ τὴν ἔκφρασιν τῶν σχέσεων τῶν γωνιῶν καὶ τῶν πλευρῶν εὐθυγράμμου τινὸς σχήματος εὗρον τὴν Τριγωνομετρίαν, διὰ τῆς ὁποίας εἰσῆλθον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τὰ διαστήματα ἢ αἱ σχέσεις τῶν διαστημάτων, ἀντὶ τῶν γωνιῶν, καὶ τοῦτο διὰ νὰ μὴν ἀλλάξῃ τὸ ὁμοειδὲς τοῦ ὑπολογισμοῦ. Εν ᾧ δὲ πάλιν ἐξακολουθοῦσαν τὴν σπουδὴν τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἁπλῆς Αλγέβρας εἰς τὴν Γεωμετρίαν, ἔφθασαν εἰς τὴν θεωρίαν τῶν Γεωμετρικῶν τόπων, καὶ ζητοῦντες τὴν προσδιόρισίν των εὗρον τὴν ἐφαρμογὴν τῆς ἀναλύσεως εἰς τὴν Γεωμετρίαν, ἥτις ἐπιστηριζομένη ἐπὶ τῶν προτέρων ἀρχῶν, ἔκτεινε τὴν σφαῖραν τῶν Μαθηματικῶν ἰδεῶν, καὶ κατέστησε πλήρη τὴν λύσιν τῶν Γεωμετρικῶν προβλημάτων. Τέλος πάντων, ἀφ' οὗ ἐθεώρησαν τὰς Κωνικὰς τομὰς, τὰς ἐπιφανείας τοῦ β.ου βαθμοῦ, τὴν διάλυσιν τῶν Γεωμετρικῶν τόπων τῶν ἀνωτέρων βαθμῶν, ἐζήτησαν γενικὸν μέσον διὰ τὴν σπουδὴν τῶν παθῶν μιᾶς καμπύλης εἰς πᾶσαν μίαν τῶν μερικῶν σιγμῶν της, διὰ κάθε φιλούσης γραμμῆς εἰς ταύτην τὴν σιγμὴν ἁπλουστέρας εἰς τὴν θεωρίαν ἀπὸ τὴν δεδομένην· διὰ τοῦτο εὗρον τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἀπειροστημορίων, καὶ τὴν ἐφηρμοσμένην ἀνάλυσιν.

Οἱ Μαθηματικοὶ τὰς ἀφηρημένας ἐπιστήμας δὲν τὰς μεταχειρίζονται διὰ νὰ γνωρίσουν νέα πράγματα κατ' ἀρέσκειαν, ἀλλ' ὡς μέσον τοῦ νὰ καταστήσουν πλήρη τὴν λύσιν τῶν ζητημάτων, καὶ διὰ τοῦτο πάντοτε κάμνουν γνωστὴν τὴν σχέσιν, ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ ὅλων τῶν ἐφευρέσεών των.

Η ἔκθεσις αὕτη τῶν διαφόρων μερῶν τῆς Μαθηματικῆς μᾶς κάμνει νὰ γνωρίσωμεν καλῶς τὸν πλουτισμόν της καὶ τὴν ὠφέλειάν της. Η ἄπειρος ὠφέλεια τῶν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα ἐπροτέθησαν ἢ πρὸς γύμνασιν τῶν ἤδη ἀποκτημένων γνώσεων, ἢ διότι ἠσθάνθησαν τὴν ἀνάγκην τοῦ νὰ ἀποκτήσουν νέας, εἶναι ὅτι ἐσυνείθισε τοὺς Μαθηματικοὺς νὰ ὑπερβαίνουν τὰς δυσκολίας τῆς τέχνης των, καὶ νὰ ἐφευρίσκουν μέσα, διὰ νὰ τὴν πλουτίζουν, καὶ οἱ μεταγενέστεροι ζητοῦντες νέους τρόπους τοῦ παρρησιάζειν τὰς προηγουμένας ἐφευρέσεις, ηὔξησαν τὸν ἀριθμὸν αὐτῶν.

4.ον Η Μαθηματικὴ ἐπιστήμη διαιρεῖται εἰς δύο μεγίστους κλάδους: ὁ εἷς περιλαμβάνει τὰ στοιχεῖα τῆς Μαθηματικῆς, καὶ ὁ ἄλλος τὴν ὑπερβατικὴν Μαθηματικήν.

Τὰ στοιχεῖα περικλείουν τὴν Αριθμητικήν, τὴν Γεωμετρίαν, τὴν Αλγεβραν, καὶ τὴν ἀμοιβαίαν ἐφαρμογὴν τῶν δύο τούτων κλάδων, ἥτις καὶ Αναλυτικὴ Γεωμετρία καλεῖται. Εἰς δὲ τὴν ὑπερβατικὴν Μαθηματικὴν περιλαμβάνεται ἡ διαγραφικὴ Γεωμετρία, ὁ τῶν ἀπειροστημορίων ὑπολογισμός, καὶ ἡ ἀνάλυσις ἐφηρμοσμένη.

Εκαστος λοιπὸν τῶν δύο κλάδων ἔχει τὴν Γεωμετρίαν του, τὸν ὑπολογισμόν του, καὶ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν ἀρχικῶν μερῶν του. Εἰς τὴν σπουδὴν τοῦ πρώτου κλάδου βλέπομεν νὰ προτιμᾶται ἡ σύνθεσις. Η αἰνιγματικὴ αὕτη μέθοδος φαίνεται ἐξωρισμένη εἰς τὴν σπουδὴν τοῦ δευτέρου. Εἰς ταύτην συνίσταται ἡ μέθοδος τῶν παλαιῶν. Οἱ Νεώτεροι μεταχειρίζονται τὴν ἀνάλυσιν, ὡς τὸ ἐπιτηδειότερον καὶ ἀσφαλέστερον μέσον διὰ τὴν αὔξησιν τῶν ἐφευρέσεών των.

Τώρα, ὅτις παρατηρήσει τὰς προτάσεις τῆς στοιχειώδους Γεωμετρίας, βλέπει ὅτι ἡ μία ἐξακολουθεῖ τὴν ἄλλην, χωρὶς κάνένα φανερὸν σκοπὸν ὠφελείας· ἐξ ἐναντίας ἡ διαγραφικὴ Γεωμετρία ἐφευρέθη καὶ ἐκατασάθη ἐπιστήμη ἀπὸ τὰς πράξεις καὶ ἀναγκαίας ζητήσεις τῶν τεχνῶν.

Περὶ τῆς Αναλυτικῆς καὶ Συνθετικῆς Μεθόδου τῆς Μαθηματικῆς σπουδῆς.

5. Οἱ ἄνθρωποι παρατηροῦντες τὰς πράξεις τῶν φαινομένων τῆς φύσεως, καὶ τὰ ἐξ αὐτῶν συναγόμενα ἀποτελέσματα, ἐσοχάσθησαν, ὅτι πράττοντες καὶ αὐτοὶ πρᾶξιν τινὰ ἀπὸ ὅσας τὰ φαινόμενα τῆς φύσεως ἐπαρρησίαζον, ἔπρεπε νὰ καταντήσουν εἴς τι ἐξαγόμενον, καὶ βάλλοντες κατὰ πρῶτον εἰς τὸν νοῦν των τὶ ἀποτέλεσμα, ἐσκέπτοντο ποίας ἀπὸ τὰς γνωστὰς πράξεις τῆς φύσεως πράττοντες ἠδύναντο νὰ εὕρουν τὸ ζητούμενον ἀποτέλεσμα, καὶ ἐλάμβανον ἀπὸ σὰς πράξεις ἑνὸς ἢ περισσοτέρων φαινομένων ἐκείνην ἢ ἐκείνας μόνον, τὰς ὁποίας συνθέτοντες εὕρισκον ἢ τὸ ζητούμενον ἐξαγόμενον, ἢ ἄλλο τι, ἐκ τοῦ ὁποίου μὲ γνωστὰς πράξεις ἠδύναντο νὰ συνάξουν τὸ σκοπούμενον. Η μέθοδος λοιπὸν αὕτη, συνίσταται εἰς τὴν ϛαθμηδὸν χρῆσιν γνωστῶν ἀρχῶν, ἕως ὅτου ἡ ὅλη των σύνθεσις νὰ βεβαιόνῃ τὸ προτεθὲν ἐξαγόμενον, καὶ ἐν γένει τὴν προτεθεῖσαν πρότασιν. Καλεῖται δὲ Σύνθεσις.

Εκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι αἱ ἀρχαὶ πάσης ἐπιστήμης ἔχουν χρείαν τῆς συνθετικῆς μεθόδου· διότι διὰ μέσου ταύτης ἐκθέτονται κατὰ τάξιν τὰ μέρη αὐτῆς. Περιττὸν εἶναι νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι δυσκολωτάτη· ἐπειδὴ ἀνάγκη εἶναι διὰ τὴν ἀπόδειξιν μιᾶς προτάσεως νὰ λάβωμεν

ἐκείνας μόνον ἀπὸ τὰς γνωστὰς ἀρχὰς, αἵτινες ἀρκοῦσι διὰ τὴν ἀπόδειξίν της. Η συνθετικὴ λοιπὸν μέθοδος συνίσταται εἰς τὸ νὰ ἐκφωνήσωμεν τὰ ὅσα περιέχει ἡ πρότασις, καὶ μετὰ ταῦτα διὰ γνωστῶν ἀρχῶν βαθμηδὸν προχωροῦντες νὰ ἀποδείξωμεν τελευταῖον, ὅτι τὰ ἐκφωνηθέντα ἦσαν ἀληθῆ· ἢ, ἀναχωροῦντες ἀπὸ ἐναντίαν ὑπόθεσιν, νὰ φθάσωμεν εἰς ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον νὰ ἀντιφάσκῃ εἰς βεβαίαν τινὰ ἀρχήν.

Ἀφ' οὗ ὅμως ἐκτεθῶσιν αἱ πρῶται ἀρχαὶ πάσης στοιχειώδους ἐπιστήμης, δυνατὸν εἶναι νὰ μεταχειρισθῶμεν ἄλλον τρόπον, διὰ τοῦ ὁποίου νὰ ἀποδεικνύωμεν τὰς προτάσεις, καὶ ὅστις ὄχι μόνον νὰ ἦναι εὐκολώτερος, ἀλλ' ἐνταὐτῷ νὰ δεικνύῃ τὰς πράξεις, αἵτινες εἶναι ἀναγκαῖαι διὰ τὴν λύσιν τῆς προτάσεως. Η μέθοδος αὕτη συνίσταται εἰς τὸ νὰ ἐκφωνήσωμεν τὴν πρότασιν, μετὰ ταῦτα ὑποθέτοντες βεβαίαν καὶ ἀποδεδειγμένην τὴν ὕπαρξίν της, νὰ ἐκφράσωμεν τὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν ὑποθετικῶς ὑπαρχόντων, καὶ τῶν δοθέντων τῆς προτάσεως, καὶ νὰ συνάξωμεν ἐκ τῆς τοιαύτης συγκρίσεως τὰς συνθήκας, αἵτινες πρέπει νὰ ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν δοθέντων μόνον διὰ νὰ ἦναι ἀληθὴς ἡ ὕπαρξις τῆς προτάσεως· καὶ οὕτω τότε, ἐὰν αὗται αἱ συνθῆκαι πληροῦνται ἀπὸ τὰ δοθέντα τῆς προτάσεως, εἴμεθα βέβαιοι, ὅτι ἡ ὕπαρξίς της εἶναι ἀληθής. Η μέθοδος αὕτη καλεῖται Αναλυτικὴ, καὶ λέγεται οὕτω, διότι ἀναλύομεν τὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν ὑποθετικῶς ὑπαρχόντων, καὶ τῶν δεδομένων τῆς προτάσεως, καὶ φθάνομεν εἴς τι ξεχωριστὸν ἐξαγόμενον, ἀναφερόμενον εἰς τὰ δοθέντα μόνον.

Μεγάλως ὠφελοῦνται οἱ Μαθηματικοὶ ἀπὸ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον· διότι ὑποθέτοντες κάθε πρότασιν, ἀποδεδειγμένην, καὶ ἀναχωροῦντες ἐκ ταύτης τῆς ὑπο-

θέσεως, προχωροῦσιν ἀνερευνῶντες τὰς σχέσεις αὐτῆς πρὸς τὰ δοθέντα τῆς προτάσεως, ἢ πρὸς ἄλλας βεβαίας ἀρχὰς, αἵτινες ἔχουν γνωστὰς σχέσεις μὲ τὰ δοθέντα καὶ ζητούμενα τῆς προτάσεως, ἕως οὗ τέλος πάντων, διὰ τοῦ συλλογισμοῦ, φθάσουν εἰς ἐξαγόμενον μεταξὺ τῶν δοθέντων μόνον τῆς προτάσεως, τὸ ὁποῖον ἢ φανερόνει ἀρχὴν, ἥτις δὲν ἤθελεν εἶναι βεβαία, ἐὰν ἡ ὑποτιθεμένη ὕπαρξις τῆς προτάσεως ἦτον ψευδὴς, ἢ κάμνει γνωστὰς τὰς πράξεις, αἵτινες πρέπει νὰ ἐκτελεσθοῦν ἐπὶ τῶν δοθέντων τῆς προτάσεως διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου. Ἕπεται λοιπὸν ὅτι ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι τὸ μόνον ὄργανον τῶν ἐφευρέσεων.

6ον Η ἔκφρασις ὁποιασδήποτε προτάσεως συνίσταται εἰς τὸ: Ἐὰν μεταξὺ δεδομένων ὑπάρχῃ μία τις σχέσις, θέλει ὑπάρχει αὕτη, ἢ ἐκείνη ἡ ἰδιότης· ἢ, δεδομένου τούτου, νὰ προσδιορισθῇ ἐκεῖνο. Τώρα διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ὕπαρξιν τοῦ πρώτου, ἢ νὰ φθάσωμεν εἰς τὴν προσδιόρισιν τοῦ δευτέρου, ἀνάγκη εἶναι ὡς ἐπιτοπλεῖστον νὰ κάμωμεν μερικὰς ἐργασίας, ἢ προετοιμασίας, αἵτινες νὰ δώσουν τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως, ἢ τὴν προσδιάρισιν τῶν ζητουμένων: αἱ πράξεις αὗται συνιστοῦν τὴν κατασκευὴν τῆς προτάσεως. Ἀλλὰ τίνι τρόπῳ δυνάμεθα νὰ γνωρίσωμεν αὐτήν; δηλαδὴ ποίας ἐργασίας ἔχομεν νὰ πράξωμεν, διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν ταύτην τὴν κατασκευὴν, ἐκ τῆς ὁποίας ἐξαρτᾶται ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως, ἢ ἡ εὕρεσις τοῦ ζητουμένου; Διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς τὸν σκοπὸν τοῦτον, ἂς μεταχειρισθῶμεν τὰς ἀνωτέρω δύο μεθόδους, τουτέστι τὴν συνθετικὴν καὶ τὴν ἀναλυτικὴν, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν, ἂς θεωρήσωμεν τὴν ὑπεροχὴν τῆς μιᾶς ἐπὶ τὴν ἄλλην, τόσον ὡς πρὸς τὴν συντομίαν, ὅσον καὶ ὡς πρὸς τὴν ὠφέλειαν· καὶ διὰ

τοῦτο λαμβάνω τὴν ἀκόλουθον πρότασιν, ἥτις, κατὰ τὸν διάφορον τρόπον τῆς ἐκφράσεώς της, δύναται νὰ ἦναι πρόβλημα ἢ θεώρημα.

Πρόβλημα, ὅταν εἴπωμεν.

Ἐκ τριῶν μὴ ἐπ' εὐθείας δεδομένων στιγμῶν νὰ διέλθῃ περιφέρεια κύκλου.

Θεώρημα, ὅταν εἴπωμεν.

Ἐκ τριῶν μὴ ἐπ' εὐθείας δεδομένων στιγμῶν πάντοτε δύναται νὰ διέλθῃ περιφέρεια κύκλου.

Συνθετικὴ μέθοδος.

Τόσον διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, ὅσον καὶ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος.

Εστωσαν αἱ δεδομέναι στιγμαὶ Α, Β, Γ· ἂς ἑνωθῇ ἡ Α μὲ τὴν Β, καὶ ἡ Β μὲ τὴν Γ· ἂς τμηθῶσι δίχα αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, καὶ ΒΓ. Ἐκ τῶν στιγμῶν τῆς ἡμισείας τῶν τοιούτων εὐθειῶν ἂς ὑψωθῶσι κάθετοι, (ὅλα ταῦτα ἔγειναν ἐκ γνωστῶν ἀρχῶν) ἡ συναπάντησις τῶν ὁποίων, λέγω, ὅτι εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου, ἢ τοῦ κύκλου, ὅτις δύναται νὰ διέλθῃ ἐκ τριῶν μὴ ἐπ' εὐθείας δεδομένων στιγμῶν. Ἰδοὺ τελειωμένη ἡ κατασκευή. Ἀλλὰ πῶς ἐννοήσαμεν, ὅτι οὕτω πράττοντες, καὶ ὄχι ἀλλέως φθάνομεν εἰς τὸ ζητούμενον;

Επειδὴ αἱ δύο κάθετοι ὑψώθησαν ἐκ τῶν στιγμῶν τῆς ἡμισείας ἑκάστης τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἑνόνουσι τὰς τρεῖς δεδομένας στιγμὰς, ἕπεται, ὅτι ἡ στιγμὴ τῆς συναπαντήσεώς των ἰσάκις ἀπέχει ἐκ τῶν τριῶν στιγμῶν; καὶ διὰ τοῦτο ὁ γραφόμενος κύκλος ἐκ τῆς τοιαύτης στιγμῆς, ὡς ἐκ κέντρου μὲ διάστημα ἴσον μὲ τὴν ἀπόστασιν ταύτης τῆς στιγμῆς ἀπὸ τὰς τρεῖς δεδομένας, διέρχεται καὶ ἐκ τῶν ἄλλων δύο στιγμῶν.

Αναλυτική Μέθοδος.

Ας ὑποθέσωμεν διὰ μὲν τὸ πρόβλημα, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου εἶναι ἡ σιγμὴ Ο, διὰ δὲ τὸ θεώρημα, ὅτι ὁ διερχόμενος κύκλος ἐκ τῶν τριῶν δεδομένων στιγμῶν ἔχει διὰ κέντρον τὴν στιγμὴν Ο. Τώρα καὶ εἰς τὴν μίαν καὶ εἰς τὴν ἄλλην περίσασιν, αἱ γραμμαὶ, αἵτινες ἑνόνουν τὰς δεδομένας σιγμὰς εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου, καὶ διὰ τοῦτο διαιροῦνται εἰς δύο ἴσα μέρη ἀπὸ τὰς φερομένας καθέτους ἐκ τοῦ κέντρου Ο, καὶ ἀντιστρόφως, αἱ ὑψωνόμεναι κάθετοι ἐκ τῶν σιγμῶν τῆς ἡμισείας τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἑνόνουν τὰς τρεῖς δεδομένας στιγμὰς, διέρχονται ἀπὸ τὸ κέντρον: δηλαδὴ τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου, ἢ ἐκείνου, ὅστις διέρχεται ἀπὸ τὰς τρεῖς δεδομένας σιγμὰς εἶναι ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ὑψωνομένων καθέτων ἐκ τῶν σιγμῶν τῆς ἡμισείας τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἑνόνουν τὰς δεδομένας. Βλέπομεν λοιπὸν, ὅτι ἡ ἀναλυτικὴ μέθοδος μᾶς ἄγει εἰς τελευταῖον ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον μᾶς διδάσκει τὶ πρέπει νὰ πράξωμεν ἐπὶ τῶν δεδομένων, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, ἢ διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ὕπαρξιν τῆς ἰδιότητος, τὴν ὁποίαν ἐκφράσαμεν· ἐν ᾧ εἰς τὴν συνθετικὴν μέθοδον πρέπει νὰ μαντεύσωμεν ὅλας ταύτας τὰς πράξεις, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ζητούμενον, ἢ νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ὕπαρξιν τῆς ἐκφρασθείσης ἰδιότητος. Διὰ τοῦτο ἡ μὲν ἀναλυτικὴ μέθοδος εἶναι τὸ ὄργανον τῆς ἐφευρέσεως, ἡ δὲ συνθετικὴ τῆς διατάξεως· ἐπειδὴ αὕτη θέτει εἰς τάξιν τὰ εὑρημένα διὰ τῆς ἀναλύσεως· διότι ἀφ' οὗ ἐγνωρίσαμεν, ὅτι τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου εὑρίσκεται εἰς τὴν συναπάντησιν τῶν δύο καθέτων, τῶν ὑψωνομένων ἐκ τῶν σιγμῶν τῆς ἡμισείας ἑκά-

τῆς τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἑνόουν τὰς δεδομένας στιγμὰς, ἀνάγκη εἶναι νὰ διατάξωμεν τὴν πρᾶξιν οὕτως· ἂς ἑνωθῇ ἡ στιγμὴ Α μὲ τὴν Β, καὶ ἡ Β μὲ τὴν Γ· ἂς τμηθῶσι δίχα αἱ, ΑΒ, καὶ ΒΓ, ἡ μὲν εἰς τὴν στιγμὴν Ε, ἡ δὲ, εἰς τὴν Ζ· ἂς ὑψωθῶσιν αἱ κάθετοι ΕΟ καὶ ΖΟ, καὶ ἡ στιγμὴ τῆς συναπαντήσεως τῶν δύο καθέτων Ο εἶναι τὸ κέντρον. Τώρα παρατηροῦντες βλέπομεν, ὅτι τὰ αὐτὰ ἐπράξαμεν εἰς τὴν συνθετικὴν μέθοδον.

ζ.ον Ἐὰν ῥίψωμεν τὰ βλέμματάμας εἰς τὴν Αριθμητικὴν, ἥτις εἶναι ἐκ τῶν ἀφηρημένων ἐπιστημῶν, βλέπομεν ἀμέσως τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον φυλαττομένην εἰς ὅλα της τὰ μέρη.

Οἱ κανόνες καὶ αἱ πράξεις τῆς Αριθμητικῆς εὑρέθησαν ἀπὸ τὴν ἀνάγκην, τὴν ὁποίαν οἱ ἄνθρωποι ἐλάμβανον, καὶ εὐθὺς φαίνεται ἡ χρῆσις τούτων καὶ ὁ σκοπός. Παραδείγματος χάριν, θελοντες νὰ γνωρίσωμεν, 6 πῆχαι πανίου πρὸς 4 τάλληρα ἑκάστη πῆχη, πόσα τάλληρα φέρουσιν, ἐσυνάξαμεν τὸν κανόνα, τὸν ὁποῖον ὠνομάσαμεν Πολλαπλασιασμόν. Ἰδοὺ ὅμως ὁ συλλογισμὸς τῆς λύσεως: Ἐὰν μία πῆχη ἀξίζῃ 4, 2 θελουν ἀξίζει τὸ διπλάσιον τοῦ 4, καὶ τὸ τριπλάσιον ταύτης, τὸ τριπλάσιον τοῦ 4· ἐπειδὴ δὲ 6 εἶναι ἑξαπλάσιος μιᾶς πήχης, διὰ τοῦτο ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ ἦναι ἑξαπλάσιος τοῦ 4, δηλαδὴ ἴσος μὲ 6 φοραῖς λαμβανόμενον τὸν 4, τὸ ὁποῖον δίδει 24.

Ἐξ ἐναντίας εἰς τὴν Στοιχειώδη Γεωμετρίαν προχωροῦμεν, χωρὶς νὰ ἠξεύρωμεν εἰς ποῖον σκοπὸν θελομεν φθάσει. Αποδεικνύομεν προτάσεις, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἴσως μετὰ ταῦτα λάβωμεν ἀνάγκην, πλὴν κατὰ τὸ παρὸν, οὐδεμίαν ἄμεσον ἐφαρμογὴν τούτων βλέπομεν.

βεβαιότατα ὄχι μὲ αὐτὸν τὸν τρόπον οἱ ἀρχαῖοι Γεωμέτραι ἔφθασαν εἰς τὰς ἐφευρέσεις των, ἀλλὰ διὰ μιᾶς ἀκριβοῦς ἀναλύσεως, διὰ τῆς ὑποίας δεικνύοντες αὐτὰς ἔλαβον μετὰ ταῦτα ἀνάγκην νὰ διατάξωσι τὰ ἐφευρημένα, καὶ οὕτως ἐσχημάτισαν τὴν σύνθεσιν.

8.ον Οταν σπουδάζωμεν τὰς ἀφηρημένας ἐπιστήμας μὲ σκοπὸν νὰ τὰς ἐφαρμόσωμεν, ἡ σπουδὴ αὕτη συνίσταται, 1.ον εἰς τὴν ἀνακεφαλαίωσιν τῶν μέσων, τὰ ὁποῖα αὐταὶ ἐχορήγησαν διὰ τὴν λύσιν ὁποιουδήποτε προβλήματος, ἢ τὴν ἀπόδειξιν ταύτης ἢ ἐκείνης τῆς ἰδιότητος. 2.ον τὰ τοιαῦτα μέσα ὄχι μόνον πρέπει νὰ ἀποδείξωσι τὰς σχέσεις τῶν ποσοτήτων, αἵτινες εἰσέρχονται εἰς τὴν ἔκφρασιν τῆς προτάσεως, ἀλλὰ προσέτι νὰ διδάξουν τὸν τρόπον τοῦ βεβαιόνειν τὴν ὕπαρξιν τῆς προτεθείσης ἰδιότητος μεταξὺ τῶν θεωρουμένων ποσοτήτων, ἢ τοῦ προσδιορίζειν τὰ ζητούμενα ἐκ τῶν σχέσεων, τὰς ὁποίας ἔχουν μὲ τὰ δοθέντα, ἢ ἐξ ἐκείνων τὰς ὁποίας ἄλλαι γνωταὶ ποσότητες ἔχουν μὲ τὰ δοθέντα καὶ ζητούμενα. Εἰς τὸ πρῶτον ἐνασχολεῖται ἡ Γεωμετρία· εἰς τὸ δεύτερον ἡ Αλγεβρα. Διότι αὐτὴ διὰ τοῦ ἀλγορίθμου της ἐξακολουθεῖ τὴν ὁδὸν τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδου. Η Γεωμετρία λοιπὸν καταγίνεται μόνον εἰς τὴν ἀνακεφαλαίωσιν τῶν μέσων διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων, καὶ εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἰδιοτήτων μεταξὺ τῶν ἐξεταζομένων πραγμάτων, καὶ δὲν δίδει τὸν τρόπον, διὰ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ ξεχωρίζωμεν μεταξὺ τῶν σχέσεων τῶν θεωρουμένων ποσοτήτων τὴν ἄγνωστον. Διὰ τοῦτο ἀπαντῶμεν μεγίστην δυσκολίαν εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων.

Καὶ παρομοίως, ἐπειδὴ ἡ ἀναλυτικὴ μέθοδος, ἢ ὁ ἀλγόριθμος αὐτῆς, τουτέστιν ἡ Αλγεβρα διδάσκει μό-

νον πῶς νὰ ξεχωρίζωμεν ἐκ τῶν σχέσεων μεταξὺ τῶν θεωρουμένων ποσοτήτων τὴν ἄγνωστον· διὰ τοῦτο ἀπαντῶμεν μεγαλωτάτην δυσκολίαν εἰς τὸ νὰ διατάττωμεν τὰς σχέσεις, αἵτινες ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν θεωρουμένων ποσοτήτων.

Ἐκ τῶν ἄνω εἰρημένων ἕπεται, ὅτι ἡ μὲν Γεωμετρία διδάσκει νὰ εὑρίσκωμεν τὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν θεωρουμένων ποσοτήτων, ἡ δὲ Αλγεβρα τὴν τιμὴν τῆς ἀγνώστου, ἢ ἀλγεβραϊκῶς ὁμιλοῦντες, ἡ μία διδάσκει νὰ θέτωμεν τὸ πρόβλημα εἰς ἐξίσωσιν, ἡ δὲ νὰ λύωμεν τὴν ἐξίσωσιν, ἤ, ὅπου τελειόνει ἡ μία τὸ ἔργον της, ἐκεῖ ἡ ἄλλη ἀρχίζει τὸ ἐδικόν της, τουτέστιν ἐκ τῶν ἀρχικῶν ἐξισώσεων, καὶ διὰ μέσου διαδοχικῶν καὶ γενικῶν μεταβολῶν ἄγει εἰς τελικὰς ἐξισώσεις, τὰς ὁποίας προσφέρει εἰς τὴν Γεωμετρίαν, διὰ νὰ μεταγλωττίσῃ τὴν λύσιν των, καὶ ἡ συνθετικὴ μετὰ ταῦτα ἀπόδειξις βεβαιόνει τὰ προσδιορισθέντα ἐξαγόμενα.

Παντὸς Γεωμετρικοῦ προβλήματος τρία ἐν γένει εἶναι τὰ μέρη 1.ον νὰ τεθῇ εἰς ἐξίσωσιν· 2.ον νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις, καὶ 3.ον νὰ βεβαιωθῇ ἡ λύσις. Η Γεωμετρία καταγίνεται εἰς τὸ πρῶτον καὶ τελευταῖον, ἡ δὲ Αλγεβρα εἰς τὸ δεύτερον. Η Αλγεβρα προσέτι καλεῖται καὶ ἀνάλυσις· διότι εἰς τὴν λύσιν τῶν ζητημάτων της προβαίνει κατὰ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον.

9.ον Αδύνατον εἶναι νὰ δώσωμεν γενικὴν μέθοδον, διὰ τῆς ὁποίας νὰ εὑρίσκωμεν διὰ γεωμετρικῆς τινὸς ἀναλύσεως τὴν πλήρη λύσιν Γεωμετρικοῦ τινὸς προβλήματος, ἢ τὴν ἀπόδειξιν ἑνὸς θεωρήματος. ἐπειδή, ἐὰν ἠθέλαμεν πράξῃ τοῦτο, ἤθελεν ἀκολουθήσει καὶ εἰς ἡμᾶς ἐκεῖνο, ὁποῦ πάντοτε ἀκολουθεῖ εἰς τοὺς διδάσκοντας τὴν Μεταφυσικὴν, οἵτινες δηλαδὴ δίδουν

μερικοὺς κανόνας, τοὺς ὁποίους οὔτε οἱ διδάσκοντες, οὔτε οἱ διδασκόμενοι ἐννοοῦν. Δυνατὸν ὅμως νὰ ἀκολουθήσωμεν μίαν μέθοδον, ἥτις ἂν καὶ δὲν ἦναι γενικὴ, ἔχει ὅμως τὴν ἰδίαν δύναμιν, καὶ λαμβάνει μεταβολὰς κατὰ περιόδους: δηλαδὴ πρέπει πάντοτε νὰ ὑποθέτωμεν, ὅτι ἐκτελέσθη ἡ κατασκευὴ τοῦ σχήματος, ὁποῦ ζητοῦμεν, ὅ ἐςὶ, ὅτι ἐγράψαμεν τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον θὰ δώσει τὴν ζητουμένην λύσιν, καὶ μετὰ ταῦτα ἐκ τῆς παρατηρήσεως τῶν ςοιχείων του, νὰ συνάξωμεν σχέσεις μεταξὺ τῶν ἀγνώςων καὶ τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος, σχέσεις, αἵτινες δύνανται νὰ δείξουν μέρος τῆς κατασκευῆς, τὴν ὁποίαν ὑπεθέσαμεν ἐκτελεσμένην, καὶ ἐὰν τὸ ἐξαγόμενον τῆς λύσεως μᾶς ἄξῃ εἰς γνωςὴν τινὰ κατασκευὴν, τότε ἐκτελοῦντες ταύτην τὴν τελευταίαν, ἐκτελοῦμεν μετὰ ταῦτα τὴν πρώτην, κάμνομεν δηλαδὴ εἰς τρόπον ὥςε ἡ λύσις τοῦ πρώτου προβλήματος νὰ συναχθῇ ἀπὸ ἐκείνην ἑνὸς δευτέρου πλέον ἁπλουςέρου, καὶ τούτου ἀπὸ ἐκείνην ἑνὸς τρίτου, καὶ οὕτω διαδοχικῶς, ἕως οὗ νὰ φθάσωμεν εἴς τι πρόβλημα, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπαντῇ, ἢ ἐκφράζῃ γνωςὴν ἀρχήν. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἄγομεν τὴν ζητουμένην λύσιν εἰς τὴν πλέον ἁπλουςέραν της ἔκφρασιν, καὶ δυνάμεθα νὰ συγκρίνωμεν τὴν μεθοδικὴν ταύτην ὁδὸν μὲ ἐκείνην τῆς Αλγέβρας, δηλαδὴ μὲ τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως μὲ μίαν μόνην ἄγνωςον, τὴν ὁποίαν διὰ διαδοχικῶν μεταμορφώσεων ἀπομονόνομεν. Η μόνη διαφορὰ εἶναι, ὅτι ἡ Αλγεβρα δίδει γενικὰ μέσα, διὰ νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ ἀπομόνωσις τῆς ἀγνώςου, ἐν ᾧ ἡ Γεωμετρία πολλάκις πηγαίνει κατὰ συμβεβηκός.

Διὰ νὰ ἐξηγήσωμεν, τίνι τρόπῳ ἡ λύσις ἑνὸς προβλήματος ἄγεται βαθμηδὸν εἰς ἐκείνην ἄλλου τινὸς,

τοῦ ὁποίου ἡ λύσις εἶναι φανερὰ, προτείνομεν τὰ ἀκόλουθα πρόβλημματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.

Σχ. 1. Ζητεῖται νὰ φερθῇ εἰς δεδομένον τρίγωνον ΑΒΓ, εὐθεῖά τις ΔΕ, εἰς τρόπον, ὥςε νὰ χωρίσῃ ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ δύο τμήματα ΔΒ, ΕΓ, ὁ λόγος τῶν ὁποίων, καὶ τῆς γραμμῆς ΔΕ νὰ ἦναι ὁ αὐτὸς μὲ ἐκεῖνον τριῶν δεδομένων ἀριθμῶν μ, ν, π: δηλαδὴ ΔΒ: ΕΓ: ΔΕ :: μ: ν: π.

Αρχίζομεν οὕτως. Ὑποθέτομεν, ὅτι εἰς τὸ δεδομένον τρίγωνον ἤχθη ἡ εὐθεῖα ΔΕ, εἰς τρόπον ὥςε ΔΒ: ΕΓ :: μ: ν, καὶ ΔΒ: ΔΕ :: μ: π, καὶ ΕΓ: ΔΕ :: ν: π, τότε ἔχομεν τὰς ςιγμὰς Δ, Β, Γ, Ε γνωςὰς, καὶ τὰς πλευρὰς τοῦ δεδομένου τριγώνου. Πρέπει λοιπὸν μεταξὺ τῶν πλευρῶν, καὶ τῶν εἰρημένων ςιγμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ Δ καὶ Ε εἶναι εἰς θέσιν ἄγνωςον, πλὴν τὴν ὑποθέτομεν γνωςὴν, νὰ εὕρωμεν σχέσεις διὰ νὰ γνωρίσωμεν τὴν κατασκευὴν τῆς λύσεως.

Τώρα τὸ μόνον πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ πράξωμεν, ὅταν ἔχωμεν ςιγμὰς καὶ γραμμὰς; εἶναι νὰ φέρωμεν ἐκ τῶν ςιγμῶν παραλλήλους τῶν δεδομένων γραμμῶν. Διὰ τοῦτο ἐκ τῆς ςιγμῆς Δ ἂς φερθῇ παράλληλος τῆς ΑΓ ἡ ΔΖ, καὶ ἐκ τῆς Γ ἄλλη παράλληλος τῆς ΔΕ ἡ ΓΖ· τὸ σχῆμα λοιπὸν ΕΔΖΓ εἶναι παραλληλόγραμμον, καὶ τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΔΕ, θέλει ἔχει ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΖΓ, καὶ ἐπειδὴ ἔχομεν ἐξ ὑποθέσεως, ΕΓ: ΔΕ:: ν: π· διὰ τοῦτο καὶ ΔΖ: ΖΓ:: ν: π. Περιπλέον ἡ ςιγμὴ τῆς συναπαντήσεως τῶν δύο ἠγμένων παραλλήλων, δηλαδὴ ἡ Ζ, εἶναι γνωςῆς θέσεως. Ας ἑνωθῇ