ἡ σιγμὴ τῆς συμπτώσεώς των ἔχει διὰ τόπον περιφέρειαν κύκλου ὅτις ἔχει διὰ κέντρον τὴν Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΠ. Ἀλλ' ἡ ἰδιότης πρέπει νὰ ὑπάρχῃ, ἐὰν διαιρέσωμεν ὅλα τὰ τοιαῦτα πολλαπλάσια τῶν τετραγώνων δι' ἑνὸς καὶ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ: τοῦτ' ἔστι ἀντὶ τῶν τετραγώνων τῶν κινητῶν γραμμῶν, θεωρήσωμεν τὰ ὅμοια σχήματα τὰ κατασκευαζόμενα ἐπ' αὐτῶν. Ἐὰν τὸ δεδομένον ἐμβαδὸν ᾖναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων, τότε ὁ κύκλος ἄγεται εἰς μίαν σιγμήν· Ἐπειδὴ τότε ΟΠ γίνεται μηδὲν, καὶ μετὰ τοῦτο τὸ ὅριον ἡ πρότασις εἶναι ἀδύνατος. Παρομοίως εἶναι ἐπίσης φανερὸν ὅτι τὸ κέντρον Ο καὶ ἡ ἀκτὶς ΟΠ μένουν τὰ αὐτὰ καθ' ὁποιαν ταξιν ἐκτελέσωμεν τὴν κατασκευὴν, διὰ νὰ προσδιορισωμεν τὴν θέσιν τοῦ κέντρου —

ΠΕΡΙ ΠΟΡΙΣΜΑΤΩΝ.

Ορισμός.

Διὰ τοῦ πορίσματος σκοπὸν ἔχομεν νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πολλὰς ποσότητας μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ πολλῶν ἄλλων λαμβανομένων κατὰ δεδομένον νόμον ὑπάρχει προσδιωρισμενη τις σχέσις.

Τὸ πόρισμα προϋποθέτει ὅτι ὑπάρχουν συνθῆκαι, αἵτινες καταςαίνουν μίαν πρότασιν ἀπροσδιόριςον τοῦτ' ἔςιν ἀπείρου ἀριθμοῦ λύσεων δεκτικήν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

Πόρισμα.

Δεδομένων τριῶν σιγμῶν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τετάρτην τινα τοιαύτην, ὥςε ἐὰν διέλθῃ ὁποιαδήποτε εὐθεῖα ἐξ αὐτῆς, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποσημάτων ταύτης τῆς εὐθείας ἀπὸ τὰς δύο πρώτας δεδομένας σιγμὰς, νὰ ᾖναι ἴσον μὲ τὸ ἀπόσημα τῆς ἰδίας ἀπὸ τὴν τρίτην.

Εςωσαν Α, Β, Γ (σχ. 18) αἱ τρεῖς δεδομέναι ςιγμαὶ, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τετάρτην τινὰ ςιγμὴν Δ, ὥςε ὁποιαδήποτε εὐθεῖα ΘΔΙ ἠγμένη ἐκ ταύτης τῆς ςιγμῆς νὰ δώσῃ τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων ΑΘ καὶ ΒΙ ἴσον μὲ τὴν κάθετον ΓΗ.

Ανάλυσις.

Εκ τῆς ςιγμῆς Δ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΔΚ, καὶ ἂς φερθῶσιν ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας αἱ δύο κάθετοι ΑΚ καὶ ΒΛ· τέλος ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΛΒ ἥτις συναπαντᾷ τὴν ΚΓ εἰς Ε.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα τὴν ὁποίαν ἔχουν αἱ εὐθεῖαι αἵτινες διέρχονται διὰ τῆς ςιγμῆς Δ, φανερὸν εἶναι ὅτι τὰ ἀποςήματα ΑΚ καὶ ΒΛ τῆς εὐθείας ΓΔΚ τῆς ἠγμένης ἐκ τῆς ςιγμῆς Γ εἰς τὰς ἄλλας δύο ςιγμὰς Α καὶ Β πρέπει νὰ ἦναι ἴσα. Οὕτως τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΕΚ καὶ ΒΛΕ εἶναι ἴσα, ἑπομένως ΑΕ=ΒΕ· λοιπὸν ἡ ςιγμὴ Ε εἶναι προσδιωρισμένη ὡς ςιγμὴ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ· ἂς ἀχθῇ τώρα ἡ κάθετος ΕΖ· φανερὸν εἶναι ὅτι 2ΕΖ=ΑΘ+ΒΙ· περιπλέον ἐπειδὴ ΓΗ καὶ ΕΖ εἶναι παράλληλοι· ἔχομεν ΓΔ:ΔΕ::ΓΗ:ΕΖ καὶ ΓΔ:2ΔΕ::ΓΗ:2ΖΕ ἢ ΑΘ+ΒΙ· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ΓΗ=ΑΘ+ΒΙ λοιπὸν ΓΔ=2ΔΕ, καὶ ἐπειδὴ ΓΕ εἶναι προσδιωρισμένη, διὰ τοῦτο καὶ ἡ ςιγμὴ Δ εἶναι προσδιωρισμένη.

Σύνθεσις.

Ας γένῃ ἡ ΑΕ=½ΑΒ καὶ ΕΔ=⅓ΕΓ λέγω ὅτι Δ εἶναι ἡ ζητουμένη ςιγμή. Τῷ ὄντι ἂς φερθῇ ἡ κάθετος ΕΖ· ἐπειδὴ ΓΗ καὶ ΕΖ εἶναι παράλληλοι, ἔχομεν ΓΔ:ΔΕ::ΓΗ:ΕΖ· ἀλλὰ ΓΔ=2ΔΕ· λοιπὸν ΓΗ=2ΕΖ=ΑΘ+ΒΙ.

Τὸ ἀποδεδειγμένον πόρισμα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πορίζόμενον ἐκ τῆς λύσεως τούτου τοῦ προβλήματος:

Νὰ ἄξωμεν ἐκ τῆς σιγμῆς Μ εὐθεῖαν τινὰ ΜΝ, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων ΛΘ καὶ ΒΙ τῶν φερομένων ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας ἐκ τῶν σιγμῶν Α καὶ Β, νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὴν κάθετον ΓΗ τὴν ἠγμένην ἐκ τῆς Γ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος. Η σιγμὴ Δ εὑρίσκεται ὡς ἀνωτέρω, καὶ ἡ θέσις τῆς ΜΝΔ εἶναι προσδιωρισμένη· ἀλλ' ἡ διεύθυνσις ταύτης τῆς εὐθείας ἤθελεν εἶναι διόλου ἀπροσδιόριστος, ἐὰν ἀκολουθοῦσα νὰ συμπέσῃ ἡ σιγμὴ Μ μὲ τὴν Δ· εἰς ταύτην τὴν ὑπόθεσιν τὸ πρόβλημα εἶναι δεκτικὸν ἀπείρου ἀριθμοῦ λύσεων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

Πόρισμα.

Δεδομένου ἑνὸς κύκλου καὶ μιᾶς εὐθείας, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν σιγμὴν τοιαύτην, ὥστε κάθε εὐθεῖα ἥτις ἐκ ταύτης διέρχεται καὶ τελειόνει εἰς τὸν κύκλον καὶ εἰς τὴν εὐθεῖαν, νὰ διαιρῆται εἰς ταύτην τὴν σιγμὴν, εἰς δύο τμήματα, τῶν ὁποίων τὸ ὀρθογώνιον εἶναι προσδιωρισμένον.

Η εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 19 πίναξ. 9) καὶ ὁ κύκλος ΘΔΖ εἶναι δεδομένης θέσεως. Ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὴν σιγμὴν Ζ, εἰς τὴν ὁποίαν ὁποιαδήποτε εὐθεῖα ΕΔΖ νὰ διαιρῆται εἰς δύο τμήματα, τὰ ὁποῖα νὰ περιέχουν δεδομένον ὀρθογώνιον.

Ανάλυσις.

Εκ τῆς Ζ ἂς ἀχθῇ ἡ ΘΗΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τὸ ὀρθογώνιον ΘΖ × ΗΖ εἶναι ἴσον μὲ τὸ δεδομένον καὶ ἑπομένως μὲ ΔΖ × ΖΕ· λοιπὸν ΔΖ:ΘΖ::ΗΖ:ΖΕ· τοῦτο τὰ τρίγωνα ΔΖΘ καὶ ΗΖΕ ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων, εἶναι ὅμοια, ἑπομένως ἡ γωνία ΖΔΘ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΖΗΕ δηλαδὴ μὲ ὀρθὴν γωνίαν· λοιπὸν ΘΔΖ εἶναι ἡμιπεριφερεία ἥτις

ἔχει ΘΖ διὰ διάμετρον. Ἐπειδὴ δὲ τὸ κέντρον Γ εἶναι δεδομένον, διὰ τοῦτο καὶ ἡ κάθετος ΘΓΗ εἶναι παρομοίως δεδομένη, ἑπομένως ἡ σιγμὴ Ζ εἶναι προσδιωρισμένη· αἱ δὲ σιγμὴ Ζ, Η, Θ μὲ τὸ νὰ εἶναι προσδιωρισμέναι, ἀκολουθεῖ τὸ αὐτὸ διὰ τὸ ὀρθογώνιον ΘΖ × ΖΗ.

Σύνθεσις.

Ἐκ τοῦ κέντρου Γ ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡ κάθετος ΓΖΗ ἥτις συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν εἰς Ζ. Ἡ σιγμὴ αὕτη ἔχει τὴν εἰρημένην ἰδιότητα: τοῦτ' ἔστιν ἐὰν ἀπὸ αὐτὴν διέλθῃ ὁποιαδήποτε εὐθεῖα ἥτις νὰ τελειόνῃ εἰς τὴν περιφέρειαν καὶ εἰς τὴν ΑΒ, τὰ δύο τμήματα της περιλαμβάνουν προσδιωρισμένον ὀρθογώνιον.

Τῷ ὄντι ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΘ· τότε τὰ τρίγωνα ΖΗΞ καὶ ΖΔΘ εἶναι ὅμοια· λοιπὸν ΖΗ : ΖΞ : : ΖΔ : ΖΘ· ὅθεν ΖΞ × ΖΔ = ΖΗ × ΖΘ = μὲ προσδιωρισμένον ὀρθογώνιον.

Τὸ πόρισμα τοῦτο δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι συνάγεται ἐκ τοῦ ἀκολούθου προβλήματος: ἐκ τῆς σιγμῆς Μ νὰ ἄξωμεν εὐθεῖάν τινα ΔΜΖΕ ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τῶν τμημάτων της ΔΖ καὶ ΖΕ νὰ ἦναι ἴσον μὲ προσδιωρισμένον ὀρθογώνιον. Ἡ σιγμὴ Ζ ἀφ' οὗ προσδιωορισθῇ ὡς ἀνωτέρω, ἡ εὐθεῖα ΔΜΕ εἶναι κατὰ πάντα προσδιωρισμένη· Ἀλλ' ὅταν ἡ σιγμὴ Μ τύχῃ νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν Ζ, ἡ εὐθεῖα ΔΕ δὲν ἔχει πλέον προσδιωρισμένην θέσιν, τοῦτ' ἔστιν αὕτη πληροῖ εἰς τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ἦναι ἡ θέσις της.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ'.

Πόρισμα.

Δεδομένου ἑνὸς κύκλου καὶ μιᾶς σιγμῆς, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἄλλην σιγμὴν τοιαύτην, ὥστε ἐὰν φέρωμεν

ἐκ ταύτης καὶ τῆς πρώτης δύο εὐθείας εἰς ὁποιανδήποτε σιγμὴν τῆς περιφερείας τοῦ δεδομένου κύκλου, αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι νὰ ἔχουν πάντοτε τὸν αὐτὸν λόγον.

Δεδομένης τῆς περιφερείας ΕΓΖ καὶ τῆς σιγμῆς Α, νὰ εὕρωμεν τὴν σιγμὴν Β (σχ. 20) τοιαύτην, ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΓ ἀγόμεναι εἰς τὴν σιγμὴν Γ τῆς περιφερείας ΕΓΖ νὰ ἔχουν λόγον προσδιωρισμένον.

Ανάλυσις.

Ας ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΒ ἥτις συναπαντᾷ τὸν κύκλον εἰς Ε καὶ Ζ· ἂς φερθῶσιν αἱ ΓΕ καὶ ΓΖ, καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΑΓ· ἐπειδὴ αἱ σιγμαὶ Ε καὶ Ζ εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἕπεται, ἐκ τῆς ὑποθέσεως, ὅτι ΑΓ : ΒΓ : : ΑΕ : ΒΕ, καὶ ΑΓ : ΒΓ : : ΑΖ : ΖΒ· ἀπὸ ἐδῶ ἀκολουθεῖ ὅτι ἡ ΓΕ διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν ΑΓΒ, καὶ ὅτι ἀκολουθεῖ τὸ αὐτὸ διὰ τὴν ΓΖ σχετικῶς πρὸς τὴν γωνίαν τὴν προσκειμένην ΒΓΔ: διὰ τοῦτο τὸ τόξον ΕΓΖ εἶναι ἡμιπεριφέρεια. Οὕτως ἡ εὐθεῖα ἡ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου Ο, εἶναι προσδιωρισμένης θέσεως. Τώρα ἐπειδὴ ΑΖ : ΖΒ : : ΑΕ : ΕΒ ἡ ΑΖ : ΑΕ : : ΖΒ : ΕΒ· ἕπεται ὅτι ἡ ΕΖ ἐπειδὴ διαιρεῖται ἐξωτερικῶς καὶ ἐσωτερικῶς εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, ἡ ΕΟ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ΑΟ καὶ ΒΟ ἡ $\overline{\text{ΕΟ}}^2 = \text{ΑΟ} \times \text{ΒΟ}$ ἀλλὰ ΑΟ καὶ ΕΟ εἶναι προσδιωρισμέναι· λοιπὸν ΒΟ καὶ ἡ σιγμὴ Β εἶναι προσδιωρισμένα· περιπλέον ἐπειδὴ ΑΟ : ΕΟ : : ΕΟ : ΒΟ· διὰ τοῦτο φανερὸν εἶναι ὅτι αἱ ἠγμέναι εὐθεῖαι ἐκ τῆς Α καὶ Β εἰς τὴν περιφέρειαν, εἶναι μεταξύ των εἰς προσδιωρισμένον λόγον ἴσον μὲ $\frac{\text{ΕΟ}}{\text{ΒΟ}}$.

Σύνθεσις.

Ας φερθῇ ἡ ΑΖ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ δεδομένου κύκλου, καὶ ἂς γένῃ ΑΟ : ΕΟ : : ΕΟ : ΒΟ· λέγω ὅτι Β εἶναι ἡ ζητουμένη σιγμή.

Τῷ ὄντι ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΟ· ἐπειδὴ ΕΟ = ΓΟ, ἕπεται ὅτι ΑΟ : ΓΟ : : ΓΟ : ΒΟ. Τοῦτο δεικνύει ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΓΟ καὶ ΒΓΟ ὡς ἔχοντα περιπλέον μίαν κοινὴν γωνίαν εἶναι ὅμοια, ἑπομένως ΑΓ : ΒΓ : : ΑΟ : ΓΟ τοῦτ' ἔστι εἰς δεδομένον λόγον.

Τὸ πόρισμα τοῦτο συνάγεται ἐκ τοῦ θεωρήματος τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὴν ΙΒ' πρότασιν τούτου τοῦ βιβλίου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ'.

Πόρισμα.

Δεδομένου ἑνὸς κύκλου καὶ μιᾶς εὐθείας, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν στιγμὴν τοιαύτην, ὥστε ἐὰν ἄξωμεν ἀπὸ αὐτὴν ὁποιανδήποτε γραμμὴν εἰς τὴν δεδομένην εὐθεῖαν, νὰ ἦναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων τῶν διαχωριζομένων ἀπὸ τὴν περιφέρειαν καὶ τὴν δεδομένην γραμμήν.

Ἔστωσαν ἡ δεδομένη εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 21) καὶ ὁ κύκλος ΘΚΖ. Δυνατὸν εἶναι νὰ προσδιορίσωμεν στιγμὴν τινὰ Δ, ἐκ τῆς ὁποίας ἐὰν φέρωμεν ὁποιανδήποτε εὐθεῖαν ΖΔΓ, τὸ μέρος ΓΔ νὰ ἦναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν τμημάτων ΓΕ καὶ ΓΖ.

Ἀνάλυσις.

Ἐκ τῆς Δ ἂς ἀχθῇ ἡ κάθετος ΙΔΗ ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΓΙ, ΘΚ· ἐπειδὴ ΓΕ : ΓΔ : : ΓΔ : ΓΖ, διὰ τοῦτο $\overline{\Gamma\Delta}^2 = \Gamma E \times \Gamma Z = K\Gamma \times \Gamma I$· ἐπειδὴ δὲ ΗΙ διέρχεται ἐκ τῆς Δ πρέπει νὰ ἔχωμεν ΗΘ : ΗΔ : : ΗΔ : ΗΙ δηλαδὴ $\overline{H\Delta}^2 = H\Theta \times HI$· ἀλλὰ $\overline{\Gamma\Delta}^2 = \overline{H\Gamma}^2 + \overline{\Delta H}^2$, λοιπὸν $\Gamma K \times \Gamma I = \overline{\Gamma H}^2 + H\Theta \times HI$· ἂς ἀφαιρεθῶσι τὰ δύο ταῦτα μέλη ἐκ τῶν $\overline{\Gamma I}^2 =$

$\overline{\text{ΓΗ}}^2 + \overline{\text{ΗΙ}}^2$, εὑρίσκομεν ΓΙ×ΚΙ=ΗΙ×ΘΙ, ἑπομένως ΓΙ : ΗΙ :: ΘΙ : ΚΙ· διὰ τοῦτο τὰ τρίγωνα ΓΙΗ καὶ ΘΙΚ τὰ ὁποῖα ἔχουν προσέτι μίαν κοινὴν γωνίαν εἰς Ι, εἶναι ὅμοια. Οὕτως ἡ γωνία ΘΚΙ ὡς ἴση μὲ τὴν ΓΗΙ εἶναι ὀρθὴ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΘΙ εἶναι διάμετρος· λοιπὸν ἡ ΗΙ εἶναι προσδιωρισμένης θέσεως, καὶ ἐπειδὴ αἱ σιγμαὶ Η, Θ καὶ Ι εἶναι δεδομέναι, διὰ τοῦτο τὸ ὀρθογώνιον ΗΘ×ΗΙ ἢ τὸ τετράγωνον τῆς ΗΔ εἶναι προσδιωρισμένον, καὶ διὰ τοῦτο ἡ σιγμὴ Δ εἶναι προσδιωρισμένη.

Σύνθεσις.

Ἐκ τοῦ κέντρου Ο ἂς φερθῇ ἡ κάθετος ΗΟΙ, καὶ ἂς ληφθῇ μία μέση ἀνάλογος ΗΔ μεταξὺ ΗΘ καὶ ΗΙ· λέγω ὅτι ἡ Δ εἶναι ἡ ζητουμένη σιγμή· διότι

$\overline{\text{ΓΕ}}^2 \times \overline{\text{ΓΖ}}^2 = \overline{\text{ΓΟ}}^2 - \overline{\text{ΘΟ}}^2 = \overline{\text{ΓΗ}}^2 + \overline{\text{ΗΟ}}^2 - \overline{\text{ΘΟ}}^2 = \overline{\text{ΓΗ}}^2 +$

$\text{ΗΘ} \times \text{ΗΙ}$· ἀλλὰ $\overline{\text{ΗΔ}}^2 = \text{ΗΘ} \times \text{ΗΙ}$· λοιπὸν $\overline{\text{ΓΕ}}^2 \times \overline{\text{ΓΖ}}^2 =$

$\overline{\text{ΓΗ}}^2 + \overline{\text{ΗΔ}}^2 = \overline{\text{ΓΔ}}^2$.

Τὸ πόρισμα τοῦτο δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι συνάγεται ἐκ τοῦ ἀκολούθου προβλήματος· ἐκ μιᾶς δεδομένης σιγμῆς Π ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἑνὸς κύκλου, νὰ ἐξωμεν εἰς τὴν κάθετον ΑΒ μίαν εὐθεῖαν ΓΛΠΜ τοιαύτην ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τῶν τμημάτων ΓΛ καὶ ΓΜ, νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ΗΝ· ἐπειδὴ

$\text{ΓΛ} \times \text{ΓΜ} = \text{ΚΓ} \times \text{ΓΙ} = \overline{\text{ΓΙ}}^2 - \text{ΓΙ} \times \text{ΚΙ}$· ἀλλὰ $\overline{\text{ΓΙ}}^2 =$

$\overline{\text{ΓΗ}}^2 + \overline{\text{ΗΙ}}^2$, καὶ $\text{ΓΙ} \times \text{ΚΙ} = \text{ΗΙ} \times \text{ΘΙ}$· διὰ τοῦτο $\text{ΓΛ} \times$

$\text{ΓΜ} = \overline{\text{ΓΗ}}^2 + \text{ΗΙ} \times \text{ΗΘ}$, καὶ ἐὰν κάμωμεν $\overline{\text{ΗΔ}}^2 = \text{ΗΙ} \times$

ΗΘ, φανερὸν εἶναι ὅτι ΓΑ×ΓΜ=$\overline{\text{ΓΗ}}^2$+$\overline{\text{ΗΔ}}^2$=$\overline{\text{ΓΔ}}^2$, καὶ διὰ τοῦτο $\overline{\text{ΓΔ}}^2$=$\overline{\text{ΗΝ}}^2$, καὶ ΓΔ=ΗΝ· ἡ εὐθεῖα ΓΔ καὶ ἡ στιγμὴ Δ ἐπροσδιορίσθησαν, διὰ τοῦτο καὶ ἡ στιγμὴ Γ καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΑΠΜ εἶναι προσδιωρισμένα. Τὸ πρόβλημα λοιπὸν λύεται ἐὰν ζητηθῇ μία μέση ἀνάλογος ΗΔ μεταξὺ τῆς ΗΘ καὶ ΗΙ, καὶ γραφθῇ ἐκ τῆς Δ ὡς κέντρου μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν ΗΝ εἰς κύκλος ὅστις συναπαντᾷ τὴν κάθετον ΑΒ εἰς Γ· ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ἡ θέσις τῆς Γ δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ ἐκείνην τῆς Π· ἐὰν λοιπὸν ἡ ΠΑΜ συμπέσῃ μὲ τὴν ΓΕΖ, ἔχομεν ΓΕ×ΓΖ=$\overline{\text{ΗΝ}}^2$=$\overline{\text{ΓΔ}}^2$, καὶ αὕτη ἡ ἰδιότης ὑπάρχει ὁποιανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἔχῃ ἡ Γ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ'.

Πόρισμα.

Δεδομένης μιᾶς στιγμῆς ἐπὶ τῆς διαμέτρου, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἄλλην εἰς τὴν προεκβολὴν ταύτης τῆς διαμέτρου, ὥστε ἡ σχηματιζομένη γωνία ἀπὸ δύο εὐθείας ἠγμένας ἐκ ταύτης τῆς στιγμῆς εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς χορδῆς διερχομένης ἀπὸ τὴν δεδομένην στιγμὴν νὰ διαιρῆται εἰς δύο ἴσα μέρη ἀπὸ τὴν διάμετρον.

Επὶ τῆς διαμέτρου ΖΘ (σχ. 22) ἑνὸς κύκλου ἔστω μία σταθερὰ στιγμὴ Α, ἐκ τῆς ὁποίας ἂς φερθῇ μία χορδὴ ὁποιαδήποτε ΒΑΓ. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν στιγμὴν τινὰ Δ ἐπὶ τῆς διευθύνσεως ταύτης τῆς διαμέτρου τοιαύτην, ὥστε ἡ γωνία ΑΔΓ νὰ ἦναι ἴση μὲ τὴν ΑΔΒ.

Ανάλυσις.

Ας φερθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΕΒ, ΕΟ καὶ ΒΟ. Τὰ τρίγωνα ΕΟΔ καὶ ΒΟΔ εἶναι ἴσα· διότι ἔχουν τὴν πλευρὰν

ΕΟ ἴσην μὲ τὴν ΒΟ, τὴν ΔΟ κοινὴν, τὴν γωνίαν ΟΔΕ ἴσην μὲ τὴν ΟΔΒ, καὶ εἶναι καὶ τὰ δύο τοῦ ἰδίου εἴδους ἐπειδὴ, αἱ γωνίαι ΔΕΟ καὶ ΔΒΟ εἶναι ἴσαι μεταξύ των· λοιπὸν ἡ γωνία ΕΟΗ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΒΟΗ· ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΕΟΗ καὶ ΒΟΗ εἶναι παρομοίως ἴσα. Τοῦτο ἀποδεικνύει ὅτι ΕΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΖΘ· διὰ τοῦτο ΖΑ: ΑΘ::ΖΔ:ΔΘ (1).

Ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος τῆς ΖΑ πρὸς τὴν ΑΘ εἶναι δεδομένος, ἐκεῖνος τῆς ΖΔ πρὸς τὴν ΔΑ εἶναι παρομοίως δεδομένος· ὅθεν συνάγομεν ὅτι ἡ σιγμὴ Δ εἶναι παρομοίως προσδιωρισμένη.

Σύνθεσις.

Ἐὰν ληφθῇ σιγμή τις Δ εἰς τρόπον ὥστε ΟΑ:ΟΘ::ΟΘ:ΟΔ, αὕτη θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη σιγμή. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τοῦτο, ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΟΓ καὶ ΟΒ· ἐπειδὴ ΟΘ=ΟΓ, διὰ τοῦτο ΟΑ:ΟΓ::ΟΓ:ΟΔ· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΟΓ καὶ ΓΟΔ ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων, εἶναι ὅμοια, ἑπομένως ἡ γωνία ΟΓΑ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΟΔΓ· παρομοίως δεικνύομεν ὅτι ἡ γωνία ΟΒΑ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΟΔΒ· ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΒΟΓ ἐπειδὴ εἶναι ἰσοσκελὲς, αἱ γωνίαι ΟΓΑ καὶ ΟΒΑ εἶναι ἴσαι, ἑπομένως τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὰς γωνίας ΟΔΓ καὶ ΟΔΒ.

---

(1) Ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΖΓ, ΘΓ καὶ ἡ εὐθεῖα ΙΘΚ ἂς ἀχθῇ παράλληλος τῆς ΓΖ ἡ κάθετος εἰς τὴν ΓΘ· αἱ γωνίαι ΚΓΖ καὶ ΖΓΒ ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι, αἱ γωνίαι ΓΙΚ καὶ ΓΚΙ εἶναι παρομοίως ἴσαι, καὶ διὰ τοῦτο ἔχομεν ΘΚ=ΘΙ. Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΓΑΖ, ΘΑΚ δίδουν ΓΖ:ΘΚ ἢ ΘΙ::ΑΖ:ΑΘ, καὶ ἐξ αἰτίας τῶν παραλλήλων ΓΖ, ΚΙ, ἔχομεν ΖΓ:ΘΙ::ΑΖ:ΑΘ· λοιπὸν ΑΖ: ΑΘ::ΔΖ:ΔΘ.

Τὸ πόρισμα τοῦτο συνάγεται προσέτι ἐκ τῆς μερικῆς περιγράσεως τῆς ΙΒ' προτάσεως τοῦ παρόντος βιβλίου εἰς τὴν ὁποίαν αἱ δύο δεδομέναι γιγμαὶ ἤθελον συμπέσει μὲ δύο δεδομένας γιγμὰς τῆς περιφερείας προσδιοριζομένης ἐκ τοῦ δεδομένου λόγου· διότι ἐὰν ΑΓ, ΔΓ, ΑΒ, ΔΒ ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι φανερὸν ὅτι ΑΓ:ΑΒ::ΔΓ:ΔΒ· διὰ τοῦτο ἡ γωνία ΒΔΓ διαιρεῖται εἰς δύο ἴσα μέρη ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΔΛ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ'.

Πόρισμα.

Δεδομένης μιᾶς γιγμῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἄλλην γιγμὴν, ὥστε δύο εὐθεῖαι ἀγόμεναι ἐκ ταύτης τῆς γιγμῆς καὶ ἐκ τῆς πρώτης εἰς τὸ ἀπέναντι μέρος τῆς περιφερείας, νὰ χωρίσωσιν ἐπὶ μιᾶς δεδομένης χορδῆς τμήματα τῶν ὁποίων τὰ ὀρθογώνια νὰ ἔχουν μεταξύ των λόγον γαθερόν.

Ας ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ κύκλος ΑΔΒΕ (σχ. 23) ἡ γιγμὴ Α καὶ ἡ χορδὴ ΔΕ εἶναι δεδομένα. Ὑπάρχει μία ἄλλη γιγμὴ Γ τοιαύτη ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΒ ἠγμέναι εἰς ὁποιανδήποτε γιγμὴν Β τῆς περιφερείας, νὰ προσδιορίζωσιν ἐπὶ τῆς ΔΕ τμήματα, τῶν ὁποίων τὰ ὀρθογώνια ΔΗ×ΖΕ καὶ ΔΖ×ΗΕ νὰ ἔχουν μεταξύ των λόγον δεδομένον π. χ. ἐκεῖνον τῆς ΚΜ πρὸς τὴν ΛΜ.

Ανάλυσις.

Ας φερθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΛ, καὶ ἂς ἐβληθῇ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΕΔ εἰς Θ.

Επειδὴ ΚΜ:ΛΜ::ΔΗ×ΖΕ:ΔΖ×ΗΕ· ἕπεται ὅτι ΚΛ:ΛΜ::ΔΗ×ΖΕ—ΔΖ×ΗΕ:ΔΖ×ΗΕ· ἀλλὰ ΔΗ×ΖΕ—ΔΖ×ΗΕ=(ΔΖ+ΖΗ)(ΗΕ+ΖΗ)—ΔΖ×ΗΕ=ΖΗ×ΔΕ· λοιπὸν ΚΛ:ΛΜ::ΖΗ×ΔΕ:ΔΖ×ΗΕ· ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΔΕ μία γιγμὴ Θ

τοιαύτη ὥςε νὰ ἔχωμεν ΚΛ : ΛΜ : : ΔΕ : ΔΘ, τότε ΚΛ : ΛΜ : : ΖΗ × ΔΕ : ΖΗ × ΔΘ, καὶ διὰ τοῦτο ΖΗ × ΔΘ = ΔΖ × ΗΕ· προσθέτοντες εἰς τὰ δύο μέλη ταύτης τῆς ἐξισώσεως τὸ ὀρθογώνιον ΔΖ × ΖΗ συνάγομεν ὅτι ΖΘ × ΖΗ = ΔΖ × ΖΕ = ΑΖ × ΖΒ· λοιπὸν ΖΘ : ΖΒ : : ΑΖ : ΖΗ· ὅθεν ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΖΘ καὶ ΗΖΒ εἶναι ὅμοια, ἑπομένως ἡ γωνία ΑΘΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΖΒΗ· ἀλλ' ἡ γωνία ΑΘΖ εἶναι δεδομένη· διότι αἱ στιγμαὶ Α, Θ καὶ Δ εἶναι δεδομέναι· λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΑΓ εἶναι προσδιωρισμένη· διότι πρέπει νὰ ὑποτείνῃ τμῆμα ἱκανὸν νὰ χωρήσῃ μίαν προσδιωρισμένην γωνίαν ΖΒΗ ἢ ΑΒΓ· οὕτως ἡ θέσις τῆς στιγμῆς Γ εἶναι προσδιωρισμένη.

Σύνθεσις.

Ἂς ἐκβληθῇ ἡ χορδὴ ΕΔ ἕως εἰς τὴν στιγμὴν Θ μίαν ποσότητα τοιαύτην ὥςε ΔΕ : ΔΘ : : ΚΛ : ΛΜ· ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΘΑ, καὶ εἰς μίαν ὁποιανδήποτε στιγμὴν τῆς περιφερείας, ἂς γένῃ ἡ γωνία ΑΒΓ ἴση μὲ τὴν ΑΘΖ· λέγω ὅτι Γ εἶναι ἡ ζητουμένη στιγμή.

Διότι τὰ τρίγωνα ΑΖΘ καὶ ΗΖΒ ὡς ὅμοια, δίδουν ΖΘ : ΖΒ : : ΑΖ : ΖΗ· ὅθεν ΖΘ × ΖΗ = ΖΒ × ΑΖ = ΔΖ × ΖΕ· διὰ τοῦτο ΖΘ × ΖΗ − ΔΖ × ΖΗ = ΔΖ × ΖΕ − ΔΖ × ΖΗ ἢ ΖΗ × ΔΘ = ΔΖ × ΗΕ· ἀλλ' ἐπειδὴ ΚΛ : ΛΜ : : ΔΕ : ΔΘ : : ΖΗ × ΔΕ : ΖΗ × ΔΘ· λοιπὸν ΚΚ : ΛΜ : : ΖΗ × ΔΕ : ΔΖ × ΗΕ· διὰ τοῦτο ΚΜ : ΜΛ : : ΖΗ × ΔΕ + ΔΖ × ΗΕ : ΔΖ × ΗΕ, καὶ ἐξ αἰτίας ὅπου ΖΗ = ΔΗ − ΔΖ, ΔΕ = ΔΗ + ΗΕ, ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΚΛ : ΛΜ : : ΔΗ × ΖΕ : ΔΖ × ΗΕ.

Τὸ πόρισμα τοῦτο συνάγεται ἐκ τοῦ ἀκολούθου προβλήματος· ἐκ δύο δεδομένων στιγμῶν Α καὶ Γ ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας δεδο-

μένου κύκλου, νὰ ἄξωμεν εἰς ταύτην τὴν περιφέρειαν δύο εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΒ, αἵτινες νὰ διαχωρίσωσιν ἐπὶ τῆς χορδῆς ΔΕ τμήματα, τῶν ὁποίων τὰ ὀρθογώνια ΔΗ×ΖΕ καὶ ΔΖ×ΗΕ νὰ ἔχουν μεταξύ των λόγον δεδομένον ·. — Ἐὰν ληφθῇ σιγμή τις Θ ὡς ἀνωτέρω, ἡ ἀνάλυσις τοῦ προβλήματος δεικνύει, ὅτι ἡ γωνία ΑΒΓ πρέπει νὰ ἦναι ἴση μὲ τὴν ΑΘΖ· ἐὰν λοιπὸν ἐπὶ τῆς ΑΓ γραφθῇ ἓν τμῆμα ἱκανὸν νὰ χωρήσῃ ταύτην τὴν γωνίαν, ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ τοιούτου τμήματος μὲ τὸν δεδομένον κύκλον θέλει προσδιορίσει τὴν θέσιν τῆς Β· ἀλλ' εἶναι φανερὸν ὅτι ἐὰν ἡ σιγμὴ Γ εὑρεθῇ καὶ αὐτὴ ἐπὶ τῆς περιφερείας, οἱ δύο κύκλοι ταυτίζονται, καὶ τὸ πρόβλημα γίνεται δεκτικὸν ἀπείρου ἀριθμοῦ λύσεων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ'.

Πόρισμα.

Ἐὰν ἐκ δύο δεδομένων σιγμῶν φέρωμεν εἰς μίαν τῶν δύο δεδομένων γραμμῶν, δύο εὐθείας αἵτινες νὰ τέμνουν τὴν ἄλλην γραμμὴν εἰς δύο σιγμὰς, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν εἰς ταύτην τὴν διυτέραν γραμμὴν δύο σταθερὰς σιγμὰς τοιαύτας, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἀποσημάτων των ἀπὸ τὰς σιγμὰς τῶν διαχωρίσεων, νὰ ἦναι ἴσον μὲ δεδομένον ὀρθογώνιον, τῷ ὁποῖον μένει πάντοτε τὸ αὐτὸ ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ἦναι ἡ διεύθυνσις τῶν δύο διατεμνουσῶν εὐθειῶν.

Ας ὑποθέσωμεν ὅτι ἐκ τῶν δεδομένων σιγμῶν Δ καὶ Ε (σχ. 24) ἄγομεν δύο εὐθείας ΔΖ καὶ ΕΖ, εἰς μίαν σιγμὴν Ζ τῆς δεδομένης εὐθείας ΑΓ· αὐταὶ θέλουν προσδιορίσει ἐπὶ τῆς δευτέρας δεδομένης εὐθείας ΑΒ δύο σιγμὰς Θ καὶ Η, τῶν ὁποίων ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ἦναι ἡ θέσις, ὑπάρχουν ἐπὶ τῆς ΑΒ δύο ἄλλαι σταθεραὶ

σιγμαὶ Ι καὶ Κ τοιαῦται, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον. ΙΘ×ΗΚ καὶ ἶναι σαθερῶς ἴσον μὲ δεδομένον ὀρθογώνιον.

Ανάλυσις.

Ας ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΕΙ, ΕΑ, ΔΑ, ΔΚ· ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΔΕ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ ΑΓ εἰς Π· ἐπειδὴ αἱ σιγμαὶ Α, Ζ, Π ἀγήκουν εἰς τὴν εὐθεῖαν ΑΓ· ἕπεται ἐκ τῆς ὑποθέσεως ὅτι τὰ ὀρθογώνια ΙΑ×ΑΚ, ΙΘ×ΗΚ, ΙΝ×ΝΚ εἶναι ἴσα μεταξύ των· λοιπὸν ΙΘ:ΙΑ::ΑΚ:ΗΚ· ὅθεν ΑΘ:ΙΑ::ΑΗ:ΗΚ ἢ ΑΘ:ΑΗ::ΑΙ:ΗΚ· ἐκ τῆς Ε ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΕΜ παράλληλος τῆς ΑΒ συναπαντῶσα τὰς εὐθείας ΑΓ καὶ ΖΔ ἐκβαλλομένας· τότε εἶναι φανερὸν ὅτι ΑΕ:ΑΜ::ΑΘ:ΑΗ::ΙΑ:ΗΚ. Περιπλέον, ἐπειδὴ ΙΑ×ΑΚ=ΙΝ×ΝΚ διὰ τοῦτο ΙΝ:ΙΑ::ΑΚ:ΝΚ, ἑπομένως ΑΝ:ΙΑ::ΑΝ:ΝΚ· διὰ τοῦτο ΙΑ=ΝΚ· μετὰ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἔχομεν ΑΕ:ΑΜ::ΝΚ:ΗΚ, καὶ ΑΕ·ΕΜ::ΝΚ:ΗΝ, ἢ ΑΕ:ΝΚ::ΕΜ:ΗΝ τοῦτ' ἔστιν::ΕΔ:ΔΝ· οὕτως τὰ τρίγωνα· ΑΔΕ καὶ ΚΝΔ εἶναι ὅμοια, ἑπομένως ἡ ΑΔΚ εἶναι μία εὐθεῖα· ἂς φερθῇ ἡ ΔΟ· ἐπειδὴ ΙΑ=ΝΚ, ἕπεται ὅτι ΑΕ:ΙΑ::ΑΕ:ΝΚ, ἢ::ΕΟ:ΟΙ::ΕΔ:ΔΝ· διὰ τοῦτο ΔΟ εἶναι παράλληλος τῆς ΑΒ· ἐπειδὴ δὲ αἱ παράλληλοι ΟΔ καὶ ΑΜ εἶναι δεδομένης θέσεως, συνάγομεν ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅτι αἱ σιγμαὶ Ο καὶ Α, καὶ διὰ τοῦτο αἱ σιγμαὶ Ι καὶ Κ, εἶναι προσδιωρισμέναι. Οθεν βλέπομεν ὅτι τὸ αὐτὸ ὑπάρχει καὶ διὰ τὸ ὀρθογώνιον ΙΑ×ΑΚ.

Σύνθεσις.

Ας ἀχθῶσιν αἱ ΟΔ, ΕΑ παράλληλοι τῆς ΑΒ αἵτινες συναπαντῶσιν εἰς Ο καὶ Α τὴν προεκβολὴν τῆς ΑΓ· ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΕΟ, ΑΔ καὶ ἂς ἐκβληθῶσιν ἕως οὗ νὰ συναπαντήσωσιν τὴν ΑΒ ἡ μὲν

εἰς τὸ Ι, ἡ δὲ εἰς τὸ Κ: αἱ τελευταῖαι αὗται σιγμαὶ εἶναι αἱ ζητούμεναι· διότι, ἐὰν φέρωμεν τὰς ΔΖ, ΕΖ φανερὸν εἶναι ὅτι ἔχομεν ΛΕ:ΙΑ::ΟΕ:ΟΙ::ΕΔ: ΔΝ:ΔΜ:ΔΗ::ΑΜ:ΗΚ· ὅθεν ΛΕ:ΑΜ::ΙΑ:ΗΚ· ἀλλ' ἀπὸ ἄλλο μέρος ΛΕ:ΑΜ::ΑΘ:ΑΗ· λοιπὸν ΙΑ:ΙΘ::ΗΚ:ΑΚ· διὰ τοῦτο ΙΑ×ΑΚ=ΙΘ×ΗΚ.

Τὸ πόρισμα τοῦτο συνάγεται ἐκ τοῦ ἀκολούθου προβλήματος· «Δεδομένων δύο εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ γνωστῆς θέσεως, καθὼς καὶ τῶν σιγμῶν Ι, Κ, Ε καὶ Δ νὰ εὕρωμεν μίαν ἄλλην σιγμὴν Ζ τοιαύτην, ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΕΖ, ΔΖ ἀγόμεναι ἐκ ταύτης τῆς σιγμῆς εἰς τὰς δεδομένας Δ καὶ Ε νὰ διαχωρίσωσιν ἐπὶ τῆς ΑΒ δύο τμήματα μετρούμενα ἐκ τῶν δεδομένων σιγμῶν Ι καὶ Κ, τῶν ὁποίων τὸ ὀρθογώνιον νὰ ἰσοδυναμῇ μὲ δεδομένον ἐμβαδὸν». Φανερὸν εἶναι ὅτι ὅταν αἱ σιγμαὶ Ι καὶ Κ λάβωσι τὴν θέσιν τὴν ὁποίαν ἀνωτέρω ἐσημειώσαμεν, τὸ πρόβλημα γίνεται ἀπροσδιόριστον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ'.

Πόρισμα.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι μὴ παράλληλοι ὦσι δεδομένης θέσεως, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν μίαν τετάρτην ὥστε ἐὰν διὰ τῶν τεσσάρων εὐθειῶν περάσωμεν παραλλήλους μιᾶς πέμπτης δεδομένης εὐθείας, αἱ παράλληλοι αὗται νὰ διαιροῦν τὰς τέσσαρας πρώτας εὐθείας εἰς μέρη ἀνάλογα, τῶν ὁποίων οἱ λόγοι νὰ ὦσι σταθεροί.

Ἔστωσαν (σχ. 25) ΑΒ, ΓΔ καὶ ΑΕ αἱ τρεῖς πρῶται δεδομέναι εὐθεῖαι· δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν μίαν τετάρτην ΖΗ ὥστε κάθε παράλληλος ἄλλης τινὸς δεδομένης εὐθείας ΘΙΚΛ ἥτις περᾷ διὰ τῶν τεσσάρων εὐθειῶν ΑΓ, ΓΔ, ΑΕ, ΖΗ, νὰ διαιρῆται εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν εὐθειῶν ΘΙ, ΙΚ, ΚΛ τῶν ὁποίων οἱ λόγοι εἶναι γνωστοί.

Αναλυσις.

Ας εκβληθῶσιν αἱ ΑΕ, ΖΗ ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς Μ· ἐκ τῶν σημείων Κ καὶ Ι ἂς ἀχθῶσιν ἀμοιβαίως παράλληλοι τῆς ΑΒ καὶ ΖΗ· ἐκ τῆς σημείας τῆς συμπτώσεως των Ο ἂς φερθῇ ἡ ΓΟ· ἔστω Θ΄Ι΄Κ΄Λ΄ μία ἄλλη διαπερῶσα εὐθεῖα, ἥτις νὰ διαιρῆται ὡς ἡ πρώτη ἀπὸ τὰς τέσσαρας εὐθείας· ἂς φερθῇ παρομοίως ἡ Π΄Ο΄Ι΄ παράλληλος τῆς ΠΟΙ συναπαντῶσα τὴν ΓΟ εἰς Ο΄. Τέλος πάντων ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ Ο΄Κ΄ καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἕως εἰς τὴν Ν.

Επειδὴ ἡ ΟΚ εἶναι παράλληλος τῆς ΙΠΘ, ἔχομεν ΘΙ : ΙΚ : : ΠΙ : ΙΟ· περιπλέον ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι ΠΟ καὶ Π΄Ο΄ τέμνονται ἀπὸ τὰς εὐθείας ΓΠ, ΓΙ καὶ ΓΟ, ἕπεται ὅτι ΠΙ : ΙΟ : : Π΄Ι΄ : Ι΄Ο΄· λοιπὸν Θ΄Ι΄ : Ι΄Κ΄ : : Π΄Ι΄ : Ι΄Ο΄· ὅθεν ἕπεται ὅτι ἡ Ο΄Ν΄ εἶναι παράλληλος τῆς ΟΝ. Τώρα ἐπειδὴ ΙΚ : ΚΛ : : ΟΚ : ΚΝ καὶ Ι΄Κ΄ : Κ΄Λ΄ : : Ο΄Κ΄ : Κ΄Ν΄· λοιπὸν ΟΚ : ΚΝ : : Ο΄Κ΄ : Κ΄Ν΄. τοῦτο φανερόνει ὅτι αἱ γραμμαὶ ΑΕ, ΟΓ καὶ ΖΗ συντρέχουσιν εἰς τὴν αὐτὴν σημὴν Μ· περιπλέον ΓΑ : ΑΖ : : ΟΚ : ΚΝ : : ΙΚ : ΚΛ, καὶ ἐπειδὴ ὁ λόγος τῆς ΓΑ πρὸς τὴν ΑΖ εἶναι δεδομένος, φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ ΑΖ καὶ ἡ σημὴ Ζ εἶναι γνωσὰ ἀλλ' ἡ σημὴ Λ εἶναι δεδομένη· λοιπὸν ΖΛΗ εἶναι προσδιωρισμένης θέσεως.

Σύνθεσις.

Ας ληφθῇ ἡ σημὴ Ζ εἰς τρόπον ὥστε ἡ ΓΑ νὰ ἔχῃ πρὸς τὴν ΑΖ λόγον ἴσον μὲ ἐκεῖνον τῆς ΙΚ πρὸς ΚΛ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΖ· αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη γραμμή.—Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τοῦτο, ἂς ἄξωμεν τὰς ΝΚ καὶ ΠΙ παραλλήλους τὴν μὲν τῆς ΑΒ, τὴν δὲ τῆς ΖΗ· ἐκ τῆς σημῆς τῆς συναπαντήσεως των Ο ἂς φέρωμεν τὴν ΓΟ· ἐπὶ ταύτης ἂς λάβωμεν σημὴν

τινὰ Θ' ὁποιανδήποτε, καὶ ἄς ἄξωμεν παρομοίως τὰς Θ'Κ'Ν', Θ'Ι'Π' αἵτινες συναπαντῶσι τὴν ΑΕ καὶ ΓΔ εἰς Κ' καὶ Ι'. Η διαπερῶσα εὐθεῖα Θ'Ι'Κ'Λ' διαιρεῖται κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ὡς ἡ ΘΙΚΛ.

Διότι, ἐπειδὴ ΝΟ, Ν'Ο' εἶναι παράλληλοι τῆς ΑΒ, καὶ ΟΠ, Ο'Π' τῆς ΖΗ ἕπεται ὅτι ΙΘ : ΙΚ :: ΠΙ : ΟΙ :: Π'Ι' : Ι'Ο' :: Θ'Ι' : Ι'Κ'· περιπλέον ἐπειδὴ ΓΑ : ΑΖ :: ΙΚ : ΑΚ :: ΟΚ : ΚΝ· βλέπομεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΟΓ, ΕΑ, ΗΖ συντρέχουσιν εἰς τὴν αὐτὴν στιγμὴν Μ, ἑπομένως συνάγομεν ΙΚ : ΚΛ :: ΟΚ : ΚΝ :: Θ'Κ' : Κ'Ν' :: Ι'Κ' : Κ'Λ'.

Τὸ πόρισμα τοῦτο συνάγεται ἐκ τῆς ἀπροσδιοριστίας τοῦ ἀκολούθου περιφήμου προβλήματος· Δεδομένων τεσσάρων εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ, ΑΕ, ΖΗ (σχ. 25 δὶς πίν. 10), νὰ φέρωμεν μίαν εὐθεῖαν ἥτις διαπερῶσα διὰ τῶν εὐθειῶν τούτων, νὰ τέμνεται ἀπὸ τὰς ἰδίας εἰς τμήματα ἀνάλογα τῶν δεδομένων εὐθειῶν Χ, Ψ, Ω. Ας ὑποθέσωμεν τὸ πρόβλημα λυμένον· ἄς ἐκβάλλωμεν τὰς ΗΖ, ΕΑ ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς τὴν Μ· ἄς ἄξωμεν τὰς παραλλήλους ΝΚΟ καὶ ΠΗΟ, καὶ ἄς φέρωμεν τὴν ΜΤΟ.

Ἐπειδὴ ΤΑ : ΑΖ :: ΟΚ : ΚΝ :: ΙΚ : ΚΛ· ὁ λόγος τῆς ΤΑ πρὸς τὴν ΑΖ εἶναι δεδομένος, καὶ διὰ τοῦτο ἡ στιγμὴ Τ καὶ ἡ εὐθεῖα ΜΟ εἶναι προσδιωρισμένης θέσεως. Περιπλέον ΠΙ : ΙΟ :: ΘΙ : ΙΚ· λοιπὸν ὁ λόγος τῆς ΠΙ πρὸς ΙΟ εἶναι παρομοίως δεδομένος· ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΓΠΙ ἐπειδὴ προφανῶς εἶναι προσδιωρισμένου εἴδους, ὁ λόγος τῆς ΓΙ πρὸς τὴν ΠΙ εἶναι προσδιωρισμένος· οὕτως ὁ λόγος τῆς ΓΠ πρὸς ΠΟ εἶναι δεδομένος, καὶ τὸ τρίγωνον ΓΠΟ εἶναι γνωστοῦ εἴδους· αἱ εὐθεῖαι ΜΟ καὶ ΓΟ ἐπειδὴ εἶναι γνωστῆς θέσεως, ἡ στιγμὴ Ο τῆς συμπτώσεώς των εἶναι προσδιωρισμένη, καὶ διὰ τοῦτο αἱ παράλληλοι ΝΟ καὶ ΠΟ εἶναι γνωστῆς θέσεως·

ἕπεται ὅτι αἱ στιγμαὶ τῶν συναπαντήσεών των εἰς Κ καὶ Ι, καθὼς καὶ ἡ διαπερῶσα εὐθεῖα ΘΙΚΛ εἶναι παρομοίως γνωστά.

Η κατασκευὴ τοῦ προβλήματος εὐκόλως συνάγεται ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλύσεως· διότι, ἐκβαλλομένων τῶν ΕΑ, ΗΖ ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς τὴν στιγμὴν Μ ἂς γένῃ ΖΑ : ΑΤ : : Ω : Ψ· ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΜΤΟ· ἂς ληφθῇ μετὰ ταῦτα στιγμή τις Κ ἐπὶ τῆς ΓΒ· ἂς ἀχθῇ ἡ ΚΣ παράλληλος τῆς ΖΗ, καὶ ἂς γένῃ ΚΣ : ΡΣ : : Χ : Ψ· ἔπειτα ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΣ καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΜΟ εἰς τὴν Ο ἂς φερθῶσι τέλος πάντων αἱ ΟΙ, ΚΟ ἀμοιβαίως παράλληλοι τῶν ΖΗ καὶ ΑΒ. Η εὐθεῖα ΘΙΚΛ ἥτις ἀπέρχεται ἐκ τῶν στιγμῶν τῶν τομῶν Ι καὶ Κ, εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα· διότι ΘΙ : ΙΚ : : ΠΙ : ΙΟ : : ΚΡ : ΡΣ : : Χ : Ψ, καὶ ΙΚ : ΚΛ : : ΟΚ : ΚΝ : : ΤΑ : ΑΖ : Ψ : Ω.

Τώρα ἐὰν ὁ λόγος τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΑΖ γένῃ ἴσος μὲ ἐκεῖνον τῆς Ψ πρὸς τὴν Ω, ἡ στιγμὴ Τ συμπίπτει μὲ τὴν Γ, καὶ ἡ ΤΟ μὲ τὴν ΓΟ.

Τὸ πρόβλημα εἰς ταύτην τὴν περίστασιν εἶναι ἀπροσδιόριστον: δηλαδὴ κάθε στιγμὴ λαμβανομένη ἐπὶ τῆς ΓΟ ἔχει τὴν ἰδιότητα, ἥτις πρότερον εἰς μόνη τὴν στιγμὴν Ο ὑπῆρχε.

Περὶ τῶν ἰσοπεριμέτρων.

Ορισμός.

Καλοῦνται ἰσοπερίμετρα σχήματα, ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας τὰς περιμέτρους δηλαδὴ τὴν ἰδίαν γραμμικὴν ἔκτασιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΣ'.

Πρόβλημα.

Επὶ μιᾶς δεδομένης εὐθείας νὰ εὕρωμεν στιγμὴν τοιαύτην, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστημάτων της ἀπὸ