ΒΙΒΛΙΟΝ Γ.

Ορισμός.

Ἐὰν μία σιγμὴ ἀλλάσσῃ θέσιν κατὰ νόμον προσδιορισμένον, ἡ γραμμὴ, τὴν ὁποίαν περιγράφει καλεῖται τόπος ταύτης τῆς σιγμῆς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

Θεώρημα.

Ἐὰν ἐκ μιᾶς δεδομένης σιγμῆς φέρωμεν εἰς εὐθεῖαν δεδομένην γραμμὰς, αἵτινες νὰ διαιρῶνται εἰς λόγον γνωστόν· Ο τόπος τῶν σιγμῶν τῆς διαιρέσεως εἶναι μία ἄλλη εὐθεῖα προσδιορισμένης θέσεως (σχ. 1 Πίναξ. 3.).

Ἔστω μία εὐθεῖα ΑΒ ἠγμένη ἔκτινος σταθερᾶς σιγμῆς Α εἰς μίαν μεταβλητῆς θέσεως σιγμὴν Β δεδομένης εὐθείας ΒΔ, καὶ διαιρουμένη εἰς τὴν σιγμὴν Γ εἰς δεδομένον λόγον, λέγω ὅτι ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ᾖναι ἡ κλίσις τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ ἡ σιγμὴ Γ εὑρίσκεται πάντοτε ἐπὶ μιᾶς εὐθείας δεδομένης θέσεως.

Ανάλυσις.

Ἐκ τῆς Α ἂς φερθῇ ἡ κάθετος ΑΔ' ἐπὶ τῆς ΒΔ· ἐκ τῆς Γ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΕ παράλληλος τῆς ΒΔ. Φανερὸν εἶναι ὅτι ΑΓ : ΑΒ : : ΑΕ : ΑΔ. Διὰ τοῦτο ὁ λόγος τῆς ΑΕ πρὸς ΑΔ εἶναι γνωστὸς. ἀλλὰ ΑΔ εἶναι δεδομένη τόσον εἰς θέσιν ὅσον καὶ εἰς μέγεθος. Οὕτως ΑΕ καὶ ἡ σιγμὴ Ε εἶναι δεδομένα. Διὰ τοῦτο ΓΕ ἥτις εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΑΔ εἶναι προσδιορισμένης θέσεως.

Σύνθεσις.

Ἂς φερθῇ ἡ κάθετος ΑΔ ἥτις διαιρεῖται εἰς τὴν σιγμὴν Ε εἰς τὸν δεδομένον λόγον, ἂς ὑψωθῇ ἡ κά-

θετος ΓΕ, αὕτη ἡ εὐθεῖα εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος· διότι ἐπειδὴ ΕΓ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΔ ἔχομεν, ΑΓ : ΑΒ : : ΑΕ : ΑΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Θεώρημα.

Ἐὰν ἔκτινος δεδομένης σιγμῆς φέρωμεν εἰς τὴν περιφέρειαν δεδομένου κύκλου εὐθείας γραμμῆς, καὶ τὰς διαιρέσωμεν εἰς λόγον γνωστὸν· ὁ τόπος τῶν σιγμῶν τῆς διαιρέσεως θέλει εἶναι μία περιφέρεια κύκλου προσδιορισμένου.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ΑΒ (σχ. 2) τελειόνει εἰς μίαν σιγμὴν Α καὶ εἰς μίαν δεδομένην περιφέρειαν, καὶ ὅτι διαιρεῖται εἰς τὴν σιγμὴν Γ εἰς τὸν δεδομένον λόγον· λέγω ὅτι αὕτη ἡ σιγμὴ Γ εὑρίσκεται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας κύκλου προσδιορισμένου.

Ἀνάλυσις.

Ἂς ἑνωθῇ ἡ σιγμὴ Α μὲ τὸ κέντρον Δ τοῦ δεδομένου κύκλου. Ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΕ παράλληλος τῆς ΒΔ. Φανερὸν εἶναι ὅτι ΑΓ : ΑΒ : ; ΑΕ : ΑΔ. Οὕτως ὁ λόγος τῆς ΑΕ πρὸς ΑΔ εἶναι δεδομένος, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΑΕ καὶ ἡ σιγμὴ Ε εἶναι προσδιορισμένα· περισσότερον ἐπειδὴ ΑΓ.ΑΒ::ΓΕ:ΒΔ· ὁ λόγος τῆς ΓΕ πρὸς ΒΔ εἶναι γνωστός, καὶ διὰ κάθε θέσιν τῆς ΑΒ ἡ ΓΕ εἶναι προσδιορισμένου μεγέθους. Ἐπειδὴ δὲ ΒΔ εἶναι σταθερὰ, καὶ ἡ ΓΕ εἶναι παρομοίως σταθερά. Διὰ τοῦτο ἡ σιγμὴ Γ εὑρίσκεται πάντοτε ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ γραφομένου κύκλου ἐκ τῆς σιγμῆς Ε ὡς κέντρου μὲ ἀκτῖνα τὴν ΓΕ.

Σύνθεσις.

Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΔ, καὶ ἀφ' οὗ διαιρεθῇ εἰς τὴν σιγμὴν Ε εἰς τὸν δεδομένον λόγον ἂς ζητηθῇ μία

γραμμὴ ΕΓ ἥτις νὰ ἔχῃ πρὸς τὴν ΒΔ τὸν αὐτὸν γνωστὸν λόγον. Επειτα ἐκ τῆς στιγμῆς Ε ὡς κέντρου μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΕ ἂς γραφθῇ κύκλος, ὅστις θέλει εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.

Τῷ ὄντι ἂς φερθῇ ἡ ΑΒ ἥτις τέμνει καὶ τὰς δύο περιφερείας· ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΓΕ, ΒΔ. Επειδὴ ΓΕ:ΒΔ::ΑΕ:ΑΔ, ἕπεται ὅτι ΓΕ:ΑΕ::ΒΔ:ΑΔ. Διὰ τοῦτο τὰ τρίγωνα ΓΑΕ καὶ ΒΑΕ εἰς τὰ ὁποῖα ἐκτὸς τῆς ἐνωτέρω ἀναλογίας ὑπάρχει καὶ μία κοινὴ γωνία, εἶναι ὅμοια, ἑπομένως ΑΓ:ΑΒ::ΑΕ:ΑΔ τοῦτ' ἔστιν εἰς τὸν δεδομένον λόγον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Θεώρημα.

Εφ' ἑκάστης τῶν πλευρῶν δεδομένης γωνίας λαμβάνεται μία στιγμὴ, καὶ χωρὶς νὰ ἀλλάξῃ ὁ λόγος τῶν ἀποστημάτων τῶν οὕτως προσδιωρισμένων δύο στιγμῶν ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας, οὔτε ἡ θέσις τῆς κορυφῆς ταύτης, οὔτε τὸ μέγεθος τῆς γωνίας ὑποτίθεται ὅτι ἡ μία τῶν στιγμῶν διατρέχει εὐθεῖαν δεδομένην. Ζητεῖται νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἄλλη στιγμὴ ἔχει παρομοίως διὰ τόπον προσδιωρισμένην εὐθεῖαν.

Ο λόγος τῆς ΑΒ πρὸς ΑΓ (σχ. 3.), ἡ γωνία ΒΑΓ καὶ ἡ κορυφή της εἶναι δεδομένα· λέγω ὅτι ἐὰν τὸ ἄκρον Β περιγράφῃ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, τὸ ἄκρον Γ θέλει περιγράψει μίαν εὐθεῖαν ΓΕ προσδιωρισμένης θέσεως.

Ανάλυσις.

Ας φερθῇ ἡ κάθετος ΑΔ ἐπὶ τῆς ΒΔ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΕ εἰς τρόπον ὥστε νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν ΑΔ μίαν γωνίαν ΔΑΕ ἴσην μὲ τὴν ΒΑΓ· ἂς φερθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΕ οὕτω θεμένης ἓν διάστημα ΑΕ τὸ ὁποῖον νὰ ἦναι τετάρτη ἀνάλογος τῶν ΑΒ, ΑΓ, καὶ ΑΔ·

λέγω ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΕ εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος κατὰ τὴν ὑπόθεσιν.

Επειδὴ ἡ γωνία ΔΑΕ, εἶναι, ἐκ τῆς κατασκευῆς, ἴση μὲ τὴν ΒΑΓ, εἶναι γνωστὴ· ἐπειδὴ δὲ ἡ κάθετος ΑΔ εἶναι δεδομένη, ἡ εὐθεῖα ΑΕ εἶναι διὰ τοῦτο προσδιωρισμένης θέσεως καὶ μεγέθους· διότι ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ εἶναι δεδομέναι. Περιπλέον ἡ γωνία ΒΑΓ μὲ τὸ νὰ ἦναι ἴση μὲ τὴν ΔΑΕ ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ΒΑΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΑΕ, καὶ ἂν παρατηρήσωμεν ὅτι ἔχομεν ΑΒ : ΑΔ :: ΑΓ : ΑΕ, συνάγομεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΓΕ εἶναι ὅμοια ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων· λοιπὸν ἡ γωνία ΓΕΑ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΒΔΑ τοῦτ' ἔστι μὲ μίαν ὀρθὴν γωνίαν. Διὰ τοῦτο ἡ εὐθεῖα ΓΕ εἶναι προσδιωρισμένης θέσεως.

Σύνθεσις.

Ἀφ' οὗ φέρωμεν τὴν κάθετον ΑΔ, καὶ σχηματίσωμεν τὴν γωνίαν ΔΑΕ ἴσην μὲ τὴν ΒΑΓ, φέρομεν ἐκ τῆς Α εἰς τὴν Ε ὡς ἀνωτέρω, μίαν τετάρτην ἀνάλογον τῶν γραμμῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ· καὶ ἐκ τῆς σημμῆς Ε οὕτω θεμένης φέρομεν ἐπὶ τῆς ΑΕ τὴν κάθετον ΓΕ· λέγω ὅτι ἡ ΓΕ εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.

Επειδὴ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΑΔ καὶ ΓΑΕ ἔχοντα περιπλέον μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, εἶναι ὅμοια, καὶ διὰ τοῦτο ΑΒ : ΑΓ :: ΑΔ : ΑΕ ἢ :: Μ : Ν, $\frac{M}{N}$ εἶναι ὁ σταθερὸς λόγος τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Θεώρημα.

Ἂν ἐκ σταθερᾶς σημῆς ἀχθῶσιν δύο εὐθεῖαι τῶν ὁποίων τὰ μήκη νὰ εὑρίσκωνται εἰς σταθερὸν λόγον, καὶ τῶν ὁποίων ἡ κλίσις νὰ ἦναι ἀμετάβλητος καὶ

ἐὰν τὸ ἄκρον τῆς μιᾶς διατρέχῃ περιφέρειαν κύκλου προσδιωρισμένου, τὸ ἄκρον τῆς ἄλλης θέλει ἔχει διὰ τόπον μίαν περιφέρειαν παρομοίως προσδιωρισμένην.

Ας ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ γωνία ΒΑΓ (σχ. 4), ἡ κορυφή της Α, καὶ ὁ λόγος τῶν πλευρῶν της νὰ ἦναι σταθερὰ· ἐὰν Β διατρέχῃ δεδομένην περιφέρειαν, ὁ τόπος τῆς Γ θέλει εἶναι παρομοίως προσδιωρισμένη περιφέρεια.

Ανάλυσις.

Ας ἑνωθῇ ἡ στιγμὴ Α μὲ τὸ κέντρον Δ τοῦ δεδομένου κύκλου, καὶ ἂς ἀχθῇ εὐθεῖά τις ΑΕ ἥτις νὰ κλίνῃ ἐπὶ τὴν ΑΔ ποσότητα ἴσην μὲ τὴν δεδομένην γωνίαν, καὶ τῆς ὁποίας τὸ μῆκος νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὴν ΑΔ ἴσον μὲ τὸν δεδομένον. Τέλος πάντων ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΔΒ καὶ ΕΓ.

Επειδὴ ἡ στιγμὴ Α καὶ τὸ κέντρον Δ εἶναι δεδομένα καὶ σταθερά, ἡ εὐθεῖα ΑΔ εἶναι προσδιωρισμένη. Τὸ αὐτὸ λοιπὸν ὑπάρχει καὶ διὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΕ ἥτις εἶναι παρομοίως σταθερὰ καὶ γνωστοῦ μεγέθους, οὕτως ἡ στιγμὴ Ε εἶναι προσδιωρισμένη, καὶ ἀμεταβλήτου θέσεως.

Επειδὴ περιπλέον ἡ ὅλη γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΔΑΕ, τὸ μέρος ΒΑΔ εἶναι ἴσον μὲ ΓΑΕ καὶ ἐπειδὴ προσέτι ΑΒ : ΑΔ : : ΑΓ : ΑΕ ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΕΓ εἶναι ὅμοια, καὶ διὰ τοῦτο ΑΒ : ΒΔ : : ΑΓ : ΓΕ ἢ $ΓΕ = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} \times ΒΔ$. Τώρα ὁ λόγος $\frac{ΓΑ}{ΑΒ}$ εἶναι σταθερὸς καὶ γνωστός, καὶ ἡ ΒΔ εἶναι παρομοίως γνωστὴ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν· λοιπὸν τὸ διάστημα ΓΕ εἶναι σταθερὸν καὶ προσδιωρισμένον· λοιπὸν ἡ στιγμὴ Γ διατρέχει περιφέρειαν κύκλου τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον Ε καὶ ἡ ἀκτὶς ΓΕ εἶναι γνωστά.

Σύνθεσις.

Αφ' οὗ ἄξωμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΕ κλινομένην ἐπὶ τὴν ΑΔ ποσότητα ἴσην μὲ τὴν δεδομένην γωνίαν, καὶ τὴν λάβωμεν ἴσην μὲ ἓν διάστημα ὥστε $\frac{ΑΔ}{ΑΕ}$ νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸν δεδομένον λόγον· ἐκ τῆς στιγμῆς Ε ὡς κέντρου μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΕ, γράφομεν κύκλον, ὅστις εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.

Ἐπειδὴ ΑΔ : ΒΔ :: ΑΕ : ΕΓ· ἀλλ' ἡ γωνία ΒΑΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΑΕ, διότι ΒΑΓ = ΔΑΕ· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΓΑΕ εἶναι ὅμοια, καὶ διὰ τοῦτο ΑΒ : ΑΓ :: ΑΔ : ΑΕ τοῦτ' ἔστιν εἰς τὸν δεδομένον λόγον.

Σχόλιον. Ἓν τόξον κύκλου ἔχει διὰ ὅριον τὴν ἐφαπτομένην του καὶ τόσον περισσότερον πλησιάζει εἰς αὐτὴν ὅσον τὸ κέντρον ἀπομακρύνεται καὶ ἡ περιφέρεια αὐξάνει· οὕτως ὁ εὐθύγραμμος τόπος δύναται νὰ συναχθῇ ἐκ τοῦ κυκλικοῦ, καὶ ὅσα εἴπομεν περὶ τοῦ δευτέρου δυνάμεθα νὰ τὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ εἰς τὸν πρῶτον, ὑποθέτοντες ὅτι τὸ κέντρον εὑρίσκεται εἰς ἄπειρον διάστημα. Οὕτως εἰς τὴν Β'. Πρότασιν τοῦ παρόντος Βιβλίου, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ κέντρα Ε καὶ Δ, (σχ. 2) χωρὶς νὰ παραιτήσωσι τὴν εὐθεῖαν ΑΔ, ἀπομακρύνονται διαδοχικῶς ἐκ τῆς στιγμῆς Α ὥστε νὰ ἀπέχουν ἄπειρον διάστημα ἐκ τῆς ἰδίας· τότε οἱ κύκλοι οἱ διερχόμενοι ἐκ τῆς Γ καὶ Β, ἄγονται εἰς δύο εὐθείας καταχαθέτους ἐπὶ τὴν ΑΔ. Αὕτη εἶναι ἡ περίεασις τῆς Α' προτάσεως τούτου τοῦ Βιβλίου. Παρομοίως ἐὰν τὰ κέντρα Δ καὶ Ε, εἰς τὴν Δ' πρότασιν τοῦ παρόντος Βιβλίου, χωρὶς νὰ παραιτήσωσι τὰ μὲν τὴν εὐθεῖαν ΑΔ, τὸ δὲ τὴν ΑΕ ἀπομακρυνθῶσιν ἄπειρον διάστημα· τότε οἱ διερχόμενοι κύκλοι ἐκ τῶν στιγμῶν Β καὶ Γ συγχέονται μὲ τὰς ἐφαπτο-

μένας των, καὶ ἄγονται εἰς εὐθείας καταχαθέτους ἐπὶ τῶν ΑΔ καὶ ΑΕ, ὡς εἰς τὴν Γ' πρότασιν τοῦ παρόντος Βιβλίου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'.

Θεώρημα.

Ἀγομένης μιᾶς εὐθείας ἀπὸ σταθερὰν στιγμὴν καὶ διαιρουμένης εἰς μίαν στιγμὴν τοῦ μήκους της εἰς δύο τοιαῦτα μέρη, ὥστε τὸ σχηματιζόμενον ὀρθογώνιον ἀπὸ τὸ ἓν καὶ τὴν ὅλην γραμμὴν, νὰ ἰσοδυναμῇ μὲ σταθερὸν καὶ δεδομένον ὀρθογώνιον· ἐὰν ἡ στιγμὴ τῆς τομῆς κινουμένη περιγράφῃ μίαν εὐθεῖαν δεδομένην, τὸ ἄκρον τῆς κινητῆς γραμμῆς ἔχει διὰ τόπον προσδιωρισμένην περιφέρειαν.

Τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ×ΑΓ (σχ. 5) καὶ ἡ στιγμὴ Α εἶναι σταθερὰ καὶ γνωστά: Ἡ εὐθεῖα ΒΔ εἶναι δεδομένης θέσεως· λέγω ὅτι ἡ στιγμὴ Γ διατρέχει περιφέρειαν γνωστήν.

Ἀνάλυσις.

Ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ, καὶ ἂς γένῃ τὸ ὀρθογώνιον ΑΔ×ΑΕ=ΑΒ×ΑΓ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ ΑΕ καὶ ἡ στιγμὴ Ε εἶναι προσδιωρισμένα· ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΕ. Ἐπειδὴ ΑΔ×ΑΕ=ΑΒ×ΑΓ· διὰ τοῦτο ΑΔ:ΑΒ::ΑΓ:ΑΕ, ἀναλογία ἥτις φανερώνει τὴν ὁμοιότητα τῶν δύο τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΓΕ εἰς τὰ ὁποῖα ἡ γωνία Α εἶναι κοινή. Ἕπεται ὅτι ΑΓΕ=ΑΔΒ. Διὰ τοῦτο ἡ γωνία ΓΑΕ εἶναι πάντοτε ὀρθὴ δι' ὁποιανδήποτε θέσιν τῆς κινητῆς εὐθείας. Τοῦτο δηλοῖ ὅτι ἡ στιγμὴ Γ διατρέχει περιφέρειαν κύκλου, τοῦ ὁποίου ΑΕ εἶναι ἡ διάμετρος.

Σύνθεσις. τρόπος

ἐπὶ τ

Ἀφ' οὗ φερθῇ ἡ κάθετος ΑΔ, ἂς κατασκευασθῇ τὸ ὀρθογώνιον ΑΔ×ΑΕ ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον ἐμβαδὸν· ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΕ ἂς γραφθῇ κύκλος· λέγω ὅτι οὗτος εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος. Διότι, ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΑΓ καὶ ΓΕ σχηματίζομεν δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΕΓ τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια ὡς ἔχοντα δύο γωνίας ἴσας· ἑπομένως ΑΒ : ΑΔ :: ΑΕ : ΑΓ καὶ ΑΒ×ΑΓ=ΑΔ×ΑΕ= μὲ τὸ δεδομένον ἐμβαδόν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν μία εὐθεῖα ἥτις ὑποχρεοῦται νὰ διέρχεται πάντοτε ἀπὸ σταθερὰν στιγμὴν, διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη τοιαῦτα ὥστε τὸ σχηματιζόμενον ὀρθογώνιον ἀπὸ τὸ ἓν μετρούμενον ἐκ τῆς σταθερᾶς στιγμῆς, καὶ ἀπὸ τὴν ὅλην γραμμὴν νὰ ἦναι ἴσον πάντοτε μὲ δεδομένον ὀρθογώνιον· καὶ ἐὰν ἡ στιγμὴ τῆς διαιρέσεως διατρέχῃ δεδομένην περιφέρειαν, τὸ ἄκρον τῆς εὐθείας θέλει ἔχει διὰ τόπον μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν προσδιωρισμένης θέσεως, ἢ περιφέρειαν κύκλου προσδιωρισμένου καθὼς ἡ σταθερὰ στιγμὴ εἶναι ἢ δὲν εἶναι ἐπὶ τῆς δεδομένης περιφερείας.

Ας ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ×ΑΒ ἰσοδυναμεῖ μὲ δεδομένον ἐμβαδὸν, καὶ ὅτι τὸ τμῆμα ΑΓ τελειόνει εἰς δεδομένην περιφέρειαν. Η σταθερὰ στιγμὴ Α δύναται νὰ εὑρίσκεται ἢ ὄχι ἐπὶ ταύτης τῆς περιφερείας (σχ. 6 καὶ σχ. 6 δις).

Πρώτη παρίσασις. Ἐὰν ἡ στιγμὴ Α ἦναι ἐπὶ τῆς δεδομένης περιφερείας σχ. 6. Ο τόπος τῆς Β εἶναι μία εὐθεῖα προσδιωρισμένης θέσεως.

Ἀνάλυσις.

Ἂς ἀχθῇ διάμετρος ΑΕ, καὶ ἂς γένῃ ΑΕ×ΑΔ = ΑΒ×ΑΓ. Τότε ἡ σιγμὴ Δ εἶναι προσδιωρισμένη, καὶ φανερὸν εἶναι ὅτι εἶναι μία σιγμὴ τοῦ ζητουμένου τόπου. Τώρα ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΓΕ καὶ ΒΔ: ἐπειδὴ ΑΕ×ΑΔ = ΑΒ×ΑΓ· διὰ τοῦτο ΑΓ : ΑΕ :: ΑΔ : ΑΒ· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΓΑΕ καὶ ΒΑΔ εἶναι ὅμοια, ἑπομένως ἡ γωνία ΑΔΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΓΕ τοῦτ' ἔστι μὲ μίαν ὀρθὴν γωνίαν. Διὰ τοῦτο ἡ εὐθεῖα ΔΒ εἶναι προσδιωρισμένης θέσεως.

Σύνθεσις.

Ἀφ' οὗ φερθῇ ἡ διάμετρος ΑΕ, ἂς σχηματισθῇ τὸ ὀρθογώνιον ΑΕ×ΑΔ ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον ἐμβαδόν· λέγω ὅτι ἡ κάθετος ΒΔ εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος· διότι, ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς ΑΓΒ καὶ ΓΕ σχηματίζομεν δύο τρίγωνα ΑΓΕ καὶ ΑΔΒ τῶν ὁποίων ἡ ὁμοιότης εἶναι φανερὰ. Τοῦτο δεικνύει ὅτι ΑΓ : ΑΕ :: ΑΔ : ΑΒ, ἐκ τῆς ὁποίας ΑΓ×ΑΒ = ΑΕ×ΑΔ = μὲ τὸ δεδομένον ἐμβαδόν.

Δευτέρα περίστασις. Ἐὰν ἡ σιγμὴ Α δὲν ἦναι ἐπὶ τῆς δεδομένης περιφερείας ΕΓΓΔ, ὁ τόπος τῆς Β εἶναι προσδιωρισμένη τις περιφέρεια. (σχ. 6 δὶς).

Ἀνάλυσις.

Ἂς φερθῇ ἡ διάμετρος ΕΑΔ καὶ ἡ χορδὴ ΓΑΒΓ' τοῦ δεδομένου κύκλου ἥτις τέμνει τὸν ζητούμενον τόπον εἰς τὰς σιγμὰς Β καὶ Ζ. Ἔστω Μ τὸ δεδομένον ὀρθογώνιον, καὶ Ν τὸ γνωστὸν ὀρθογώνιον ΕΑ×ΑΔ. Ἔχομεν, ἐξ ὑποθέσεως, ΑΒ×ΑΓ = ΑΖ×ΑΓ' = Μ, καὶ ΑΓ×ΑΓ' = Ν. Ὅθεν ἕπεται ὅτι ὁ λόγος $\frac{ΑΓ}{ΑΖ} = \frac{ΑΓ'}{ΑΒ} = \frac{Ν}{Μ}$ λοιπὸν ὁ λόγος $\frac{ΑΓ'}{ΑΒ}$ εἶναι προσδιωρισμένος, καὶ,

κατὰ τὴν δευτέραν πρότασιν τοῦ παρόντος Βιβλίου, τὸ ἄκρον Β τῆς εὐθείας ΑΒ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας γνωστοῦ κύκλου.

Σύνθεσις.

Ἀφ' οὗ ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΔΑΕ, ἂς γένῃ τὸ ὀρθογώνιον ΑΔ × ΑΘ ἴσον μὲ τὸ δεδομένον ἐμβαδὸν, καὶ (βιβλ. 3. πρ. 2) ἂς γραφθῇ κύκλος ΒΗΖΘ τοιοῦτος, ὥστε μία χορδὴ τούτου τοῦ κύκλου ἀγομένη ἐκ τῆς Α νὰ διαιρῆται εἰς ταύτην τὴν σιγμὴν εἰς τὸν λόγον τῆς ΑΕ πρὸς ΑΘ· λέγω ὅτι ὁ κύκλος οὗτος εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος. Ἐπειδὴ ΑΕ : ΑΘ : : ΑΓ : ΑΒ : : ΑΓ × ΑΓ' : ΑΒ × ΑΓ'· λοιπὸν ΑΓ × ΑΓ' : ΑΒ × ΑΓ' : : ΑΕ × ΑΔ : ΑΘ × ΑΔ. Ἐπειδὴ δὲ ΑΓ × ΑΓ' = ΑΕ × ΑΔ· ἕπεται ὅτι ΑΒ × ΑΓ' = ΑΘ × ΑΔ = Μ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ'.

Θεώρημα.

Τοῦ μεγέθους μιᾶς γωνίας, τῆς κορυφῆς της, καὶ τοῦ ὀρθογωνίου τῶν πλευρῶν της δεδομένων καὶ σταθερῶν ὄντων, ἐὰν τὸ ἄκρον μιᾶς τῶν πλευρῶν διατρέχῃ εὐθεῖαν δεδομένην· τὸ ἄκρον τῆς ἄλλης ἔχει διὰ τόπον περιφέρειαν κύκλου προσδιωρισμένου.

Ἡ σιγμὴ Α (σχ. 7), ἡ γωνία ΒΑΓ, τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ × ΑΓ εἶναι σταθερὰ· ἐὰν Β διατρέχῃ τὴν εὐθεῖαν ΒΔ, ὁ τόπος τῆς Γ εἶναι κύκλος γνωστός.

Ἀνάλυσις.

Ἐκ τῆς Α ἂς φερθῇ ἡ κάθετος ΑΔ ἐπὶ τὴν ΒΔ· ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΕ ποιοῦσα γωνίαν μὲ τὴν ΑΔ ἴσην μὲ τὴν δεδομένην, καὶ ἓν ὀρθογώνιον ΑΔ × ΑΕ ἰσοδύναμον μὲ τὸ δεδομένον ὀρθογώνιον· ἂς ἐπιζευθῇ ἡ ΓΕ.

Ἐπειδὴ ΑΔ εἶναι δεδομένης θέσεως καὶ μεγέθους, τὸ αὐτὸ ὑπάρχει καὶ διὰ τὴν ΑΕ· καὶ ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον

ΑΔ×ΑΕ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΑΒ×ΑΓ· ἕπεται ὅτι ΑΔ : ΑΒ :: ΑΓ : ΑΕ· περιπλέον ἐπειδὴ ἡ γωνία ΔΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΕΑΓ, τὰ τρίγωνα ΔΑΒ καὶ ΕΑΓ εἶναι ὅμοια, ὅθεν ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ΕΑΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΔΒ τοῦτ' ἔστι μὲ μίαν ὀρθήν· λοιπὸν ἡ στιγμὴ Γ διατρέχει κύκλον, τοῦ ὁποίου ΑΕ εἶναι ἡ διάμετρος.

Σύνθεσις.

Ἀφ' οὗ φέρομεν τὴν κάθετον ΑΔ, ἄγομεν τὴν ΑΕ εἰς τρόπον ὥστε ἡ γωνία ΔΑΕ νὰ ἦναι ἴση μὲ τὴν δεδομένην γωνίαν, καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΑΔ×ΑΕ νὰ ἰσοδυναμῇ μὲ τὸ δεδομένον ὀρθογώνιον. Ο γραφόμενος κύκλος ἐπὶ τῆς ΑΕ ὡς διαμέτρου εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.

Τῷ ὄντι ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΕ. Τὰ τρίγωνα ΔΑΒ καὶ ΕΑΓ εἶναι ὅμοια ὡς ὀρθογώνια τὸ μὲν εἰς τὸ Δ, τὸ δὲ εἰς τὸ Γ καὶ περιπλέον ἔχοντα τὴν γωνίαν ΕΑΓ ἴσην μὲ τὴν ΒΑΔ· λοιπὸν ΑΔ : ΑΒ :: ΑΓ : ΑΕ· διὰ τοῦτο τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ×ΑΓ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ ΑΔ×ΑΕ δηλαδὴ μὲ τὸ δεδομένον ὀρθογώνιον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι, τῶν ὁποίων τὰ μήκη εὑρίσκονται εἰς σταθερὸν λόγον, κινοῦνται ἐπιστηριζόμεναι πάντοτε ἐπὶ δύο σταθερῶν καὶ δεδομένων εὐθειῶν, φυλάττουσαι τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν· ἡ στιγμὴ τῆς κοινῆς τομῆς των περιγράφει εὐθεῖαν προσδιωρισμένην.

Ο λόγος τῆς ΑΒ πρὸς ΑΓ (σχ. 8) εἶναι σταθερὸς καθὼς καὶ αἱ γωνίαι ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ σχηματιζόμεναι ἀπὸ ταύτας τὰς εὐθείας καὶ ἀπὸ τὰς σταθερὰς ΔΕ, ΔΖ· λέγω ὅτι ὁ τόπος τῆς στιγμῆς Α εἶναι προσδιωρισμένη εὐθεῖα.

Ἀνάλυσις.

Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΑ, καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΒΑ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΔΖ εἰς τὴν Η. Τὸ τρίγωνον ΔΒΗ εἶναι προσδιωρισμένου εἴδους· διότι αἱ γωνίαι Β καὶ Δ εἶναι δεδομέναι. Τὸ αὐτὸ ὑπάρχει καὶ διὰ τὸ τρίγωνον ΑΗΓ· διὰ τοῦτο ὁ λόγος τῆς ΑΓ πρὸς ΑΗ εἶναι προσδιωρισμένος. Ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος τῆς ΑΒ πρὸς ΑΓ εἶναι σταθερὸς, ἕπεται ὅτι καὶ ἐκεῖνος τῆς ΑΒ πρὸς ΑΗ καὶ ὁ τῆς ΒΗ πρὸς ΑΗ εἶναι παρομοίως σταθεροί. Τὸ αὐτὸ λοιπὸν ἀκολουθεῖ διὰ τὸν λόγον τῆς ΒΗ πρὸς ΔΗ, ἑπομένως καὶ δι' ἐκεῖνον τῆς ΑΗ πρὸς ΔΗ· περιπλέον παρατηροῦμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΔΗ εἶναι προσδιωρισμένου εἴδους· διότι ἡ γωνία εἰς Η εἶναι προσδιωρισμένη. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΔ εἶναι σταθερᾶς θέσεως.

Σύνθεσις.

Ἐπὶ τῆς ΔΕ ἂς ληφθῇ μία σιγμὴ Θ· ἂς φερθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΘΙ καὶ ΘΛ ποιοῦσαι μὲ τὰς ΔΖ καὶ ΔΕ γωνίας ἀμοιβαίως ἴσας μὲ τὰς δεδομένας· ἔπειτα ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΙΘ ἕως εἰς τὴν Μ ποσότητά τινα ΜΘ ἀλλὰ τοιαύτην ὥστε $\frac{ΜΘ}{ΘΛ}$ νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸν δεδομένον λόγον· ἂς ζητηθῇ μία τρίτη ἀνάλογος ΙΝ μεταξὺ ΙΜ καὶ ΙΘ· τέλος πάντων ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΝΑ· αὕτη ἡ εὐθεῖα εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.

Ἐπειδὴ ΙΜ : ΙΘ : : ΙΘ : ΙΝ· ἕπεται ὅτι ΜΘ : ΙΘ : : ΝΘ : ΙΝ· ἀλλὰ ΑΒ : ΑΗ : : ΝΘ : ΙΝ, ἐκ δὲ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΓΗ καὶ ΘΛΙ ἔχομεν ΑΗ : ΑΓ : : ΙΘ : ΘΛ· λοιπὸν τέλος πάντων ΑΒ : ΑΓ : : ΝΘ × ΙΘ : ΝΙ × ΘΛ : : ΜΘ × ΝΙ : ΙΝ × ΘΛ : : ΜΘ : ΘΛ δηλαδὴ εἰς τὸν δεδομένον λόγον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν τρεῖς εὐθείας δεδομένης θέσεως αἵτινες συντρέχουσιν εἰς τὴν αὐτὴν στιγμὴν τέμνῃ μία τεπάρτη εὐθεῖα ὑπὸ σταθερὰν κλίσιν, καὶ εἰς τρόπον ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τοῦ πρώτου τμήματος ἐπὶ μιᾶς δεδομένης εὐθείας νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου τμήματος ἐπὶ δεδομένων γραμμῶν· ὁ τόπος τῶν στιγμῶν ἀπὸ τὰς ὁποίας μετροῦνται τὰ τμήματα εἶναι εὐθεῖα προσδιωρισμένης θέσεως.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ΑΒΓΔ (σχ. 9) τέμνει τὰς εὐθείας ΕΖ, ΕΗ, ΕΘ ὑπὸ δεδομένας γωνίας, καὶ εἰς τρόπον ὥστε ΑΒ×ΚΛ = ΑΓ×ΜΛ + ΑΔ×ΝΜ· αἱ εὐθεῖαι ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ εἶναι δεδομέναι· λέγω ὅτι ὁ τόπος τῆς στιγμῆς Α εἶναι εὐθεῖα προσδιωρισμένη.

Ἀνάλυσις.

Ἐπειδὴ ΑΓ×ΜΛ = ΑΒ×ΜΛ + ΒΓ×ΜΛ καὶ ΑΔ×ΝΜ = ΑΒ×ΝΜ + ΒΔ×ΜΝ, ἕπεται ὅτι ΑΒ×ΚΛ = ΑΒ(ΜΛ+ΝΜ) + ΒΓ×ΜΛ + ΒΔ×ΝΜ, καὶ ΑΒ×ΚΝ = ΒΓ×ΜΛ + ΒΔ×ΜΝ· ἂς ληφθῇ ἡ ΜΟ εἰς τρόπον ὥστε ΒΓ : ΒΔ : : ΜΝ : ΜΟ, τότε ΒΓ×ΜΟ = ΒΔ×ΝΜ. ὅθεν ΑΒ×ΚΝ = ΒΓ(ΜΛ + ΜΟ) = ΒΓ×ΟΛ, καὶ ΑΒ : ΒΓ : : ΟΛ : ΚΝ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ὁ λόγος τῆς ΑΒ πρὸς ΒΓ εἶναι προσδιωρισμένος· ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΒΓΕ εἶναι γνωστοῦ εἴδους ὁ λόγος τῆς ΒΕ πρὸς ΒΓ εἶναι δεδομένος· ὁ λόγος λοιπὸν τῆς ΑΒ πρὸς ΒΕ εἶναι γνωστός. Τὸ τρίγωνον ΒΑΕ εἶναι προσδιωρισμένου εἴδους· διότι ἡ γωνία ΑΒΕ εἶναι γνωστή· ἀλλὰ τοῦτο δὲν δηλοῖ ἄλλο παρ' ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΕ εἶναι προσδιωρισμένης θέσεως.

Σύνθεσις.

Αφ' οὗ ἐπὶ τῆς ΓΘ ληφθῇ μία σιγμὴ Θ, ἂς ἀχθῇ ἡ ΘΗΖ ὑπὸ τὴν δεδομένην κλίσιν· ἂς ληφθῇ ἡ ΜΟ τοιούτου μήκους ὥςε νὰ ἔχωμεν ΖΗ : ΖΘ : : ΝΜ : ΜΟ· ἂς ἀφαιρεθῇ ἡ ΘΖ ποσότητα τινὰ ΖΙ ὥςε ΚΝ : : ΟΛ : : ΖΗ : ΙΖ· λέγω ὅτι ἡ ΕΙ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

Επειδὴ ΒΓ : ΑΒ : : ΖΗ : ΙΖ : : ΝΚ : ΟΛ· ἕπεται ὅτι ΑΒ × ΚΝ = ΒΓ × ΟΛ· ἀλλὰ ΒΓ : ΒΔ : : ΖΗ : ΖΘ : : ΝΜ : ΜΟ· λοιπὸν ΒΓ × ΜΟ = ΒΔ × ΜΝ· διὰ τοῦτο ΑΒ × ΚΝ = ΒΓ × ΟΛ = ΒΓ (ΜΟ + ΜΛ) = ΒΓ × ΜΛ + ΒΔ × ΜΝ = ΒΓ × ΜΛ + ΜΝ(ΑΔ — ΑΒ)· ὅθεν συνάγομεν ὅτι ΑΒ × ΚΛ = ΑΒ × ΜΛ + ΒΓ × ΜΛ + ΑΔ × ΝΜ = ΑΓ × ΜΛ + ΑΔ × ΝΜ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

Θεώρημα.

Εὰν τέσσαρας εὐθείας δεδομένης θέσεως αἵτινες συντρέχουσιν εἰς τὴν αὐτὴν σιγμὴν τέμνῃ μία πέμπτη γραμμὴ ὑπὸ σαθερὰν κλίσιν, καὶ εἰς τρόπον ὥςε τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου τμήματός της ἐπὶ δεδομένων εὐθειῶν νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων τοῦ τρίτου καὶ τετάρτου τμήματός της ἐπὶ ἄλλων δεδομένων γραμμῶν· ἡ σιγμὴ ἐκ τῆς ὁποίας μετροῦνται τὰ τμήματα ἔχει διὰ τόπον προσδιωρισμένην εὐθεῖαν.

Εὰν ΑΒΓΔΕ τέμνῃ τὰς τέσσαρας γραμμὰς ΖΗ, ΖΘ, ΖΙ, ΖΚ (σχ. 10) ὑπὸ σαθερὰν γωνίαν, καὶ εἰς τρόπον ὥςε ΑΒ × ΜΝ + ΑΓ × ΝΟ = ΑΔ × ΟΠ + ΑΕ × ΠΚ, ὅπου αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ΜΝ, ΝΟ, ΟΠ, ΠΚ εἶναι δεδομέναι· ἡ σιγμὴ Α διατρέχει προσδιωρισμένης θέσεως γραμμήν.

Ἀνάλυσις

Ἐπειδὴ ΑΒ×ΜΝ + ΑΓ×ΝΟ = ΑΔ×ΟΠ + ΑΕ×ΠΚ, ἕπεται ὅτι ΑΒ×ΜΟ + ΒΓ×ΝΟ = ΑΒ×ΟΚ + ΔΒ×ΟΠ + ΒΕ×ΠΚ· διὰ τοῦτο ΑΒ×ΜΚ + ΒΓ×ΝΟ = ΒΔ×ΟΠ + ΒΕ×ΠΚ. Τώρα ἂς κάμωμεν ΒΔ : ΒΓ : : ΝΟ : ΟΡ, καὶ ΒΔ : ΒΕ : : ΠΚ : ΠΣ· τότε ΒΔ×ΟΡ = ΒΓ×ΝΟ, καὶ ΒΔ×ΠΣ = ΒΕ×ΠΚ· ὅθεν συνάγομεν ὅτι ΑΒ×ΜΚ + ΒΔ×ΟΡ = ΒΔ×ΟΠ + ΒΔ×ΠΣ ἢ ΑΒ×ΜΚ = ΒΔ×ΣΡ, δηλαδὴ ΑΒ : ΒΔ : : ΣΡ : ΜΚ.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον ΒΔΖ εἶναι προσδιωρισμένου εἴδους, ὁ λόγος τῆς ΑΒ πρὸς ΒΖ εἶναι προσδιωρισμένος, καὶ περιπλέον ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΒΖ εἶναι σταθερὰ, φανερὸν εἶναι ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΑΖ εἶναι προσδιωρισμένου εἴδους ἤ, τὸ ὁποῖον εἶναι ταὐτὸ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΖ εἶναι προσδιωρισμένης θέσεως.

Σύνθεσις.

Ἀφ' οὗ ἐπὶ τῆς ΖΚ' ληφθῇ μία στιγμὴ Κ, ἂς ἀχθῇ ἡ Κ'ΙΘΗ ὑπὸ τὴν δεδομένην κλίσιν· ἂς γένῃ ἡ ΟΡ = $\frac{ΗΘ×ΝΟ}{ΗΙ}$ καὶ ΠΣ = $\frac{ΗΚ×ΠΚ}{ΗΙ}$· τέλος πάντων ἂς ἐκβληθῇ ἡ Κ'Η μίαν ποσότητα ΗΛ ἀλλὰ τοιαύτην ὥστε ΜΚ : ΣΡ : : ΗΙ : ΗΛ· λέγω ὅτι ΖΛ εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.

Τῷ ὄντι ΒΔ : ΒΓ : : ΗΙ : ΗΘ : : ΝΟ : ΟΡ, ἑπομένως ΒΔ×ΟΡ = ΒΓ×ΝΟ· περιπλέον ΒΔ : ΒΕ : : ΗΙ : ΗΚ : : ΠΚ : ΠΣ· λοιπὸν ΔΒ×ΠΣ = ΒΕ×ΠΚ· μετὰ ταῦτα ΜΚ : ΣΡ : : ΗΙ : ΗΛ : : ΒΔ : ΑΒ· λοιπὸν ΜΚ×ΑΒ = ΣΡ×ΒΔ· οὕτως ΑΒ×ΜΚ + ΒΓ×ΝΟ = ΒΔ×ΣΡ + ΒΔ×ΟΡ = ΒΔ×ΣΟ = ΒΔ×ΠΣ + ΒΔ×ΟΠ = ΒΕ×ΠΚ + ΒΔ×ΟΠ· προσθέτοντες εἰς τὰ δύο μέλη τὸ γινόμενο ΑΒ×ΟΚ τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΑΒ×

ΝΚ + ΑΒ × ΝΟ ἢ μὲ ΑΒ × ΠΚ + ΑΒ × ΟΠ, εὑρίσκομεν ἐξ αἰτίας τῆς ΜΟ = ΜΝ + ΝΟ, ΑΒ × ΜΝ + ΑΓ × ΝΟ = ΑΔ × ΟΠ + ΑΕ × ΠΚ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ. ιΑ'.

Θεώρημα.

Ἐὰν δεδομένης θέσεως εὐθεῖαν τέμνωσιν ἄλλαι δύο ὑπὸ κλίσιν δεδομένην, καὶ εἰς τρόπον ὥςε νὰ διαχωρίζωσιν ἐπ' αὐτῆς τμήματα μετρούμενα ἐκ δύο ςαθερῶν σιγμῶν, καὶ τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἶναι ςαθερὸς· ἡ σιγμὴ τῆς ἑνώσεως τῶν κινητῶν εὐθειῶν θέλει ἔχει διὰ τόπον προσδιορισμένην εὐθεῖαν.

Ἂς φερθῶσιν λοιπὸν αἱ ΑΒ καὶ ΑΓ (σχ. 11. πί. 7) εἰς τρόπον ὥςε αἱ γωνίαι ΑΒΖ καὶ ΑΓΖ, καὶ ὁ λόγος τῶν τμημάτων ΕΔ, ΓΕ μετρουμένων ἐκ τῶν ςαθερῶν σιγμῶν Δ καὶ Ε νὰ ἦναι ςαθερὰ· λέγω ὅτι ὁ τόπος τῆς Α θέλει εἶναι προσδιορισμένη εὐθεῖα.

Ανάλυσις.

Ἂς ληφθῇ ἡ σιγμὴ Ζ εἰς τρόπον ὥςε ΖΔ νὰ νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὴν ΖΕ ἴσον μὲ τὸν δεδομένον· ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΖΑ. Επειδὴ ΖΔ : ΖΕ :: ΔΒ : ΕΓ· ἕπεται ὅτι ΖΔ : ΖΕ :: ΖΒ : ΖΓ· διὰ τοῦτο ὁ λόγος τῆς ΖΒ πρὸς ΖΓ καὶ ὁ τῆς ΖΒ πρὸς ΒΓ εἶναι προσδιωρισμένοι· ἀλλ' αἱ γωνίαι ΖΒΑ καὶ ΖΓΑ εἶναι δεδομέναι· λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΑΓ εἶναι δεδομένου εἴδους· ὁ λόγος λοιπὸν τῆς ΑΒ πρὸς ΑΓ εἶναι δεδομένος· ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ αὐτὸ ὑπάρχει καὶ διὰ τὸν λόγον τῆς ΖΒ πρὸς ΑΒ· ἀπὸ ἐοῦ πάλιν ἀκολουθεῖ ὅτι τὸ τρίγωνον ΖΒΑ εἶναι προσδιωρισμένου εἴδους, ἢ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΖΑ εἶναι προσδιωρισμένης θέσεως.