ΝΚ + ΑΒ × ΝΟ ἢ μὲ ΑΒ × ΠΚ + ΑΒ × ΟΠ, εὑρίσκομεν ἐξ αἰτίας τῆς ΜΟ = ΜΝ + ΝΟ, ΑΒ × ΜΝ + ΑΓ × ΝΟ = ΑΔ × ΟΠ + ΑΕ × ΠΚ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. ιΑ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν δεδομένης θέσεως εὐθεῖαν τέμνωσιν ἄλλαι δύο ὑπὸ κλίσιν δεδομένην, καὶ εἰς τρόπον ὥςε νὰ διαχωρίζωσιν ἐπ' αὐτῆς τμήματα μετρούμενα ἐκ δύο ςαθερῶν σιγμῶν, καὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἶναι ςαθερὸς· ἡ σιγμὴ τῆς ἑνώσεως τῶν κινητῶν εὐθειῶν θέλει ἔχει διὰ τόπον προσδιορισμένην εὐθεῖαν.

Ἂς φερθῶσιν λοιπὸν αἱ ΑΒ καὶ ΑΓ (σχ. 11. πί. 7) εἰς τρόπον ὥςε αἱ γωνίαι ΑΒΖ καὶ ΑΓΖ, καὶ ὁ λόγος τῶν τμημάτων ΕΔ, ΓΕ μετρουμένων ἐκ τῶν ςαθερῶν σιγμῶν Δ καὶ Ε νὰ ἦναι ςαθερὰ· λέγω ὅτι ὁ τόπος τῆς Α θέλει εἶναι προσδιορισμένη εὐθεῖα.

Ανάλυσις.

Ἂς ληφθῇ ἡ σιγμὴ Ζ εἰς τρόπον ὥςε ΖΔ νὰ νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὴν ΖΕ ἴσον μὲ τὸν δεδομένον· ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΖΑ. Επειδὴ ΖΔ : ΖΕ :: ΔΒ : ΕΓ· ἕπεται ὅτι ΖΔ : ΖΕ :: ΖΒ : ΖΓ· διὰ τοῦτο ὁ λόγος τῆς ΖΒ πρὸς ΖΓ καὶ ὁ τῆς ΖΒ πρὸς ΒΓ εἶναι προσδιωρισμένοι· ἀλλ' αἱ γωνίαι ΖΒΑ καὶ ΖΓΑ εἶναι δεδομέναι· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΑΓ εἶναι δεδομένου εἴδους· ὁ λόγος λοιπὸν τῆς ΑΒ πρὸς ΑΓ εἶναι δεδομένος· ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ αὐτὸ ὑπάρχει καὶ διὰ τὸν λόγον τῆς ΖΒ πρὸς ΑΒ· ἀπὸ ἐοῦ πάλιν ἀκολουθεῖ ὅτι τὸ τρίγωνον ΖΒΑ εἶναι προσδιωρισμένου εἴδους, ἢ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΑ εἶναι προσδιωρισμένης θέσεως.

Σύνθεσις.

Αφ' οὗ ληφθῇ ἡ σιγμὴ Ζ εἰς τρόπον ὥστε ΖΔ νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὴν ΖΕ ἴσον μὲ τὸν δεδομένον· ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΔΗ καὶ ΕΗ ποιοῦσαι μὲ τὴν ΖΙ γωνίας ἀμοιβαίως ἴσας μὲ τὰς δεδομένας· ἂς ἑνωθῇ ἡ σιγμὴ τῆς συναπαντήσεώς των Η μὲ τὴν Ζ: λέγω ὅτι ἡ ΖΗΘ εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.

Διὰ νὰ τὸ ἀποδείξωμεν, ἂς ἄξωμεν ἐκ μιᾶς σιγμῆς Α τῆς ΖΘ τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ ἀμοιβαίως παραλλήλους τῶν ΔΗ καὶ ΗΕ, αἱ ὁποῖαι διὰ τοῦτο ποιοῦσι γωνίας μὲ τὴν ΖΙ ἴσας μὲ τὰς δεδομένας. Ἐκ τῆς κατασκευῆς ταύτης ἕπεται ὅτι ΖΗ : ΖΑ :: ΖΔ : ΖΒ :: ΖΕ : ΖΓ, ἢ ΖΔ : ΖΕ :: ΖΒ : ΖΓ· διὰ τοῦτο ΔΒ : ΕΓ :: ΖΔ : ΖΕ δηλαδὴ εἰς τὸν δεδομένον λόγον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΒ'.

Ἐὰν ἐκ δύο δεδομένων σιγμῶν ἄξωμεν δύο γραμμὰς τῶν ὁποίων τὰ μήκη νὰ ἔχουν σαθερὸν λόγον, ἡ σιγμὴ τῆς συναπαντήσεών των θέλει ἔχει διὰ τόπον μίαν εὐθεῖαν ἢ περιφέρειαν κύκλου προσδιωρισμένου.

Ἔσωσαν αἱ ΑΓ καὶ ΒΓ ἠγμέναι ἐκ τῶν σιγμῶν Α καὶ Β (σχ. 12 καὶ 12 δὶς) ἔχουσαι μεταξύ των λόγον προσδιωρισμένον. Ο τόπος τῆς σιγμῆς τῆς συναπαντήσεως Γ εἶναι μία εὐθεῖα ἢ περιφέρεια κύκλου προσδιωρισμένου.

Πρώτη περίσασις. Οταν ὁ δεδομένος λόγος ἦναι ὁ τῆς ἰσότητος, ὁ τόπος τῆς Γ εἶναι εὐθεῖα.

Ανάλυσις.

Ας ληφθῇ ἡ σιγμὴ Ε τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΓ. Τὰ τρίγωνα ΑΓΕ καὶ ΒΓΕ ἔχοντα τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας ἑκάστην μὲ ἑκάστην, εἶναι

ἴσα. Τοῦτο δεικνύει ὅτι ἡ γωνία ΑΕΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΒΕΓ, τοῦτ' ἔςιν ἡ ΕΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, καὶ διὰ τοῦτο προσδιωρισμένης θέσεως.

Σύνθεσις.

Η ὑψουμένη κάθετος ΕΓ εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος· διότι ἄγοντες ἐκ μιᾶς ςιγμῆς Γ ταύτης τῆς εὐθείας δύο ἄλλας γραμμὰς εἰς τὰς ςιγμὰς Α καὶ Β εὐκόλως γιωρίζομεν ὅτι εἶναι ἴσαι.

Δευτέρα περίςασις. Οταν ὁ δεδομένος λόγος δὲν ἦναι ἴσος μὲ τὴν μονάδα ὁ τόπος τῆς Γ εἶναι περιφέρεια κύκλου (σχ. 12 δὶς).

Ανάλυσις.

Ας ἀχθῇ ἡ ΓΔ ποιοῦσα μὲ τὴν ΒΓ γωνίαν ἴσην μὲ τὴν ΒΑΓ, καὶ συναπαντῶσα τὴν ΑΒ ἐκβαλλομένην εἰς τὸ Δ. Τὰ τρίγωνα ΔΑΓ καὶ ΔΓΒ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν γωνίαν εἰς Δ κοινὴν, καὶ τὰς γωνίας εἰς Α καὶ Γ ἴσας εἶναι ὅμοια: λοιπὸν ΑΔ : ΑΓ :: ΔΓ : ΒΓ, ἢ ΑΔ : ΔΓ :: ΑΓ : ΒΓ τοῦτ' ἔςιν εἰς τὸν δεδομένον λόγον· ἀλλὰ ΑΔ : ΔΓ :: ΔΓ : ΒΔ· λοιπὸν ἡ ΑΔ ἔχει πρὸς τὴν ΒΔ λόγον διπλασίονα τοῦ λόγου τῆς ΑΔ πρὸς ΔΓ ἢ :: $\overset{2}{\text{ΑΔ}}$: $\overset{2}{\text{ΔΓ}}$· ὁ τελευταῖος οὗτος λόγος ἐπειδὴ εἶναι δεδομένος καὶ ὁ ἄλλος παρομοίως εἶναι δεδομένος· διὰ τοῦτο ΒΔ καὶ ἡ ςιγμὴ Δ εἶναι προσδιωρισμένα· ὅθεν ἕπεται ὅτι ἡ ΔΓ εἶναι καὶ αὐτὴ προσδιωρισμένη καὶ ςαθερά. Τοῦτο φανερόνει ὅτι ἡ ςιγμὴ Γ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ γραμμένου κύκλου ἐκ τοῦ Δ ὡς κέντρου μὲ τὴν ἀκτῖνα ΔΓ.

Σύνθεσις.

Ας διαιρεθῇ ἡ ΑΒ κατὰ τὸν δεδομένον λόγον εἰς τὴν ςιγμὴν Ε, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ Δ εἰς τρόπον ὥςε ΕΔ

νὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὴν ΒΔ. Ο γραφόμενος κύκλος ἐκ τῆς Δ ὡς κέντρου μὲ τὴν ΔΕ ἀκτῖνα εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.

Τῷ ὄντι ἐπειδὴ ΑΕ : ΒΕ :: ΕΔ : ΒΔ· ἔχομεν ΑΔ : ΕΔ ἢ ΔΓ :: ΕΔ ἢ ΔΓ : ΒΔ· διὰ τοῦτο τὰ τρίγωνα ΔΑΓ καὶ ΔΓΒ ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν κοινὴν μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων, εἶναι ὅμοια, καὶ διὰ τοῦτο ΑΓ : ΒΓ :: ΑΔ : ΔΓ ἢ ΕΔ, τοῦτ' ἔστιν εἰς τὸν δεδομένον λόγον.

Σχόλιον. Επειδὴ εἰς τὴν δευτέραν περίστασιν ΑΓ : ΒΓ :: ΑΔ : ΕΔ, βλέπομεν ὅτι ὅσον ὁ λόγος τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ πλησιάζει εἰς τὴν μονάδα, τόσον τὸ κέντρον Δ ἀπομακρύνεται τῶν σημείων Α καὶ Ε, καὶ ἡ σημὴ Ε κλίνει εἰς τὸ νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν σημὴν τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ· εἰς τὸ ὅριον, τοῦτ' ἔστι ὅταν $\frac{ΑΓ}{ΒΓ}$ γένῃ ἴσον μὲ τὴν μονάδα, τὸ τόξον ΕΓ συμπίπτει μὲ τὴν ἐφαπτομένην του, ἥτις θέλει γένῃ τότε μία εὐθεῖα κάθετος ἐντῷ μέσῳ τῆς ΑΒ· ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ἡ πρώτη περίστασις δύναται νὰ συναχθῇ ἐκ τῆς δευτέρας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. ΙΓ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν εἰς κινουμένην σημὴν ὑπάρχῃ ἡ συνθήκη, ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ ἀποστήματός της ἀπὸ δεδομένην σαθερὰν σημὴν νὰ ἰσοδυναμῇ μὲ τὸ ὀρθογώνιον τοῦ ἀποστήματός της ἀπὸ δεδομένην καὶ σαθερὰν εὐθεῖαν ἐπὶ μίαν ἄλλην δεδομένην εὐθεῖαν· ὁ τόπος τῆς σημῆς ταύτης θέλει εἶναι περιφέρεια κύκλου προσδιωρισμένου.

Η θέσις τῆς σημῆς Α καὶ τῆς εὐθείας ΓΔ (σχ. 23 πίν. 8) εἶναι προσδιωρισμένη, καὶ ὑποτίθεται ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΒΑ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀρθογώνιον τῆς καθέτου ΒΓ καὶ τῆς εὐθείας Κ. Πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ὁ τόπος τῆς Β εἶναι περιφέρεια κύκλου προσδιωρισμένου.

Ανάλυσις.

Ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΖΑ παράλληλος τῆς ΓΒ· ἂς γένῃ ἡ ΑΟ=½Κ· ἂς ληφθῇ ἡ σιγμὴ Η τῆς ἡμισείας τῆς ΑΟ· ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΟ, καὶ ἂς φερθῇ ἡ κάθετος ΒΖ.

Επειδὴ ἡ Η εἶναι ἡ σιγμὴ τῆς ἡμισείας τῆς ΟΑ· διὰ τοῦτο $\overline{OB}^2-\overline{AB}^2$ ἢ $\overline{AB'}^2-\overline{OB'}^2=2AO\times HZ=K.HZ$· ἀλλὰ $\overline{AB}^2=K.B\Gamma=K\times\Delta Z$· λοιπὸν $\overline{OB}^2=K.\Delta H$. Επειδὴ δὲ ΔΗ εἶναι δεδομένη, ἡ ΟΒ εἶναι προσδιωρισμένη, καὶ προσδιωρισμένου ἑνὸς τῶν ἄκρων Ο ταύτης τῆς εὐθείας τὸ ἄλλο πρέπει νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας ΒΒ'Θ.

Σύνθεσις.

Αφ' οὗ φερθῇ ἡ ΔΑ παράλληλος τῆς ΓΒ, ἂς γένῃ ἡ ΑΟ=½Κ, καὶ ΑΗ=½ΑΟ, ΟΘ=$\sqrt{K.\Delta H}$· λέγω ὅτι ὁ γραφόμενος κύκλος ἐκ τοῦ κέντρου Ο μὲ τὴν ἀκτῖνα ΟΘ εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.

Επειδὴ $\overline{OB}^2-\overline{AB}^2$ ἢ $\overline{AB'}^2-\overline{OB'}^2=2AO\times HZ=K.HZ$, καὶ ἐκ τῆς κατασκευῆς, $\overline{O\Theta}^2$ ἢ $\overline{OB}^2=K.\Delta H$· ἕπεται ὅτι $\overline{AB}^2=K\times\Delta Z=K\times B\Gamma$.

Πόρισμα. Εὰν ἡ δεδομένη σιγμὴ Α ἤθελεν εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ΔΓ τοῦτ' ἔστιν ἤθελεν συμπέσῃ μὲ τὴν Δ, τότε ΔΗ=½Κ καὶ ΟΘ=½Κ, δηλαδὴ ὁ κύκλος ἤθελε διέρχεται ἐκ τῆς Δ· εἰς τὴν περίστασιν ταύτην ΑΒ ἤθελεν εἶναι μία χορδὴ, καὶ τὸ τετράγωνόν της ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ τμήματος ΔΖ καὶ τῆς διαμέτρου Κ· τοῦτο εἰς ἡμᾶς ἦτον ἤδη γνωστὸν

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Θεώρημα.

Εὰν ἐκ δύο δεδομένων σιγμῶν ἀχθῶσιν δύο εὐθεῖαι, αἵτινες νὰ τέμνωνται καὶ νὰ ἦναι τοιαῦται ὥστε

ἡ διαφορὰ τοῦ τετραγώνου τῆς μιᾶς καὶ ἑνὸς δεδομένου ἐμβαδοῦ νὰ ἔχῃ σαθερὸν λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης· λέγω ὅτι ὁ τόπος τῆς σιγμῆς τῆς συμπτώσεώς των, θέλει εἶναι περιφέρεια κύκλου προσδιωρισμένου.

Εσωσαν ΑΓ καὶ ΒΓ (σχ. 14) αἱ δύο κινηταὶ εὐθεῖαι, καὶ ἂς ὑποτεθῇ ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ×ΑΔ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ δεδομένον ἐμβαδόν. Τότε, ἐὰν ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΓ καὶ τούτου τοῦ ὀρθογωνίου ἔχῃ λόγον προσδιωρισμένον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ· ὁ τόπος τῆς σιγμῆς Γ θέλει εἶναι προσδιωρισμένη περιφέρεια.

Ανάλυσις.

Ας ληφθῇ ἡ σιγμὴ Ε ὥσε ΑΕ νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὴν ΒΕ ἴσον μὲ τὸν δεδομένον· ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΓΕ καὶ ΒΔ· ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΓΒ ἕως οὗ νὰ συναντήσῃ τὴν περιφέρειαν τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΒ, καὶ ἂς φερθῇ ἡ ΑΖ.

Επειδὴ τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ×ΓΔ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΖΓ×ΒΓ, ἕπεται ὅτι ΖΓ×ΒΓ λόγον ἔχει πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ, ἡ ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΒΓ τὸν ὁποῖον ἡ ΑΕ πρὸς ΒΕ· διὰ τοῦτο ΑΖ εἶναι παράλληλος τῆς ΓΕ, καὶ ἡ γωνία ΕΓΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΖΒ δηλαδὴ μὲ τὴν ΒΔΓ. Διὰ τῶν σιγμῶν Γ, Δ, Β ἂς διελθῇ κύκλος, ὅστις τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὴν Η, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΓΗ καὶ ΔΗ. Τότε τὸ ὀρθογώνιον ΒΑ×ΑΗ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΓΑ×ΑΔ ἢ μὲ τὸ δεδομένον ἐμβαδόν· ὅθεν ἕπεται ὅτι ἡ σιγμὴ Η εἶναι προσδιωρισμένη, καθὼς καὶ ἡ ΑΗ. Βλέπομεν παρομοίως ὅτι ἡ γωνία ΓΔΒ ἢ ΕΓΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΗΒ· διὰ τοῦτο τὰ τρίγωνα ΒΕΓ καὶ ΓΕΗ εἶναι ὅμοια, ἑπομένως ΗΕ:ΓΕ::ΓΕ:ΒΕ· ὅθεν $\overline{ΓΕ}^2$ = ΗΕ×ΒΕ. Τὸ

ἐξαγόμενον τοῦτο φανερόνει ὅτι ἡ ΓΕ εἶναι προσδιωσμένη γραμμὴ, καὶ διὰ τοῦτο ὁ τόπος τῆς Γ εἶναι κύκλος τοῦ ὁποίου Ε εἶναι τὸ κέντρον.

Σύνθεσις.

Ας γένῃ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ×ΑΗ ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον ἐμβαδὸν, καὶ $\frac{AE}{BE}$ ἴσος μὲ τὸν δεδομένον λόγον· ἂς ληφθῇ μία μέση ἀνάλογος ΕΘ μεταξὺ τῆς ΗΕ καὶ ΒΕ. Ο γραφόμενος κύκλος ἐκ τοῦ κέντρου Ε μὲ τὴν ἀκτῖνα ΕΘ εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τοῦτο, διὰ τῶν σημείων Α, Δ, Γ καὶ Γ, Β, Η ἂς διέλθωσι κύκλοι, καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΒΓ ἕως εἰς τὴν Ζ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΖ, ΓΗ, ΔΗ. Ἐπειδὴ ΗΕ×ΒΕ=$\overline{ΘΕ}^2$, καὶ ΗΕ:ΘΕ ἢ ΓΕ::ΘΕ ἢ ΓΕ:ΒΕ· διὰ τοῦτο τὰ τρίγωνα ΗΕΓ καὶ ΓΕΒ εἶναι ὅμοια, ἑπομένως αἱ γωνίαι ΕΗΓ καὶ ΕΓΒ εἶναι ἴσαι· ἀλλὰ ΕΗΓ=ΓΔΒ=ΑΖΒ· λοιπὸν ΕΓΒ=ΑΖΒ, ἀκολούθως αἱ γραμμαὶ ΓΕ καὶ ΑΖ εἶναι παράλληλοι· διὰ τοῦτο ΑΕ:ΒΕ::ΖΓ:ΒΓ::ΖΓ×ΒΓ ἢ ΑΓ×ΓΔ, ἢ ΑΓ(ΑΓ—ΑΔ):$\overline{ΒΓ}^2$. Τώρα ΑΔ×ΑΓ=ΑΒ×ΑΗ= μὲ τὸ δεδομένον ἐμβαδόν. Οὕτως ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΓ καὶ τοῦ τοιούτου ἐμβαδοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΑΓ×ΑΔ λόγον ἔχει πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ΒΓ, ὁποῖον ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΒΕ δηλαδὴ λόγον ἴσον μὲ τὸν δεδομένον.

Σχόλιον. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἐκτεινόμενον μέχρι τῶν ὁρίων του περιέχει πολλὰς μερικὰς προτάσεις. Οὕτως ὑποτιθεμένου ὅτι ὁ δεδομένος λόγος εἶναι ἴσος μὲ τὴν μονάδα, τὸ δεδομένον ἐμβαδὸν θέλει εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῆς ΑΓ καὶ ΒΓ, καὶ τοῦτο καθὼς τὸ τοιοῦτον

ἐμβαδὸν εἶναι μεγαλήτερον ἢ μικρότερον παρὰ $\overline{\text{ΑΓ}}$. Οταν ὑπερβαίνῃ τὸ τετράγωνον τῆς $\overline{\text{ΑΓ}}$, τότε τὸ κέντρον Ε συμπίπτει μὲ τὴν ςιγμὴν τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ, ὡς εἰς τὴν πρώτην περίςασιν τῆς ΙΖ' προτάσεως τοῦ παρόντος βιβλίου· ἀλλ' ὅταν τὸ τετράγωνον τῆς $\overline{\text{ΑΓ}}$ ὑπερβαίνῃ τὸ δεδομενον ἐμβαδὸν, τότε, ἐπειδὴ ὁ λόγος τῆς ΑΕ πρὸς ΒΕ γίνεται ἴσος μὲ τὴν μονάδα, τὸ κέντρον Ε τὸ ὁποῖον τότε εὑρίσκεται ἐκεῖθεν τῆς Β πρέπει νὰ ἦναι θεμένον εἰς ἄπειρον διάςημα, καὶ διὰ τοῦτο τὸ τόξον ΘΙ συμπίπτει μὲ τὴν ἐφαπτομένην του, ἥτις εἶναι κάθετος ἐντῷ μέσῳ τῆς ΗΒ, ὡς εἰς τὴν ἀκόλουθον πρότασιν· περιπλέον ἐὰν τὸ δεδομένον ἐμβαδὸν ἦναι ἴσον μὲ τὸ μηδὲν, τότε ὁ λόγος τοῦ $\overline{\text{ΑΓ}}$ πρὸς τὸ $\overline{\text{ΒΓ}}$ εἶναι δεδομένος, ἑπομένως καὶ ὁ τῆς $\overline{\text{ΑΓ}}$ πρὸς $\overline{\text{ΒΓ}}$· εἰς ταύτην τὴν περίςασιν ΑΗ εἶναι ἴση μὲ τὸ μηδὲν, καὶ ἡ ςιγμὴ Η συμπίπτει μὲ τὴν Α· τότε τὸ κέντρον καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ ζητουμένου κύκλου εἶναι προσδιωρισμένα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὡς εἰς τὴν ΙΒ' πρότασιν τούτου τοῦ βιβλίου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν ἐκ δύο δεδομένων ςαθερῶν ςιγμῶν ἄξωμεν δύο γραμμὰς, αἵτινες νὰ τέμνωνται εἰς τρόπον ὥςε ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων των νὰ ἦναι ςαθερὰ· ἡ ςιγμὴ τῆς συναπαντώσεώς των θέλει ἔχει διὰ τόπον εὐθεῖαν προσδιωρισμένην.

Ὑποτίθεται ὅτι αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι $\overline{\text{ΑΓ}}$ καὶ $\overline{\text{ΒΓ}}$ (σχ. 15) ἐκ τῶν ςιγμῶν Α καὶ Β εἶναι τοιαῦται ὥςε ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων των νὰ ἦναι ςαθερά. Ο τόπος τῆς ςιγμῆς τῆς συμπτώσεώς των Γ εἶναι προσδιωρισμένη εὐθεῖα γραμμή.

Ἀνάλυσις.

Ἂς ἀχθῇ ἡ κάθετος ΓΔ ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ ἂς ληφθῇ ἡ σιγμὴ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ εἰς τὸ Ε. Φανερὸν εἶναι ὅτι $\overline{\text{ΑΓ}}^2 - \overline{\text{ΒΓ}}^2 = 2\text{ΑΒ} \times \text{ΕΔ}$· λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ × ΕΔ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ πλευρά του ΕΔ εἶναι προσδιωρισμένα· οὕτως ἡ σιγμὴ Δ καὶ ἡ κάθετος ΓΔ εἶναι παρομοίως προσδιωρισμένα· λοιπὸν ἡ ΓΔ εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.

Σύνθεσις.

Ἂς ληφθῇ ἡ σιγμὴ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ εἰς Ε· ἂς γένῃ τὸ ὀρθογώνιον 2ΑΒ × ΕΔ ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον ἐμβαδόν. Ἡ κάθετος ΔΓ εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος. Διότι $\overline{\text{ΑΓ}}^2 - \overline{\text{ΒΓ}}^2 = \text{ΑΒ} \times 2\text{ΕΔ} =$ μὲ τὸ δεδομένον ἐμβαδόν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙϛΊ.

Λῆμμα.

Ἐὰν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ΑΒ (σχ. 16) διῃρημένης εἰς δύο τοιαῦτα μέρη ὥςε ΒΓ = ν × ΑΓ λάβωμεν σιγμήν τινα Δ, θέλομεν ἔχει τὴν ἐξίσωσιν

$$\nu \times \overline{\text{ΑΔ}}^2 + \overline{\text{ΒΔ}}^2 = \text{ΑΒ} \times \text{ΒΓ} + (\nu + 1)\,\overline{\text{ΓΔ}}^2.$$

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ταύτην, ἂς γράψωμεν ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον, καὶ ἂς ὑψώσωμεν τὴν κάθετον ΓΕ· ἂς ἐπιζεύξωμεν τὰς ΑΕ, ΒΕ, καὶ ἂς ἄξωμεν τὴν ΔΖ παράλληλον τῆς ΓΕ, ἥτις συναπαντᾷ τὴν ΑΕ εἰς Ζ· τέλος πάντων ἂς ἐπιζεύξωμεν τὴν ΒΖ.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΕΒ εἶναι ὀρθή, ἔχομεν ΑΓ : ΓΕ : : ΓΕ : ΒΓ, διὰ τοῦτο $\overline{\text{ΑΓ}}^2 : \overline{\text{ΒΓ}}^2 : : \text{ΑΓ} : \text{ΓΕ}$· ἀλλὰ

$B\Gamma = \nu \times \overline{A\Gamma}^2$· λοιπὸν $A\Gamma : \nu \times \overline{A\Gamma}^2 :: \overline{A\Gamma}^2 : \overline{\Gamma E}^2$ ἢ $\overline{\Gamma E}^2 = \nu \times \overline{A\Gamma}^2$. Περιπλέον $AB : AE :: AE : A\Gamma$, καὶ $AB : A\Gamma :: \overline{AE}^2 : \overline{A\Gamma}^2$· ἐπειδὴ δὲ $AB = (\nu + 1)\, A\Gamma$, διὰ τοῦτο $\overline{AE}^2 = (\nu + 1)\, \overline{A\Gamma}^2$. Τώρα ἐπειδὴ ΓE καὶ ΔZ εἶναι παράλληλοι, ἔχομεν $\Gamma E : \Delta Z :: A\Gamma : A\Delta$, καὶ $\Gamma E : \Delta Z :: \overline{A\Gamma}^2 : \overline{A\Delta}^2$· καὶ ἐπειδὴ $\overline{\Gamma E}^2 = \nu \times \overline{A\Gamma}^2$· διὰ τοῦτο $\overline{\Delta Z}^2 = \nu \times \overline{A\Delta}^2$· ἀλλὰ $\overline{BE}^2 = AB \times B\Gamma$, καὶ τὰ τρίγωνα $B\Delta Z$, ΔEZ ὡς ὀρθογώνια δίδουν, $\overline{B\Delta}^2 + \overline{\Delta Z}^2 = \overline{BZ}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EZ}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{\Gamma\Delta}^2 + (E\Gamma - \Delta Z)^2$· λοιπὸν συνάγομεν $\nu \overline{A\Delta}^2 + \overline{B\Delta}^2 = AB \times B\Gamma + (\nu + 1)\, \overline{\Gamma\Delta}^2$.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν διὰ πολλῶν δεδομένων σταθερῶν σιγμῶν διέλθωσιν εὐθεῖαι αἵτινες νὰ ἀναχωροῦσιν ἐκ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς σιγμῆς, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των νὰ ἦναι πάντοτε ἴσον μὲ δεδομένον ἐμβαδὸν· ἡ σιγμὴ τῆς συμπτώσεώς των ἔχει διὰ τόπον περιφέρειαν κύκλου προσδιωρισμένου.

Α'. περὶ: Ὅταν αἱ δεδομέναι σιγμαὶ ἦναι μόνον τὸν ἀριθμὸν δύο. Ας ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΠ καὶ ΒΠ (σχ. 17) ἠγμέναι ἐκ τῶν σιγμῶν Α καὶ Β εἶναι τοιαῦται ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των νὰ ἰσοδυναμῇ μὲ δεδομένον ἐμβαδόν. Ο τόπος τῆς σιγμῆς τῆς συναπαντήσεώς των εἶναι προσδιωρισμένη περιφέρεια.

Ἀνάλυσις.

Ἂς διαιρεθῇ ἡ ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὴν σιγμὴν Ο, ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΟΠ· ἔχομεν $\overline{\text{ΑΠ}}^2 + \overline{\text{ΒΠ}}^2 = 2\overline{\text{ΑΟ}}^2 + 2\overline{\text{ΟΠ}}^2$· διὰ τοῦτο $\overline{\text{ΑΟ}}^2 + \overline{\text{ΟΠ}}^2$ εἶναι προσδιωρισμένον· ἀλλ' ὅταν ἡ ΑΟ καὶ τὸ τετράγωνόν της εἶναι προσδιωρισμένα, τὸ τετράγωνον τῆς γραμμῆς ΟΠ, καὶ αὐτὴ ἡ ἰδία γραμμὴ εἶναι προσδιωρισμένα. Ο τόπος λοιπὸν τῆς Π εἶναι προσδιωρισμένη περιφέρεια κύκλου τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον εἶναι Ο καὶ ΟΠ ἡ ἀκτίς.

Σύνθεσις.

Ἂς ληφθῇ ἡ σιγμὴ Ο τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ· ἂς εὑρεθῇ εὐθεῖά τις ΑΖ, τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ δεδομένου ἐμβαδοῦ, καὶ ἂς γένῃ $\overline{\text{ΟΕ}}^2 = \overline{\text{ΑΖ}}^2 - \overline{\text{ΑΟ}}^2$· λέγω ὅτι ὁ γραφόμενος κύκλος ἐκ τοῦ κέντρου Ο μὲ τὴν ἀκτῖνα ΟΕ εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος. Ἐπειδὴ $\overline{\text{ΑΠ}}^2 + \overline{\text{ΒΠ}}^2 = 2\overline{\text{ΑΟ}}^2 + \overline{\text{ΟΠ}}^2 = 2\overline{\text{ΑΟ}}^2 + 2\overline{\text{ΟΕ}}^2 = 2\overline{\text{ΑΖ}}^2 =$ μὲ τὸ δεδομένον ἐμβαδόν.

Β'. Περι. Ὅταν αἱ δεδομέναι σιγμαὶ εἶναι τρεῖς.

Αἱ εὐθεῖαι ΑΠ, ΒΠ, ΓΠ ἠγμέναι ἐκ τῶν σιγμῶν Α Β, Γ ὑποτίθενται τοιαῦται ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των, νὰ ἦναι πάντοτε ἴσον μὲ δεδομένον ἐμβαδόν· λέγω ὅτι τότε ὁ τόπος τῆς συμπτώσεως Π εἶναι περιφέρειαι κύκλου προσδιωρισμένου (σχ. 17 δὶς).

Ἀνάλυσις.

Ἂς ληφθῇ ἡ σιγμὴ Ε τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ· ἔχομεν $\overline{\text{ΑΠ}}^2 + \overline{\text{ΒΠ}}^2 = 2\overline{\text{ΑΕ}}^2 + 2\overline{\text{ΕΠ}}^2$· διὰ τοῦτο $\overline{\text{ΑΠ}}^2 + \overline{\text{ΒΠ}}^2 +$

$\overline{\Gamma\Pi}^2 = \overline{2AE}^2 + \overline{2E\Pi}^2 + \overline{\Gamma\Pi}^2$· ἀλλὰ $\overline{2AE}^2 = AB \times BE$, καὶ περιπλέον ἄγοντες τὴν κάθετον ΠΖ ἐπὶ τῆς ΕΓ φανερὸν εἶναι ὅτι ἔχομεν $\overline{2E\Pi}^2 = \overline{2EZ}^2 + \overline{2\Pi Z}^2$, καὶ $\overline{\Gamma\Pi}^2 = \overline{\Pi Z}^2 + \overline{\Gamma Z}^2$· λοιπὸν $\overline{A\Pi}^2 + \overline{B\Pi}^2 + \overline{\Gamma\Pi}^2 = AB \times BE + \overline{3\Pi Z}^2 + \overline{2EZ}^2 + \overline{\Gamma Z}^2$· ἂς ληφθῇ ἡ ΕΟ ἴση μὲ τὸ τρίτον τῆς ΕΓ καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΠΟ. Τώρα, κατὰ τὸ ἀνωτέρω λῆμμα, $\overline{2EZ}^2 + \overline{\Gamma Z}^2 = E\Gamma \times \Gamma O + \overline{3OZ}^2$. Οὕτως $\overline{A\Pi}^2 + \overline{B\Pi}^2 + \overline{\Gamma\Pi}^2 = AB \times BE + E\Gamma \times \Gamma O + \overline{3\Pi Z}^2 + \overline{3OZ}^2 = AB \times BE + E\Gamma \times \Gamma O + \overline{3\Pi O}^2$· ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι αἱ στιγμαὶ Ε καὶ Ο εἶναι προσδιωρισμέναι· ἀπὸ ἐδῶ ἀκολουθεῖ ὅτι $\overline{3O\Pi}^2$ καὶ ΟΠ εἶναι παρομοίως προσδιωρισμένα· λοιπὸν ἡ στιγμὴ Π ἔχει διὰ τόπον τὴν γραφομένην περιφέρειαν ἐκ τοῦ κέντρου Ο μὲ τὴν ἀκτῖνα ΟΠ.

Σύνθεσις.

Ας ληφθῇ ἡ $AE = \frac{1}{2}AB$, $EO = \frac{1}{3}E\Gamma$· ἂς προσδιωρισθῇ εὐθεῖά τις ΟΠ τοιαύτη ὥστε τὸ τετράγωνόν της νὰ εἶναι τὸ τριτημόριον τῆς ὑπεροχῆς τοῦ δεδομένου ἐμβαδοῦ ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὀρθογωνίων $AB \times BE$ καὶ $E\Gamma \times \Gamma O$· λέγω ὅτι ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι κύκλος τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον εἶναι Ο καὶ ΠΟ ἡ ἀκτίς· ἐπειδὴ $\overline{3\Pi O}^2 = \overline{3\Pi Z}^2 + \overline{3OZ}^2$, ἡ $\overline{3\Pi O}^2 + E\Gamma \times \Gamma O = \overline{3\Pi Z}^2 + E\Gamma \times \Gamma O + \overline{3OZ}^2 = \overline{3\Pi Z}^2 + \overline{2EZ}^2 + \overline{\Gamma Z}^2$ (Λῆμμα) $= \overline{2\Pi E}^2 + \overline{\Pi Z}^2 + \overline{\Gamma Z}^2 = \overline{2\Pi E}^2 + \overline{\Gamma\Pi}^2$·

διὰ τοῦτο τὸ δεδομένον ἐμβαδὸν ἡ $3\overline{\Pi O}^2 + AB \times BE +$
$E\Gamma \times \Gamma O = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{\Pi E}^2 + \overline{\Gamma \Pi}^2 = \overline{A\Pi}^2 + \overline{B\Pi}^2 + \overline{\Gamma \Pi}^2$.

Γ'. Περί. Οταν αἱ δεδομέναι ςιγμαὶ ὦναι τέσσαρες.

Ανάλυσις.

Αἱ εὐθεῖαι ΑΠ, ΒΠ, ΓΠ, ΔΠ (σχ. 17 τρὶς πίναξ. 8) ἠγμέναι ἐκ τῶν ςιγμῶν Α,Β,Γ,Δ ὑποτίθενται τοιαῦται ὥςε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των, νὰ ὦναι ςαθερὸν καὶ ἴσον μὲ δεδομένον ἐμβαδὸν· λέγω ὅτι ὁ τόπος τῆς ςιγμῆς τῆς συμπτώσεώς των Π εἶναι περιφέρεια κύκλου προσδιωρισμένου.

Ας ληφθῇ ἡ ΑΕ = ½ ΑΒ, ΕΖ = ½ ΕΓ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΠΕ καὶ ΠΖ· ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων εἰς τὴν ἀνωτέρω περίςασιν φανερὸν εἶναι ὅτι $\overline{A\Pi}^2 + \overline{B\Pi}^2 + \overline{\Gamma \Pi}^2 = AB \times BE + E\Gamma \times \Gamma Z + 3\overline{\Pi Z}^2$· ὅθεν $\overline{A\Pi}^2 + \overline{B\Pi}^2 + \overline{\Gamma \Pi}^2 + \overline{\Delta \Pi}^2 = AB \times BE + E\Gamma \times \Gamma Z + 3\overline{\Pi Z}^2 + \overline{\Delta \Pi}^2$· ἂς φέρωμεν τὴν κάθετον ΠΗ ἐπὶ τῆς ΔΖ, καὶ θέλομεν ἰδεῖ ὅτι τὸ δεδομένον ἐμβαδὸν εἶναι ἴσον μὲ $AB \times BE + E\Gamma \times \Gamma Z + 3\overline{ZH}^2 + 3\overline{\Pi H}^2 + \overline{\Pi H}^2 + \overline{\Delta H}^2$· διὰ τοῦτο..... $4\overline{\Pi H}^2 + 3\overline{ZH}^2 + \overline{\Delta H}^2$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ προσδιωρισμένον ἐμβαδὸν· ἂς γένῃ ΖΟ = ¼ ΔΖ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΠΟ.

Τότε κατὰ τὸ ἀνωτέρω λῆμμα, $3\overline{ZH}^2 + \overline{\Delta H}^2 = Z\Delta \times \Delta O + 4\overline{OH}^2$: λοιπὸν $Z\Delta \times \Delta O + 4\overline{OH}^2 + 4\overline{\Pi H}^2 = Z\Delta \times \Delta O + 4\overline{\Pi O}^2$ ἰσοδυναμεῖ μὲ προσδιωρισμένον ἐμβαδόν.

Περιπλέον ἐπειδὴ ἡ σιγμὴ Ο εἶναι δεδομένη, βλέπομεν ὅτι ὁ τόπος τῆς Π εἶναι κύκλος, ὅστις ἔχει διὰ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα ΠΟ.

Σύνθεσις.

Ας γένῃ ἡ ΑΕ = ½ ΑΒ, ΕΖ = ½ ΕΓ καὶ ΖΟ = ½ ΖΔ· ἂς εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου ἰσοδυνάμου μὲ τὴν ὑπεροχὴν τοῦ δεδομένου ἐμβαδοῦ ἐπὶ τοῦ ΑΒ×ΒΕ + ΓΕ×ΓΖ + ΔΖ×ΟΔ, καὶ μὲ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς ταύτης ὡς ἀκτῖνα ἂς γραφῇ ἐκ τοῦ κέντρου Ο περιφέρεια, ἥτις εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.

Τῷ ὄντι ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΠΕ, ΠΖ, ΠΟ, καὶ ἂς φερθῇ ἡ κάθετος ΠΗ ἐπὶ τῆς ΔΖ· τότε $ΖΔ×ΔΟ + \overline{ΠΟ}^2 = ΖΔ×ΔΟ + \overline{ΟΗ}^2 + \overline{ΠΗ}^2 = \overline{ΖΗ}^2 + \overline{ΔΗ}^2 + \overline{ΠΗ}^2 = \overline{ΖΗ}^2 + \overline{ΠΗ}^2 + \overline{ΔΠ}^2 = \overline{ΠΖ}^2 + \overline{ΔΗ}^2$· διὰ τοῦτο $ΑΒ×ΒΕ + ΕΓ×ΓΖ + \overline{ΠΖ}^2 + \overline{ΔΠ}^2$ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ δεδομένον ἐμβαδόν· ἀλλ' ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων εἰς τὴν σύνθεσιν τῆς ἀνωτέρω περιγράσεως, φανερὸν εἶναι ὅτι $\overline{ΑΠ}^2 + \overline{ΒΠ}^2 + \overline{ΓΠ}^2 = ΑΒ×ΒΕ + ΕΓ×ΓΖ + \overline{ΠΖ}^2$· λοιπὸν $\overline{ΑΠ}^2 + \overline{ΒΠ}^2 + \overline{ΓΠ}^2 + \overline{ΔΠ}^2$ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ δεδομένον ἐμβαδόν.

Ἐξακολουθοῦντες τὸν τρόπον τοῦτον τῶν ἀποδείξεων, δυνάμεθα νὰ βεβαιώσωμεν τὴν πρότασιν δι' ὁποιονδήποτε ἀριθμὸν δεδομένων σιγμῶν.

Σχόλιον. Η ἰδιότης τὴν ὁποίαν ἀπεδείξαμεν, δύναται νὰ καταγραθῇ γενικά. Οὕτως, ὅταν τὸ δεδομένον ἐμβαδὸν, ἀντὶ νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων κινουμένων εὐθειῶν ἰσοδυναμῇ μὲ τὸ

ἄθροισμα διαφόρων πολλαπλασίων τούτων τῶν τετραγώνων· ἡ σιγμὴ τῆς συμπτώσεώς των ἔχει ἀκόμη διὰ τόπον περιφέρειαν προσδιωρισμένου κύκλου.

Δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν ἄλλας εὐθείας διευθυνομένας ἀπὸ τὴν σιγμὴν Π πρὸς τὰ κέντρα Α,Β,Γ . . . . . καὶ ἐπὶ τούτων τῶν εὐθειῶν ἄλλα κέντρα τῶν διασημάτων τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα ἀπὸ τὴν σιγμὴν Π πολλαπλασιαζόμενα ἐπὶ δεδομένους συντελεσὰς νὰ ᾖναι ἀμοιβαίως ἴσα μὲ τὰ τετράγωνα τῶν πρώτων διασημάτων ΠΑ, ΠΒ, ΠΓ . . . . . .

Τὴν ἰδιότητα ταύτην δυνάμεθα νὰ τὴν κατασήσωμεν πλέον φανερὰν γενικεύοντες τὸ Λῆμμα· ἔσωσαν ΑΠ καὶ ΒΠ (σχ. 16 δὶς) δύο τῶν κινουμένων εὐθειῶν, αἵτινες διέρχονται ἐκ τῶν σαθερῶν σιγμῶν Α καὶ Β· ἂς ληφθῇ ΟΒ=υ×ΟΑ. Τότε ἄγοντες τὴν ΠΟ καὶ τὴν κάθετον ΠΛ ἐδείξαμεν ὅτι $\text{υ}\times\overline{\text{ΑΛ}}^2+\overline{\text{ΒΛ}}^2=\text{ΑΒ}\times\text{ΒΟ}+(\text{υ}+1)\overline{\text{ΟΛ}}^2$, προσθέτοντες εἰς τὰ δύο μέλη $(\text{υ}+1)\overline{\text{ΠΛ}}^2$ φανερὸν εἶναι ὅτι ἔχομεν $\text{υ}(\overline{\text{ΑΛ}}^2+\overline{\text{ΠΛ}}^2)+\overline{\text{ΒΛ}}^2+\overline{\text{ΠΛ}}^2=\text{υ}\times\overline{\text{ΠΑ}}^2+\overline{\text{ΒΠ}}^2=\text{ΑΒ}\times\text{ΒΟ}+(\text{υ}+1)\overline{\text{ΟΠ}}^2$. Τώρα πολλαπλασιάζοντες τὰ δύο μέλη διὰ υ, καὶ καλοῦντες υ=μ εὑρίσκομεν $\mu.\overline{\text{ΑΠ}}^2+\text{ν}.\overline{\text{ΒΠ}}^2 \ldots\ldots = \text{ν}.\text{ΑΒ}\times\text{ΒΟ}+(\text{ν}+\mu)\overline{\text{ΟΠ}}^2$.

Ἐξακολουθοῦντες παρομοίας ἐφαρμογὰς τῆς ἰδίας ἀρχῆς δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι $\mu.\overline{\text{ΑΠ}}^2+\text{ν}.\overline{\text{ΒΠ}}^2+\pi.\overline{\text{ΓΠ}}^2+\text{κ}.\overline{\text{ΔΠ}}^2+\ldots\ldots=(\mu+\text{ν}+\pi+\text{κ}+\ldots)\overline{\text{ΟΠ}}^2+$ πολλαπλάσια τινὰ δεδομένων ὀρθογωνίων. Διὰ τοῦτο

ἡ σιγμὴ τῆς συμπτώσεώς των ἔχει διὰ τόπον περιφέρειαν κύκλου ὅτις ἔχει διὰ κέντρον τὴν Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΠ. Ἀλλ' ἡ ἰδιότης πρέπει νὰ ὑπάρχῃ, ἐὰν διαιρέσωμεν ὅλα τὰ τοιαῦτα πολλαπλάσια τῶν τετραγώνων δι' ἑνὸς καὶ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ: τοῦτ' ἔστι ἀντὶ τῶν τετραγώνων τῶν κινητῶν γραμμῶν, θεωρήσωμεν τὰ ὅμοια σχήματα τὰ κατασκευαζόμενα ἐπ' αὐτῶν. Ἐὰν τὸ δεδομένον ἐμβαδὸν ᾖναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων, τότε ὁ κύκλος ἄγεται εἰς μίαν σιγμήν· Ἐπειδὴ τότε ΟΠ γίνεται μηδὲν, καὶ μετὰ τοῦτο τὸ ὅριον ἡ πρότασις εἶναι ἀδύνατος. Παρομοίως εἶναι ἐπίσης φανερὸν ὅτι τὸ κέντρον Ο καὶ ἡ ἀκτὶς ΟΠ μένουν τὰ αὐτὰ καθ' ὁποιαν ταξιν ἐκτελέσωμεν τὴν κατασκευὴν, διὰ νὰ προσδιορισωμεν τὴν θέσιν τοῦ κέντρου —

ΠΕΡΙ ΠΟΡΙΣΜΑΤΩΝ.

Ορισμός.

Διὰ τοῦ πορίσματος σκοπὸν ἔχομεν νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πολλὰς ποσότητας μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ πολλῶν ἄλλων λαμβανομένων κατὰ δεδομένον νόμον ὑπάρχει προσδιωρισμενη τις σχέσις.

Τὸ πόρισμα προϋποθέτει ὅτι ὑπάρχουν συνθῆκαι, αἵτινες καταςαίνουν μίαν πρότασιν ἀπροσδιόριςον τοῦτ' ἔςιν ἀπείρου ἀριθμοῦ λύσεων δεκτικήν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

Πόρισμα.

Δεδομένων τριῶν σιγμῶν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τετάρτην τινα τοιαύτην, ὥςε ἐὰν διέλθῃ ὁποιαδήποτε εὐθεῖα ἐξ αὐτῆς, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποσημάτων ταύτης τῆς εὐθείας ἀπὸ τὰς δύο πρώτας δεδομένας σιγμὰς, νὰ ᾖναι ἴσον μὲ τὸ ἀπόσημα τῆς ἰδίας ἀπὸ τὴν τρίτην.