
„Ο Κύριος Λέσλιος ὁμιλῶν περὶ τῶν ἐφαπτομένων κύκλων εἰς ἄλλους κύκλους ἢ εἰς εὐθείας γραμμὰς προτείνει δύο περιςάσεις, τῶν ὁποίων ὅμως δὲν δίδει τὴν λύσιν· εἰς τὴν πρώτην ζητεῖται νὰ γραφθῇ κύκλος ἐφαπτόμενος δύο ἄλλων δεδομένων καὶ δεδομένης εὐθείας· εἰς τὴν δευτέραν νὰ γραφθῇ κύκλος ἐφαπτόμενος τριῶν δεδομένων.

Τὴν λύσιν τῆς πρώτης περιςάσεως ἔδωκα εἰς τὰ προλεγόμενά μου· σελ. 17. ἐδῶ λοιπὸν προσθέτω τὴν λύσιν τῆς δευτέρας.

Ας παριςάνωσιν οἱ χαρακτῆρες Α, Β, Γ τὰ κέντρα τῶν δεδομένων κύκλων καὶ οἱ α, β, γ τὰς ἀκτῖνας αὐτῶν. Εςω Χ τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου καὶ χ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ.

Τώρα δύο περιςάσεις δυνατὸν νὰ ἀκολουθήσουν. Η πρώτη καθ' ἣν οἱ δεδομένοι κύκλοι ἅπτονται τῆς κοίλης περιφερείας τοῦ ζητουμένου ἢ τῆς κυρτῆς αὐτοῦ. Η δευτέρα καθ' ἣν ὁ μὲν εἷς τῶν δεδομένων ἅπτεται τῆς κυρτῆς, οἱ δὲ ἄλλοι δύο τῆς κοίλης, ἢ οἱ δύο τῆς κυρτῆς καὶ ὁ ἄλλος τῆς κοίλης.

Εἰς τὸ πρῶτον μέρος τῆς πρώτης περιςάσεως, ὅταν δηλαδὴ οἱ τρεῖς δεδομένοι μέλλωσν νὰ ἅπτωνται τῆς κοίλης περιφερείας τοῦ ζητουμένου, τὸ ἀπόςημα τοῦ κέντρου τοῦ ζητουμένου ἀφ' ἑκάςου τῶν κέντρων τῶν δεδομένων εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ ζητουμένου μεῖον ἡ ἀκτὶς ἑκάςου τῶν δεδομένων· ἐπειδὴ δὲ ἡ μὲν τοῦ ζητουμένου εἶναι χ, αἱ δὲ τῶν δεδομένων α, β, γ, ἔχομεν χ—α διὰ τὸ ἀπόςημα τοῦ κέντρου Χ ἀπὸ τὸ

κέντρον Α, $\chi - \beta$ διὰ τὰ ἀπόσημα τοῦ ἰδίου ἀπὸ τὸ κέντρον Β, καὶ τέλος πάντων, $\chi - \gamma$ διὰ τὸ ἀπόσημά του ἀπὸ τὸ κέντρον Γ.

Εἰς τὸ δεύτερον μέρος τῆς ἰδίας περιςάσεως, ὅταν δηλαδὴ οἱ δεδομένοι ἅπτωνται τῆς κυρτῆς περιφερείας τοῦ ζητουμένου, τὸ ἀπόσημα τοῦ κέντρου τοῦ τελευταίου τούτου ἀπὸ τὸ Α, εἶναι $\chi + \alpha$· ἀπὸ τὸ Β $\chi + \beta$, καὶ ἀπὸ τὸ Γ $\chi + \gamma$.

Ἐὰν τώρα εἰς τὴν πρώτην ταύτην περίςασιν ἐκ τοῦ ἀγνώςου κέντρου καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὸ ἀπόσημα τούτου ἀφ' ἑνὸς τῶν δεδομένων κέντρων, δηλαδὴ μὲ $\chi - \alpha$ ἢ $\chi + \alpha$, γραφθῇ κύκλος, φανερὸν εἶναι ὅτι τέμνει ἡ περιφέρειά του τὰ ἀποσήματα τοῦ ἀγνώςου κέντρου ἀπὸ τὰ κέντρα τῶν ἄλλων δύο δεδομένων κύκλων, καὶ τὸ καθὲν εἰς μίαν ςιγμὴν ἀπέχουσαν ἀφ' ἑκάςου τῶν δεδομένων κέντρων ὅσον διαφέρουσι τὰ ἀποσήματα ταῦτα ἀπὸ τὸ ἀπόσημα τοῦ κέντρου τοῦ ζητουμένου ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ πρώτου τῶν δεδομένων· λοιπὸν διὰ τὸ πρῶτον μέρος τῆς περὶ ἧς ὁ λόγος περιςάσεως ἔχομεν $\chi - \beta - \chi + \alpha$ ἢ $+ (\alpha - \beta)$, καὶ $\chi - \gamma - \chi + \alpha = + (\alpha - \gamma)$· διὰ τὸ δεύτερον, $\chi + \beta - \chi - \alpha = - (\alpha - \beta)$, καὶ $\chi + \gamma - \chi - \alpha = - (\alpha - \gamma)$. Ὅθεν εἰς τὴν πρώτην περίςασιν ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἀποσήματος τοῦ ἀγνώςου κέντρου ἀπὸ τὸ κέντρον Α, καὶ τῶν ἀποσημάτων τοῦ ἰδίου ἀπὸ καθὲν τῶν κέντρων Β καὶ Γ, εἶναι $\pm(\alpha - \beta)$ καὶ $\pm(\alpha - \gamma)$. Ο κύκλος λοιπὸν ὅςις ἔχει δι' ἀκτῖνα $\chi - \alpha$, ἢ $\chi + \alpha$, καὶ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Α, ἀπέχει ἐκ τοῦ κέντρου Β, $\pm(\alpha - \beta)$, ἐκ δὲ τοῦ κέντρου Γ, $\pm(\alpha - \gamma)$. Ἀλλ' ἐπειδὴ γνωρίζομεν τὰς τρεῖς ςιγμὰς διὰ τῶν ὁποίων διέρχεται ὁ κύκλος οὗτος, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν αὐτόν· καὶ ἐπειδὴ ὁ ζητού-

μενος: ἔχει τὸ αὐτὸ κέντρον, οὕτω γνωρίζομεν τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου· ἀλλ' ἔχοντες τὰ κέντρα τῶν δεδομένων καὶ τὸ τοῦ ζητουμένου, ἑνόομεν τοῦτο μὲ ἐκεῖνα· αἱ δὲ συναπαντήσεις τῶν τοιούτων ἀποσημάτων μὲ τὰς δεδομένας περιφερείας, μᾶς προσδιορίζουν τὰς σιγμὰς τῶν ἁφῶν· ἐπειδὴ δὲ κάθε ἀπόσημα συναπαντᾷ ἑκάστην δεδομένην περιφέρειαν εἰς δύο σιγμάς, ἕπεται ὅτι εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν προσδιορίζονται καὶ οἱ δύο κύκλοι, ἤγουν, ἐκεῖνος τῆς κοίλης περιφερείας τοῦ ὁποίου ἅπτονται οἱ δεδομένοι, καὶ ἐκεῖνος τῆς κυρτῆς περιφερείας τοῦ ὁποίου ἅπτονται οἱ ἴδιοι.

Ας θεωρήσωμεν τώρα τὴν δευτέραν περάσασιν, ἐκείνην δηλαδὴ καθ' ἣν ὁ εἷς τῶν τριῶν δεδομένων κύκλων ἅπτεται τῆς κυρτῆς περιφερείας τοῦ ζητουμένου, οἱ δὲ ἄλλοι δύο τῆς κοίλης, ἢ ὁ εἷς τῆς κοίλης, καὶ οἱ ἄλλοι δύο τῆς κυρτῆς. Τότε τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου δηλαδὴ Χ ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ ἐφαπτομένου τῆς κυρτῆς περιφερείας τοῦτέστιν ἀπὸ τὸ Α, $\chi+\alpha$, ἐν ᾧ ἀπὸ τὰ ἄλλα δύο τῶν ἐφαπτομένων τῆς κοίλης δηλαδὴ ἀπὸ Β καὶ Γ, ἀπέχει $\chi-\beta, \chi-\gamma$.

Ἐὰν δὲ ὁ κύκλος ὅτις ἔχει Α κέντρον ἥπτετο τῆς κοίλης καὶ οἱ ἄλλοι δύο τῆς κυρτῆς, τότε τὸ μὲν ἀπόσημα τοῦ κέντρου Χ ἀπὸ τὸ Α, ἤθελεν εἶναι $\chi-\alpha$, τὰ δὲ ἀποσήματα τοῦ ἰδίου ἀπὸ Β καὶ Γ ἤθελον ἐκφράζεσθαι διὰ $\chi+\beta, \chi+\gamma$.

Ἐὰν τώρα, ὡς ἀνωτέρω, ἐκ τοῦ κέντρου Χ γράψωμεν κύκλον μὲ ἀκτῖνα $\chi+\alpha$ ἢ $\chi-\alpha$, τότε ἡ διαφορὰ μεταξὺ $\chi+\alpha$ καὶ ἑκάστου τῶν $\chi-\beta$, $\chi-\gamma$ ἢ ἡ διαφορὰ μεταξὺ $\chi-\alpha$ καὶ ἑκάστου τῶν $\chi+\beta$, $\chi+\gamma$, φανερώνει πόσον ἀπέχει τὸ κέντρον τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου δεδομένου κύκλου ἀπὸ τὰς σιγμὰς

τῶν συναπαντήσεων τοῦ γραφομένου κύκλου ἐκ τοῦ κέντρου Χ μὲ ἀκτῖνα $\chi+\alpha$ ἢ $\chi-\alpha$. Διὰ τὸ πρῶτον λοιπὸν μέρος τῆς προκειμένης περιςάσεως αἱ διαφοραὶ εἶναι:

$\chi-\beta-\chi-\alpha=-(\alpha+\beta)$· καὶ $\chi-\gamma-\chi-\alpha=-(\alpha+\gamma)$· διὰ τὸ δεύτερον, $\chi+\beta-\chi+\alpha=+(\alpha+\beta)$· καὶ $\chi+\gamma-\chi+\alpha=+(\alpha+\gamma)$. Δηλαδὴ ἀπέχει τὸ Β ἀπὸ τὴν ςιγμὴν τῆς συναπαντήσεως $\pm(\alpha+\beta)$, καὶ τὸ Γ, $\pm(\alpha+\gamma)$. Ο γραφόμενος λοιπὸν κύκλος ἐκ τοῦ Χ μὲ ἀκτῖνα $\chi+\alpha$, ἢ $\chi-\alpha$ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Α καὶ μιᾶς δευτέρας ςιγμῆς μακρὰν τῆς Β, $\pm(\alpha+\beta)$, καὶ μιᾶς ἄλλης ἥτις ἀπέχει ἀπὸ τὴν Γ, $\pm(\alpha+\gamma)$· καὶ εἰς ταύτην λοιπὸν τὴν περίςασιν πράττομεν ὡς ἀνωτέρω.

Ἐκ τῶν εἰρημένων βλέπομεν ὅτι Β ἀπέχει ἐκ τῆς ςιγμῆς τῆς συναπαντήσεως τοῦ γραφομένου κύκλου μὲ ἀκτῖνα $\chi\mp\alpha$ ποσότητα $\pm(\alpha\mp\beta)$ καὶ Γ, $\mp(\alpha\pm\gamma)$.

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν μίαν ςιγμὴν ἀπέχουσαν ἀπὸ Β, $\alpha\mp\beta$ κάμνομεν κέντρον εἰς Β, καὶ ἀκτῖνα $\alpha\mp\beta$· τότε αἱ ςιγμαὶ τῆς γραφομένης περιφερείας ἀπέχουσιν ἰσάκις ἀπὸ Β· τὸ αὐτὸ πράττοντες καὶ ὡς πρὸς τὴν Γ ἔχομεν ἄλλην περιφέρειαν αἱ ςιγμαὶ τῆς ὁποίας ἀπέχουσιν ἀπὸ Γ, $\alpha\mp\gamma$.

Τώρα γράφοντες κύκλον ὅςις νὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Α καὶ νὰ ἅπτεται τῶν γεγραμμένων μὲ τὰς εἰρημένας ἀκτῖνας, ἔχομεν τὸν κύκλον τῆς ἀκτῖνος $\chi\mp\alpha$· καὶ προσδιορισθέντος τοῦ κέντρου τούτου, προσδιορίζεται τὸ τοῦ ζητουμένου.

Η λύσις λοιπὸν τοῦ Προβλήματος ἤχθη εἰς τὴν λύσιν τοῦ ἀκολούθου: Νὰ γράψωμεν κύκλον ὅςις νὰ διέρχεται διὰ δεδομένης ςιγμῆς καὶ νὰ ἅπτεται δύο ἄλλων δεδομένων κύκλων· διὰ τὴν λύσιν τούτου ὅρα Αναλ. Γεωμ. πρ. 30. Βιβλ. 2.

Δὲν ἐθέσαμεν εἰς τοὺς πίνακας τὰ ἀναφερόμενα σχήματα εἰς τὰς εἰρημένας περιγράσεις δι' οἰκονομίαν τῶν ἐξόδων, καὶ ἠξεύροντες προσέτι ὅτι εἰς τὸ ἔθνος μας εὑρίσκονται νέοι οἱ ὁποῖοι ἀπέκτησαν ἱκανὰς ἰδέας ἐπέκεινα εἰς τὰς ἐπιστήμας.

Ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τούτων γνωρίζομεν καὶ διὰ τοὺς ὁποίους ἠμποροῦμεν νὰ δώσωμεν πᾶσαν πίστιν, τοὺς ἀκολούθους.

ΙΩΑΝΝΗΝ ΚΟΝΤΟΥΡΗΝ ΚΕΦΑΛΛΗΝΑ, δημόσιον διδάσκαλον τῆς Μαθηματικῆς εἰς τὸ δευτεραῖον σχολεῖον τῆς Κερκύρας.

ΣΠΥΡΙΔΩΝΑ ΜΑΝΑΡΗΝ ΕΞ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ, διδάσκαλον τῆς Μαθηματικῆς εἰς τὸ σχολεῖον τῆς Ἁγίας Μαύρας.

ΙΩΑΝΝΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΔΗΝ ΧΙΟΝ δημόσιον διδάσκαλον τῆς Μαθηματικῆς εἰς Κύθηρα.

ΓΕΩΡΓΙΟΝ ΚΟΝΔΗΝ ΕΞ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ διδάσκαλον τῆς Μαθηματικῆς εἰς τὸ σχολεῖον τῶν Παξῶν.

ΔΗΜΗΤΡΙΟΝ ΔΕΣΠΟΤΟΠΟΥΛΟΝ ΕΞ ΑΓΧΙΑΛΟΥ· δημόσιον διδάσκαλον τῆς Μαθηματικῆς εἰς τὸ ἐν Ναυπλίῳ στρατιωτικὸν σχολεῖον.

ΙΩΑΝΝΗΝ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΙΔΗΝ ΕΚ ΠΑΡΟΥ διδάσκαλον τῆς Μαθηματικῆς εἰς Ἰθάκην.

Εἰς τοὺς νέους τούτους ἠξιώθην νὰ δείξω τοὺς διαφόρους κλάδους τῆς Μαθηματικῆς, οἱ ὁποῖοι ἔκαμαν τόσην πρόοδον, ὥστε εἶναι σχεδὸν χρόνος ἀφ' οὗ ὠνομάσθησαν διδάσκαλοι.

Ἐλπίζω νὰ ἀξιωθῶ ταχέως νὰ καταγράψω τὰ ὀνόματα ἄλλων ἀξίων μαθητῶν μου, οἵτινες ὅλονὲν προοδεύουσι γιγαντιαίοις βήμασιν εἰς τὴν σπουδὴν τῆς Μαθηματικῆς.

Ἐγὼ, φίλη πατρίς! ἐν ὅσῳ βλέπω τὸ φῶς τοῦ Ἡλίου δὲν θέλω παύσει ἀπὸ τὸ νὰ ἀγωνίζωμαι, ὅσον τὸ κατὰ δύναμιν, διὰ τὴν ὠφέλειάν σου· καὶ εἴθε καὶ ἄλλοι ὁμογενεῖς μὲ τὸν αὐτὸν ζῆλον νὰ κάμνωσι τὸ ἴδιον· διὰ νὰ ἐλευθερωθῇς μίαν φορὰν ἀπὸ τὸ ζοφερὸν σκότος τῆς ἀμαθείας, καὶ νὰ ἴδῃς τὰς Μούσας σου εἰς τὴν ἀρχαίαν των ἑστίαν. — Ο. Μ.