ἕπεται ὅτι αἱ στιγμαὶ τῶν συναπαντήσεών των εἰς Κ καὶ Ι, καθὼς καὶ ἡ διαπερῶσα εὐθεῖα ΘΙΚΛ εἶναι παρομοίως γνωστά.

Η κατασκευὴ τοῦ προβλήματος εὐκόλως συνάγεται ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως· διότι, ἐκβαλλομένων τῶν ΕΑ, ΗΖ ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς τὴν στιγμὴν Μ ἂς γένῃ ΖΑ : ΑΤ : : Ω : Ψ· ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΜΤΟ· ἂς ληφθῇ μετὰ ταῦτα στιγμή τις Κ ἐπὶ τῆς ΓΒ· ἂς ἀχθῇ ἡ ΚΣ παράλληλος τῆς ΖΗ, καὶ ἂς γένῃ ΚΣ : ΡΣ : : Χ : Ψ· ἔπειτα ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΣ καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΜΟ εἰς τὴν Ο ἂς φερθῶσι τέλος πάντων αἱ ΟΙ, ΚΟ ἀμοιβαίως παράλληλοι τῶν ΖΗ καὶ ΑΒ. Η εὐθεῖα ΘΙΚΛ ἥτις ἀπέρχεται ἐκ τῶν στιγμῶν τῶν τομῶν Ι καὶ Κ, εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα· διότι ΘΙ : ΙΚ : : ΠΙ : ΙΟ : : ΚΡ : ΡΣ : : Χ : Ψ, καὶ ΙΚ : ΚΛ : : ΟΚ : ΚΝ : : ΤΑ : ΑΖ : Ψ : Ω.

Τώρα ἐὰν ὁ λόγος τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΑΖ γένῃ ἴσος μὲ ἐκεῖνον τῆς Ψ πρὸς τὴν Ω, ἡ στιγμὴ Τ συμπίπτει μὲ τὴν Γ, καὶ ἡ ΤΟ μὲ τὴν ΓΟ.

Τὸ πρόβλημα εἰς ταύτην τὴν περίστασιν εἶναι ἀπροσδιόριστον: δηλαδὴ κάθε στιγμὴ λαμβανομένη ἐπὶ τῆς ΓΟ ἔχει τὴν ἰδιότητα, ἥτις πρότερον εἰς μόνη τὴν στιγμὴν Ο ὑπῆρχε.

Περὶ τῶν ἰσοπεριμέτρων.

Ορισμός.

Καλοῦνται ἰσοπερίμετρα σχήματα, ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας τὰς περιμέτρους δηλαδὴ τὴν ἰδίαν γραμμικὴν ἔκτασιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΣ'.

Πρόβλημα.

Επὶ μιᾶς δεδομένης εὐθείας νὰ εὕρωμεν στιγμὴν τοιαύτην, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστημάτων της ἀπὸ

δύο δεδομένας σιγμὰς, νὰ ἦναι τὸ μικρότερον ἀπὸ κάθε ἄλλο.

Ζητεῖται νὰ φέρωμεν ἐκ μιᾶς σιγμῆς τῆς εὐθείας ΓΔ (σχ. 26. πίν. 10) εἰς τὰς δεδομένας σιγμὰς Α καὶ Β δύο εὐθείας ΑΗ καὶ ΒΗ, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ ἦναι ἐλάχιστον.

Ἀνάλυσις.

Ἐκ τῆς Β μιᾶς τῶν δεδομένων σιγμῶν ἂς φερθῇ ἡ κάθετος ΒΕ ἐπὶ τῆς ΓΔ καὶ ἀφ' οὗ ἐκβληθῇ ὑπὸ τῆς ΓΔ ἴσην ποσότητα, ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΗΖ· φανερὸν εἶναι ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΕΗ καὶ ΖΕΗ εἶναι ἴσα, διὰ τοῦτο ΒΗ=ΗΖ, καὶ οὕτως ΑΗ+ΗΖ εἶναι ἐλάχιστον· ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ γραμμὴ ΑΗΖ εἶναι εὐθεῖα, καὶ προσδιωρισμένη· διότι αἱ σιγμαὶ Α καὶ Ζ εἶναι δεδομέναι· λοιπὸν ἡ κοινὴ τομή της Η μὲ τὴν ΓΔ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΗ, ΒΗ εἶναι παρομοίως προσδιωρισμένα.

Φανερὸν εἶναι ὅτι αἱ γωνίαι ΑΗΓ καὶ ΒΗΔ εἶναι ἴσαι.

Πόρισμα. Μὲ τρόπον ἀνάλογον λύομεν ἓν πρόβλημα ὅμοιον μὲ τὸ ἀνωτέρω. » Ἐπὶ μιᾶς δεδομένης εὐθείας, νὰ εὕρωμεν σιγμὴν τοιαύτην, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν ἀποσημάτων της ἀπὸ δύο δεδομένας σιγμὰς νὰ ἦναι ἡμεγαλητέρα ἀπὸ κάθε ἄλλην » ἐὰν αὗται αἱ σιγμαὶ εὑρίσκωνται καὶ αἱ δύο θεμέναι ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΓΔ (σχ. 26 δὶς), φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς Α'Η καὶ ΒΗ ἐπειδὴ εἶναι παντοτε μικροτέρα παρὰ τὴν Α'Β, τὸ τελευταῖον ὅριον ὑπάρχει, καὶ ἡ διαφορὰ αὕτη θέλει εἶναι εἰς τὴν μεγίστην της κατάσασιν ὅταν Α'Η καὶ ΒΗ σημπέσωσι μὲ τὴν Α'Β τότε ἡ σιγμὴ Η εὑρίσκεται ἐκβαλλομένης τῆς Α'Β ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΓΔ· ἐὰν ὅμως αἱ σιγμαὶ Α καὶ Β ἔχουν διαφορετικὴν θέσιν σχετικῶς πρὸς τὴν

ΓΔ, ὡς εἰς τὸ σχῆμα 26 δὶς, κατεβάζομεν τὴν κάθετον ΒΕ τὴν ὁποίαν ἐκβάλλομεν μέχρι τῆς ΕΖ ἴσην ποσότητα, καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΖΗ, καὶ ΖΗ. Τὰ τρίγωνα ΒΕΗ εἶναι προφανῶς ἴσα διὰ τοῦτο ΒΗ = ΗΖ· ἀλλ' εἰς τὸ τρίγωνον ΑΖΗ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ΑΗ καὶ ΗΖ ὡς μικροτέρα παρὰ ΑΖ, θέλει φθάσει εἰς τὴν μεγίστην κατάσασιν, ὅταν ὑποτεθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον τοῦτο συμπτίπτει μὲ αὐτὴν τὴν εὐθείαν ΑΖ· τότε ἡ γωνία ΑΗΕ = ΒΗΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ'.

Θεώρημα.

Ἀπὸ ὅλας τὰς εὐθείας αἵτινες δύνανται νὰ ἀχθοῦν ἀπὸ δύο δεδομένας στιγμὰς εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν στιγμὴν τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου, ἐκείνων τὸ ἄθροισμα εἶναι τὸ μικρότερον αἱ ὁποῖαι ἰσάκις κλίνουν πρὸς τὴν ἡγμένην ἐφαπτομένην ἀπὸ τὴν στιγμὴν τῆς συνάπαντήσεώς των.

Ἀπὸ ὅλας τὰς ἀγομένας εὐθείας ἐκ τῶν στιγμῶν Α καὶ Β (σχ. 27) εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΗΔΘ, αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΔ αἱ ὁποῖαι κάμνουν ἴσας γωνίας μὲ τὴν ἐφαπτομένην ΔΖ δίδουν ἓν ἄθροισμα ἐλάχιστον.

Κατὰ τὴν τελευταίαν πρότασιν, αἱ ΑΔ καὶ ΒΔ αἵτινες πίπτουν εἰς μίαν στιγμὴν τῆς εὐθείας ΕΖ εἶναι αἱ μικρότεραι ἀπὸ τὰς ἄλλας γραμμὰς ὁποῦ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐκ τῶν στιγμῶν Α καὶ Β εἰς κάθε ἄλλην στιγμὴν τῆς ΕΖ· ἀλλ' αἱ ἡγμέναι γραμμαὶ εἰς τὴν ἐφαπτομένην εἶναι μικρότεραι παρὰ τὰς ἐξωτερικὰς γραμμὰς ὅπου τελειόνουν εἰς τὴν περιφέρειαν· διὰ τοὺς δύο λοιπὸν τούτους λόγους, αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΔ δίδουν τὸ ἐλάχιστον ἄθροισμα ἀπὸ ὅλας τὰς ἄλλας εὐθείας αἵτινες δύνανται νὰ ἀχθοῦν ἐκ τῶν στιγμῶν Α καὶ Β εἰς τὴν περιφέρειαν ΗΔΘ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ'.

Πρόβλημα.

Νὰ εὕρωμεν σιγμὴν τοιαύτην, ὥσε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποσημάτων της ἀπὸ τρεῖς δεδομένας σιγμὰς, νὰ ἦναι τὸ πλέον μικρότερον.

Ζητεῖται νὰ φέρωμεν ἐκ τῶν σιγμῶν Α,Β,Γ (σχ.28) τὰς εὐθείας ΑΔ, ΒΔ, ΓΔ ὥσε τὸ ἄθροισμα νὰ ἦναι ἐλάχισον.

Ανάλυσις.

Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ΒΔ μένει σαθερὰ, ἡ θέσις τῆς Δ ἐπὶ τῆς γεγραμμένης ἐκ τοῦ κέντρου Γ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΒΔ περιφερείας, πρέπει κατὰ τὴν τελευταίαν πρότασιν νὰ ἦναι τοιαύτη, ὥσε τὸ ἄθροισμα ΑΔ+ΓΔ ἐπειδὴ εἶναι ἐλάχισον, ἡ γωνία ΑΔΒ νὰ ἦναι ἴση μὲ τὴν ΓΔΒ· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἐὰν ἡ ΑΔ μένῃ σαθερὰ, αἱ ΒΔ καὶ ΓΔ αἵτινες σχηματίζουν ἓν ἐλάχισον, πρέπει νὰ κάμνουν μὲ τὴν ΑΔ τὰς γωνίας ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ ἴσας· ἑνόντες τὰς δύο ταύτας συνθήκας, βλέπομεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΔ, ΒΔ, ΓΔ σχηματίζουν γωνίας ἴσας ἀναμεταξύ των εἰς τὴν σιγμὴν τῆς συναπαντήσεώς των.

Ἐκ τούτου ἕπεται ἡ ἀκόλουθος κατασκευὴ· ἂς γραφθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ ἐφ' ἑκάσης τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΒΓ ἂς κατασκευασθῇ τρίγωνον ἰσόπλευρον, εἰς τὰ ὁποῖα ἂς περιγραφῶσιν περιφέρειαι κύκλων, αἵτινες τέμνονται εἰς τὴν σιγμὴν Δ: ἡ σιγμὴ αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη· διότι αἱ γωνίαι ΑΔΓ καὶ ΓΔΒ εἶναι τὰ παραπληρώματα τῶν γωνιῶν τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων· λοιπὸν ἑκάστη εἶναι ἴση μὲ δύο τριτημόρια δύο ὀρθῶν γωνιῶν ἢ τὸ ἓν τρίτον τεσσάρων· διὰ τοῦτο αἱ τρεῖς σχηματιζόμεναι γωνίαι ὁλόγυρα τῆς σιγμῆς Δ εἶναι ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Πρόβλημα.

Νὰ εὕρωμεν ἐπὶ μιᾶς δεδομένης εὐθείας ςιγμὴν τοιαύτην, ὥςε αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐκ ταύτης τῆς ςιγμῆς εἰς δύο δεδομένας ςιγμὰς νὰ περιέχουν τὴν μεγαλητέραν γωνίαν.

Ζητεῖται νὰ ἄξωμεν τὴν ΑΓ καὶ ΒΓ (σχ. 29) ὥςε ἡ γωνία ΑΓΒ νὰ ἦναι μεγίςη.

Ἀνάλυσις.

Ἂς διελθῇ διὰ τῶν τριῶν ςιγμῶν Γ, Α καὶ Β περιφέρεια κύκλου· ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι μεγαλητέρα παρὰ κάθε ἄλλην γωνίαν τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ΔΕ· ἡ εὐθεῖα αὐτὴ πρέπει νὰ ἔχῃ ὅλας της τὰς ςιγμὰς ἐκτὸς τοῦ κύκλου ἐξαιρουμένης τῆς Β. Οὕτως ἡ ΔΕ ἅπτεται τοῦ κύκλου εἰς Γ. ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι $ΗΛ \times ΗΒ = \overline{ΓΗ}^2$, διὰ τοῦτο ἡ ςιγμὴ Γ εἶναι προσδιωρισμένη.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Πρόβλημα.

Μεταξὺ ὅλων τῶν ἰσοπεριμέτρων τριγώνων τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ἰδίαν βάσιν, νὰ προσδιορίσωμεν ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μεγαλήτερον.

Ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εὑρισκόμενον ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΓ (σχ. 30) νὰ περικλείῃ ὑπὸ δεδομένην περίμετρον, τὸ μεγαλήτερον ἐμβαδόν.

Ἀνάλυσις.

Ἐπειδὴ ἡ βάσις τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ςαθερὰ, ἐν ᾧ τὸ ἐμβαδόν του εἶναι μέγιςον, πρέπει τὸ ὕψος του νὰ ἦναι τὸ μεγαλήτερον, καὶ διὰ τοῦτο ἡ κορυφὴ

Β νὰ εὑρίσκεται εἰς μίαν παράλληλον τῆς ΑΓ τὴν πλέον μακρυνὴν· ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι αὕτη ἡ παράλληλος εἶναι ΔΕ. Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΒ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ περίμετρος ὅλη τοῦ τριγώνου, κατὰ τὴν ΚΖ' πρότασιν τοῦ παρόντος βιβλίου, εἶναι μικρότερον ἀπὸ ὅ,τι ἠμπορεῖ νὰ ἦναι, ὅταν ἡ γωνία ΑΒΔ ἦναι ἴση μὲ τὴν ΓΒΕ. Τώρα φανερὸν εἶναι, ὅτι ΑΒ + ΒΓ πρέπει νὰ ἦναι ἐλάχιστον· διότι ὅλαι αἱ ἄλλαι γραμμαὶ ἠγμέναι ἐκ τῶν Α καὶ Γ εἰς μίαν ὁποιανδήποτε στιγμὴν τῆς ΔΕ δίδουν ἄθροισμα μεγαλήτερον παρ' ὅ,τι ἡ σταθερὰ περίμετρος ΑΒ + ΓΒ ἐπειδὴ τὰ τμήματα τῶν ἄλλων ἰσοπερίμετρων τριγώνων εἶναι ὑποκάτω τῆς ΕΔ· λοιπὸν ἡ γωνία ΑΒΔ = ΓΒΕ, ἤ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, ΒΑΓ = ΒΓΑ, ὅθεν ΒΓ = ΒΑ. Οὕτως τὸ τρίγωνον ΑΓΒ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ προσδιωρισμένον· διότι ὅλαι του αἱ πλευραὶ εἶναι προσδιωρισμέναι.

Πόρισμα. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι μεταξὺ τῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ πλευρῶν, ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν μεγαλητέραν ἐπιφάνειαν εἶναι τὸ ἰσόπλευρον· διότι, χωρὶς νὰ ἀλλάξωμεν ὅλον τὸ ἄλλο μέρος τοῦ σχήματος, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι δύο ὁποιαιδήποτε πλευραὶ προσκείμεναι μεταβάλλονται· αὗται σχηματίζουν τὸ μεγαλήτερον τρίγωνον ὅταν γένουν ἴσαι. Τὸ πολύγωνον ἄλλο δὲν εἶναι παρὰ ἡ ἕνωσις τῶν οὕτως σχηματιζομένων τριγώνων· πρέπει λοιπὸν νὰ φθάσῃ εἰς τὴν μεγίστην του κατάστασιν, ὅταν τὰ τοιαῦτα τρίγωνα γένουν ἰσοσκελῆ εἰς κάθε σύνθεσιν, καὶ διὰ τοῦτο ὅταν αἱ πλευραὶ τοῦ σχήματος ἦναι ἴσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΔ'.

Θεώρημα.

Εν πολύγωνον τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι δεδομέναι, ἐκτὸς μιᾶς, θέλει περιέχει τὸ μεγαλήτερον

ἐμβαδὸν, ὅταν ἐγγράφεται εἰς ἡμικύκλιον, τὸ ὁποῖον ἔχει διὰ διάμετρον τὴν ἀπροσδιόριςον πλευράν.

Ἔςω τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 31.) τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ ΕΔ καὶ ΕΖ εἶναι ςαθεραὶ καὶ ἐπιςηρίζονται ἐπὶ μιᾶς βάσεως μεταβλητῆς ΑΖ. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου θέλει φθάσει εἰς τὴν μεγίςην του κατάςασιν, ὅταν ΑΖ γένῃ διάμετρος ἑνὸς ἡμικυκλίου περιγεγραμμένου εἰς τὸ πολύγωνον.

Τῷ ὄντι ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΑΔ καὶ ΖΔ ἀπὸ μίαν ὁποιανδήποτε κορυφὴν Δ. Τὰ ἐμβαδὰ ΑΒΓΔ καὶ ΔΕΖ μένουν τὰ αὐτὰ, ἐν ᾧ ἡ γωνία ΑΔΖ αὐξάνει, καὶ αἱ ςιγμαὶ Α καὶ Ζ ἀπομακρύνονται ἀπ' ἀλλήλων· οὕτως τὸ πολύγωνον θέλει περιέχει τὸ μεγαλήτερον ἐμβαδὸν, ὅταν τὸ τρίγωνον γένῃ μέγιςον· ἀλλὰ τὸ τρίγωνον θέλει φθάσει εἰς ταύτην τὴν κατάςασιν, ὅταν ἡ ἡγμένη κάθετος ἐκ τῆς Ζ ἐπὶ τῆς ΑΔ γένῃ ἡ μεγαλητέρα. Πλὴν τότε φανερὸν εἶναι, ὅτι ἡ γωνία ΑΔΖ πρέπει νὰ ἦναι ὀρθὴ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ Δ νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ μιᾶς ἡμιπεριφερείας τῆς ὁποίας ΑΖ εἶναι ἡ διάμετρος· συλλογιζόμενοι κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων κορυφῶν Β, Γ, Ε, βλέπομεν ὅτι ὅλαι πρέπει νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι ΑΖ.

Πόρισμα πρῶτον. Οὕτως ἓν πολύγωνον τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι δεδομέναι, περιέχει τὴν μεγαλητέραν ἐπιφάνειαν ὅταν δύναται νὰ ἐγγραφθῇ εἰς μίαν περιφέρειαν, διότι ἔςω ΑΒΓΔ ἓν πολύγωνον τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι δεδομέναι ἂς ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΑΖ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΖ. Τὸ σχηματιζόμενον πολύγωνον ΑΒΓΔΖ εἶναι ἓν μέγιςον· ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΔΖ εἶναι φανερὰ προσδιωρισμένον· λοιπὸν τὸ ἐναπομένον πολύγωνον ΑΒΓΔ εἶναι παρομοίως μέγιςον.

Πόρισμα δεύτερον. Ἐκ τοῦτου ἕπεται, ὅτι ἀπὸ ὅλα τὰ ἰσοπερίμετρα πολύγωνα δεδομένου ἀριθμοῦ πλευρῶν, τὸ μεγαλήτερον εἶναι τὸ κανονικὸν πολύγωνον· διότι κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω προτάσεως τὸ μέγιςον τοῦτο πολύγωνον πρέπει νὰ ἔχῃ ὅλας του τὰς πλευρὰς ἴσας, αἱ δὲ γωνίαι του εἶναι ἴσαι ὡς ἔχουσαι τὰς κορυφάς των ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ πολύγωνον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΑΒ'.

Θεώρημα.

Ο κύκλος εἶναι μεγαλήτερος ἀπὸ κάθε πολύγωνον ἰσοπερίμετρον· ἐκ τῶν ἀνωτέρω προτάσεων φανερὸν γίνεται ὅτι ἐπειδὴ ἡ περίμετρος καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν εἶναι δεδομένας, τὸ μέγιςον σχῆμα εἶναι τὸ κανονικὸν πολύγωνον· ἔςω ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 32) ἓν τοιοῦτον πολύγωνον τὸ ὁποῖον ἔχει δεδομένην περίμετρον: ἂς διαιρεθῶσιν εἰς δυο ἴσα μέρη τὰ ἀντικείμενα τόξα εἰς τὸν περιγεγραμμένον κύκλον, καὶ ἂς ἐγγραφθῇ εἰς τοῦτον τὸν κύκλον ἓν Κανονικὸν πολύγωνον ΜΒΓΗ . . . ΛΑ διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν τοῦ πρώτου· ἂς φερθῇ ἡ διάμετρος ΜΙ, καὶ αἱ εὐθεῖαι ΟΔ καὶ ΜΔ· ἕκαςον τῶν δύο πολυγώνων σύγκειται ἀπὸ τὸν ἴδιον ἀριθμὸν τριγώνων, ἴσων διὰ τὸ πρῶτον μὲ τὸ ΟΔΝ, καὶ διὰ τὸ δεύτερον μὲ τὸ ΟΔΙ· διὰ τοῦτο αἱ ἐπιφάνειαί των εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς ΟΝ πρὸς ΟΙ, ἢ ὡς ΙΙΝ πρὸς ΜΙ· ἐὰν ὅμως τὸ μέγιςον πολύγωνον Μ . . . . . Α ἀχθῇ εἰς ἄλλο ὅμοιον τῆς ἰδίας περιμέτρου μὲ ἐκείνην τοῦ Α . . . . Ζ καὶ εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ὁμόλογος πλευρὰ τῆς ΔΙ νὰ ἦναι ἴση μὲ ΔΝ, τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων θέλουν εἶναι μεταξύ των ὡς $\overline{\text{ΔΙ}}^2$ πρὸς $\overline{\text{ΔΝ}}^2$ δηλαδὴ ὡς ΜΙ πρὸς ΜΝ· λοιπὸν τὸ πολύγωνον

Α . . . . Ζ λόγον ἔχει εἰς ἕν ἄλλο πολύγωνον τῆς αὐτῆς περιμέτρου καὶ διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν, τὸν ὁποῖον ἡ ΠΝ πρὸς ΜΝ· λοιπὸν ἕν σχῆμα σταθερᾶς περιμέτρου ἔχει ἐμβαδὸν τόσον μεγαλήτερον, ὅσον περισσότερον διπλασιάζεται ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του, καὶ ἐξακολουθουμένου τοῦ τοιούτου διπλασιασμοῦ, τὸ συναγόμενον κανονικὸν πολύγωνον ἀποκτᾷ ἐπιφάνειαν μεγαλητέραν· διὰ τοῦτο ὁ κύκλος εἰς τὸν ὁποῖον πλησιάζουν ὅλα ταῦτα τὰ πολύγωνα, αὐξανομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν του, πρέπει εἰς τὴν ἰδίαν περίμετρον νὰ περικλείῃ τὸ μέγιστον.

ΤΕΛΟΣ
ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ.