Τέλος πάντων ἐκ τῶν τριῶν σιγμῶν Θ, Ε, Ι ἢ Θ, Ε, Ζ ἂς διέλθῃ περιφέρεια κύκλου· αὕτη θέλει πληροῖ εἰς τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος.

Τῷ ὄντι, τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ὅς ις διέρχεται ἐκ τῶν σιγμῶν Ε καὶ Θ, πρέπει νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ΖΟ ἥτις εἶναι κάθετος ἐπὶ ἡμισείας τῆς ΕΘ. Ἔστω Ο τοῦτο τὸ κέντρον, καὶ ἂς φερθῇ ἡ εὐθεῖα ΟΙ, καὶ ἡ κάθετος ΟΚ. Ἐπειδὴ ΟΛ×ΛΕ=ΛΙ² διὰ τοῦτο ὁ κύκλος ἅπτεται τῆς ΑΒ εἰς τὴν Ι, καὶ ἡ γωνία ΟΙΖ εἶναι ὀρθή. Διὰ τοῦτο τὰ τρίγωνα ΚΟΖ καὶ ΙΟΖ εἶναι ἴσα· διότι ἔχουν τὴν πλευρὰν ΟΖ κοινὴν, καὶ περιπλέον τὰς γωνίας ΟΚΖ καὶ ΟΖΚ ἀμοιβαίως ἴσας μὲ τὰς ΟΙΖ καὶ ΟΖΙ· διὰ τοῦτο ΟΙ=ΟΚ. Λοιπὸν ὁ γεγραμμένος κύκλος ἐκ τῆς σιγμῆς Ο, ὡς κέντρου, μὲ τὴν ΟΙ ὡς ἀκτῖνα διέρχεται ἐκ τῆς Κ καὶ ἅπτεται αὐτῆς εἰς ταύτην τὴν σιγμήν.

Πόρισμα. Ἐὰν ἡ σιγμὴ Ε εὑρίσκεται ἐπὶ μιᾶς τῶν δεδομένων γραμμῶν, παραδείγματος χάριν, ἐπὶ τῆς ΑΒ, τότε συμπίπτει μὲ τὴν σιγμὴν τῆς ἁφῆς τῆς ΑΒ, καὶ τὸ πρόβλημα λύεται ἁπλούστατα. Ἐπειδὴ τὸ κέντρον Ο μὲ τὸ νὰ εὑρίσκεται πάντοτε ἐπὶ τῆς ΟΖ, προσδιορίζεται διὰ τῆς κοινῆς τομῆς ταύτης τῆς γραμμῆς μὲ τὴν κάθετον ΙΟ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ'.

Πρόβλημα.

Ἐκ δύο δεδομένων σιγμῶν νὰ φέρωμεν περιφέρειαν κύκλου ἥτις νὰ ἅπτεται δεδομένου κύκλου.

Ζητοῦμεν κύκλον ὅς ις νὰ διέρχεται ἐκ τῶν σιγμῶν Α (σχ. 28. Πίναξ 6) καὶ νὰ ἅπτεται ἑνὸς ἄλλου τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον εἶναι Γ.

Ανάλυσις.

Εκ τῆς Δ στιγμῆς τῆς ἁφῆς τῶν δύο κύκλων ἂς φερθῶσιν αἱ ΑΔΕ, ΒΔΖ· ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΖ. Εκ τῆς Ζ ἂς ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΖΗ· καὶ ἂς φερθῇ ἡ διάμετρος ΒΘΓΙ. Επειδὴ ΖΗ ἅπτεται τοῦ δεδομένου κύκλου, ἡ γωνία ΒΖΗ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΖΕΔ, καὶ διὰ τοῦτο μὲ τὴν ΒΑΔ, ἐπειδὴ ΖΕ καὶ ΑΒ εἶναι παράλληλοι. Αλλὰ τὰ τρίγωνα ΒΗΖ καὶ ΒΔΑ ἔχουν προσέτι κοινὴν γωνίαν εἰς τὸ Β· λοιπὸν εἶναι ὅμοια, ἑπομένως ΒΖ : ΒΗ : : ΒΑ : ΒΔ, ὅθεν ΒΑ × ΒΗ = ΒΖ × ΒΔ = ΒΙ × ΒΘ. Τώρα ἡ ΒΙ καὶ ΒΘ εἶναι δεδομέναι· λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΒΑ × ΒΗ εἶναι προσδιορισμένον· διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὴν θέσιν τῆς στιγμῆς Η. Οθεν ἡ ἐφαπτομένη ΗΖ, ἡ γραμμὴ ΒΖ, καὶ ἡ στιγμὴ Δ εἶναι προσδιορισμένα. Λοιπὸν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὸν κύκλον· διότι γνωρίζομεν τρεῖς στιγμὰς Α, Β, Δ.

Σύνθεσις.

Ας φερθῇ ἐκ τῆς Β εἰς τὴν Η μία τετάρτη ἀνάλογος τῶν γραμμῶν ΒΑ, ΒΙ, ΒΘ· ἂς ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΗΖ· ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεία ΖΒ ἥτις τέμνει εἰς τὴν Δ τὴν δεδομένην περιφέρειαν, καὶ ἂς διέλθῃ εἰς κύκλος ἐκ τῶν τριῶν στιγμῶν Α, Β καὶ Δ. Λέγω ὅτι ὁ κύκλος οὗτος εἶναι ὁ ζητούμενος.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τοῦτο ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν τὰς ΑΔΕ, ΖΕ καὶ τὴν διάμετρον ΒΘΓΙ. Επειδὴ ΒΔ : ΒΙ : : ΒΘ : ΒΗ· διὰ τοῦτο ΒΑ × ΒΗ = ΒΙ × ΒΘ = ΒΖ × ΒΔ. Λοιπὸν ΒΖ : ΒΗ : : ΒΑ : ΒΔ. Επομένως τὰ τρίγωνα ΒΗΖ καὶ ΒΔΑ, ἐπειδὴ ἔχουν μίαν γωνίαν κοινὴν μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων, εἶναι ὅμοια. Οθεν συνάγομεν ὅτι ἡ ΒΖΗ γωνία εἶναι ἴση μὲ τὴν

ΒΑΔ· ὅθεν ΒΖΗ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΒΑΔ· ἀλλὰ ΒΖΗ ἴση τῇ ΖΕΔ· ἄρα καὶ αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ΒΑΕ καὶ Ε εἶναι ἴσαι· τοῦτο δεικνύει ὅτι ἡ ΖΕ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ. Ἐκ τούτου δείκνυται ὅτι οἱ δύο κύκλοι ΔΕΖ, ΔΗΒ ἁπτονται εἰς τὴν Δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ'

Πρόβλημα.

Ἐκ δεδομένης στιγμῆς νὰ κάμωμεν νὰ περάσῃ κύκλος ὅστε νὰ ἅπτεται ἄλλου δεδομένου καὶ εἰς δομένης εὐθείας.

Ζητοῦμεν κύκλον ὅστις νὰ διέλθῃ ἐκ τῆς στιγμῆς Α, καὶ νὰ ἅπτεται 1ον τῆς εὐθείας ΓΔ (σχ. 29 Ἡνωξ 5). 2ον τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον εἶναι Β.

Ἀνάλυσις.

Ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ δεδομένου κύκλου, ἂς φερθῇ ἡ κάθετος ΕΒΗ· ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΕΙ ἥτις ἂς ἐκβληθῇ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΓΔ εἰς τὴν στιγμὴν Θ· ἂς φερθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΖΙΚ καὶ ΘΚ· ἐπειδὴ ἡ γωνία ΘΙΚ εἶναι ἴση μὲ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΕΙΖ, εἶναι καὶ αὐτὴ ὀρθὴ, καὶ διὰ τοῦτο ΘΚ εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου ΙΛΑ, καὶ Θ ἡ στιγμὴ τῆς ἁφῆς τούτου τοῦ κύκλου καὶ τῆς εὐθείας ΓΔ. Τὰ τρίγωνα ΘΕΗ καὶ ΖΕΙ εἶναι λοιπὸν ὅμοια, ἑπομένως ΘΕ : ΕΗ :: ΕΖ : ΕΙ· ὅθεν ΘΕ×ΕΙ = ΕΗ×ΕΖ. Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΕΛΑ· τότε ΑΕ×ΕΛ = ΘΕ×ΕΙ = ΕΗ×ΕΖ· ἐπειδὴ δὲ τὸ ὀρθογώνιον ΕΗ×ΕΖ εἶναι δεδομένον, διὰ τοῦτο καὶ τὸ ΕΘ×ΕΙ εἶναι γνωστὸν, παρομοίως καὶ ΕΛ, καὶ ἡ στιγμὴ Α. Τώρα ὅταν δύο στιγμαὶ Α καὶ Δ τοῦ ζητουμένου κύκλου ἦναι γνωσταὶ καθὼς καὶ μία δεδομένη ἐφαπτομένη, τὸ πρόβλημα λύεται ὡς εἴπομεν εἰς τὴν πρότασιν Κζ'.

Σύνθεσις.

Ας φερθῇ ἡ ΕΑ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ κάθετος ΕΗ· ἂς ληφθῇ μία τετάρτη ἀνάλογος ΕΛ τῶν γραμμῶν ΕΑ, ΕΗ, ΕΖ καὶ κατὰ τὴν ΚϛΓ πρότασιν ἂς γραφθῇ κύκλος, ὅςις διερχόμενος ἐκ τῶν σιγμῶν Α καὶ Α νὰ ἅπτεται τῆς εὐθείας ΓΔ· λέγω ὅτι ὁ κύκλος οὗτος θέλει ἅπτεται καὶ τοῦ δεδομένου.

Διὰ νὰ τὸ ἀποδείξωμεν, ἂς φέρωμεν τὴν διάμετρον ΘΚ, τὴν εὐθεῖαν ΕΘ ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν ΕΙΖ εἰς τὴν Ι, καὶ τὴν εὐθεῖαν ΖΙΚ τὴν ὁποίαν ἐκβάλλομεν ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΘΚ. Ἡ ὁμοιότης τῶν τριγώνων ΘΕΗ καὶ ΖΕΙ δίδει ΘΕ : ΕΗ :: ΕΖ : ΕΙ, ἑπομένως ΘΕ×ΕΙ=ΕΗ×ΕΖ· ἀλλὰ ΑΕ : ΕΗ :: ΕΖ : ΕΛ, ὅθεν ΑΕ×ΕΛ=ΕΗ×ΕΖ. Λοιπὸν ΘΕ×ΕΙ=ΑΕ×ΕΛ. Τοῦτο φανερόνει ὅτι ἡ σιγμὴ Ι εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας ΘΙΚ. ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι οἱ δύο κύκλοι ἅπτονται εἰς τὴν σιγμὴν Ι· καὶ τῷ ὄντι, ἔχουν εἰς τὴν αὐτὴν σιγμὴν τὴν ἰδίαν ἐφαπτομένην· ἐπειδὴ, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἐκ τῆς ἰδίας σιγμῆς Ι ἄγεται εἰς ἕκαστον μία ἐφαπτομένη, αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας αἱ δύο αὗται ἐφαπτόμεναι σχηματίζουν μὲ τὰς ΙΖ καὶ ΙΚ, εἶναι ἀμοιβαίως ἴσαι μὲ τὴν ΙΕΖ καὶ ΙΘΚ, καὶ διὰ τοῦτο ἴσαι μεταξύ των· διότι ΕΖ καὶ ΘΚ εἶναι παράλληλοι. Οὕτως αἱ δύο αὗται ἐφαπτόμεναι συγχέονται εἰς μίαν μόνην.

Πόρισμα. Τὸ πρόβλημα ἤθελεν ἀποκατασταθῆ ἁπλούστερον, ἐὰν ἡδεδομένη σιγμὴ εὑρίσκετο ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας, ἢ ἐπὶ τοῦ δεδομένου κύκλου. Τότε ἤθελε συμπέσει μὲ τὴν μίαν ἢ ἄλλην σιγμὴν τῆς ἀφῆς Θ ἢ Ι. Εἰς ταύτην τὴν περίςασιν, ἀφ' οὗ φέρωμεν τὴν ΕΙΘ, καὶ ΖΙΚ, ἡ κάθετος ΘΚ προσδιορίζει τὴν διάμετρον τοῦ ζητουμένου κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

Πρόβλημα.

Ἐκ δεδομένης σιγμῆς νὰ φέρωμεν κύκλον ἐφαπτόμενον δύο ἄλλων δεδομένων.

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον Ο τοῦ κύκλου ὅστις διερχόμενος ἐκ τῆς σιγμῆς Γ (σχ. 30.) νὰ ἅπτεται δύο κύκλων τῶν ὁποίων τὰ κέντρα εἶναι Α καὶ Β.

Ἀνάλυσις.

Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἥτις ἂς ἐκβληθῇ ἕως ὁποῦ νὰ συναπαντήσῃ τὴν προεκβολὴν ἐκείνης ἥτις ἑνώνει τὰς δύο σιγμὰς τῆς ἁφῆς Ε καὶ Ζ, ἂς φερθῶσιν αἱ ΟΑ, καὶ ΟΒ, ΑΗ καὶ ΒΘ καὶ ΓΕΙ· ἂς ἐκβληθῶσιν αἱ ΙΗ καὶ ΔΓ ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς τὸ Κ.

Τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΕΟΖ, ΕΑΗ καὶ ΖΒΘ εἶναι φανερὰ ὅμοια· λοιπὸν ΑΗ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΖ, καὶ ΑΕ τῆς ΒΘ· ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ΑΕ : ΒΘ : : ΑΔ : ΒΔ, καὶ ἐπειδὴ ὁ λόγος ταύτης τῆς ἀναλογίας εἶναι γνωστὸς, ἡ σιγμὴ Δ εἶναι προσδιορισμένη. Περιπλέον ΑΗ : ΒΖ : : ΔΗ : ΔΖ, καὶ ΔΗ : ΔΖ : : ΔΚ : ΔΓ· διότι ἐξ αἰτίας τῶν ἁφῶν τῶν κύκλων Ο καὶ Α, ἡ γραμμὴ ΙΗ εἶναι παράλληλος τῆς ΖΗ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ σιγμὴ Δ ὡς καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΔ, εἶναι προσδιορισμένη, ἕπεται ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀναλογίας ὅτι ἡ ΔΚ, ὡς καὶ ἡ σιγμὴ Κ, εἶναι παρομοίως γνωστή. Ἐκ τούτου καὶ ἐκ τῆς ΙΖ' προτάσεως τοῦ πρώτου βιβλίου ἀκολουθεῖ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΗΕ ἡ περιεχομένη μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΚΙ καὶ ΓΙ, καὶ ἡ ὁποῖα διέρχεται ἐκ τῆς δεδομένης σιγμῆς Δ εἶναι προσδιορισμένης θέσεως. Λοιπὸν ΛΕΟ εἶναι παρομοίως γνωστῆς

θέσεως. Τώρα ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἡ ΟΓ, φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ γωνία ΟΓΕ εἶναι γνωστὴ ἐπειδὴ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΕΔ. Ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΟ καὶ τὸ κέντρον Ο εἶναι παρομοίως γνωστά.

Σύνθεσις.

Ας ληφθῇ ἡ σιγμὴ Δ εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἔχωμεν ΑΕ : ΒΘ : : ΑΒ : ΒΔ· ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΔ, καὶ ἐκ τῆς Δ εἰς τὴν Κ ἐπὶ τῆς ΓΔ ἂς φερθῇ μία τετάρτη ἀνάλογος ΔΚ, τῶν γραμμῶν ΒΘ, ΑΕ καὶ ΔΓ. ἔπειτα ἐκ τῶν σιγμῶν Κ καὶ Γ ἂς φερθῶσιν αἱ ΚΙ καὶ ΓΙ εἰς τρόπον ὥστε ἡ ΗΕ ἐκβαλλομένη νὰ διέλθῃ ἐκ τοῦ Δ. Τοῦτο ἐκτελοῦμεν διὰ τῆς ΙΖ' προτάσεως τοῦ πρώτου βιβλίου. Τούτου γενομένου ἂς κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς βάσεως ΕΓ ἓν τρίγωνον ἰσοσκελὲς, τοῦ ὁποίου μία τῶν πλευρῶν νὰ εὑρίσκεται εἰς τὴν προεκβολὴν τῆς ΑΕ. Λέγω ὅτι ἡ κορυφὴ Ο τούτου τοῦ τριγώνου εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τοῦτο, φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΗ, ΗΖ, ΟΒ καὶ ΒΘ. Τώρα, ἐπειδὴ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΑΕ ἡ ΑΗ : ΒΘ ἡ ΒΖ : : ΑΔ : ΒΔ, καὶ εἰς τὰ τρίγωνα ΑΔΗ καὶ ΒΔΖ ἡ γωνία Δ εἶναι κοινὴ, φανερὸν εἶναι ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια. Ἑπομένως ΑΔ : ΒΔ : : ΔΗ : ΔΖ : : ΔΚ : ΔΓ. Τοῦτο φανερόνει ὅτι ἡ ΙΗ εἶναι παράλληλος τῆς ΖΓ, καὶ διὰ τοῦτο οἱ κύκλοι Ο καὶ Α ἅπτονται εἰς Ε. Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΒΖΘ εἶναι ἰσοσκελὲς διότι αἱ πλευραί του ΒΖ καὶ ΒΘ εἶναι ἀμοιβαίως παράλληλοι· τῶν πλευρῶν ΑΗ καὶ ΑΕ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΗΑΕ· λοιπὸν οἱ κύκλοι Ο καὶ Β συναπαντῶνται εἰς τὴν σιγμὴν Ζ. Ἐπειδὴ δὲ ΒΘ

εἶναι παράλληλος τῆς ΕΟ ἡ σιγμὴ αὕτη εἶναι σιγμὴ ἀφῆς; Περιπλέον διὰ τὴν ἰσότητα τῆς γωνίας ΕΓΦ μὲ τὴν ΓΕΟ, ἡ πλευρὰ ΓΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΟΓ. Διὰ τοῦτο ὁ γεγραμμένος κύκλος ἐκ τοῦ κέντρου Ο καὶ διερχόμενος ἐκ τῆς σιγμῆς Ζ, καὶ Ε διέρχεται παρομοίως καὶ ἐκ τῆς σιγμῆς Γ.

Αλλη Λύσις.

Ανάλυσις.

Ας ἑνωθῶσι τὰ κέντρα Α, Β, Ο (σχ. 30). Ας ἐκβληθῇ ἡ ΑΒ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν εὐθεῖαν ἥτις ἑνώνει τὰς δύο σιγμὰς τῶν ἁφῶν Ε, Ζ εἰς τὴν σιγμὴν Δ, ἃς φερθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΒΘ καὶ ΓΔ, καὶ ἃς ἐκβληθῇ αὕτη ἡ τελευταία ἕως ὁποῦ νὰ τέμνῃ τὸν κύκλον εἰς Α.

Επειδὴ τὰ τρίγωνα ΕΟΖ καὶ ΖΒΘ εἶναι ἰσοσκελῆ, αἱ γωνίαι ΟΖΕ καὶ ΒΖΘ εἶναι ἀμοιβαίως ἴσαι μὲ τὰς γωνίας ΟΕΖ, καὶ ΒΘΖ, αἱ ὁποῖαι διὰ τοῦτο εἶναι ἴσαι μεταξύ των· ὅθεν ἕπεται ὅτι ΕΟ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΘ, καὶ διὰ τοῦτο ΑΕ : ΒΘ : : ΔΑ : ΔΒ. Τοῦτο δεικνύει ὅτι ἡ σιγμὴ Δ εἶναι προσδιορισμένη. Περιπλέον ΔΑ : ΒΔ : : ΔΕ : ΔΘ ἢ : : ΔΕ × ΔΖ : ΔΘ × ΔΖ. Αλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΔΘ × ΔΖ εἶναι γνωστὸν, ὡς ἰσοδυναμοῦν μὲ τὸ ὀρθογώνιον τῶν τμημάτων τῶν διαχωριζομένων ἐπὶ τῆς ΒΔ ἐκ τοῦ κύκλου Β, λοιπὸν τὰ ὀρθογώνια ΔΕ × ΔΖ καὶ ΔΓ × ΔΑ εἶναι προσδιορισμένα. Επειδὴ δὲ ΔΓ εἶναι δεδομένη, διὰ τοῦτο ἡ ΔΑ ὡς καὶ ἡ σιγμὴ Α, εἶναι παρομοίως προσδιορισμένη. Οὕτως τὸ πρόβλημα ἤχθη εἰς τὴν πρότασιν ΚΗ' τοῦ παρόντος βιβλίου.

Σύνθεσις.

Ας ληφθῇ ἡ σιγμὴ Δ εἰς τρόπον ὥστε ΑΕ : ΒΘ : : ΑΔ : ΒΔ. Ας ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΓ καὶ ἂς ἐκβληθῇ ποσότητα τινὰ ΓΛ, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον ΔΓ×ΓΛ νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ σχηματιζόμενον ὀρθογώνιον ἐκ τῶν δύο μερῶν τῆς διατεμνούσης τῆς ἡγμένης ἐκ φῆς σιγμῆς Δ εἰς τὸν κύκλον ΒΔ, ὁποῖον ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΒΘ. Επειτα ἂς γρφθῇ κύκλος ὅστις διερχόμενος ἀπὸ τὰς σιγμὰς Γ καὶ Λ νὰ ἅπτεται τοῦ κύκλου Α. Λέγω ὅτι θέλει ἅπτεται καὶ τοῦ κύκλου Β·

Τῷ ὄντι ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΕΘ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΒΘ παράλληλος τῆς ΑΟ. Επειδὴ ΑΕ : ΒΘ : : ΑΔ : ΒΔ, φανερὸν εἶναι ὅτι ΕΘ ἐκβαλλομένη συναπαντᾷ τὴν ΑΔ εἰς τὴν Δ· λοιπὸν ΑΕ : ΒΘ : : ΔΕ : ΔΘ ἢ : : ΔΕ×ΔΖ : ΔΘ×ΔΖ. Αλλ' ἐκ τῆς κατασκευῆς ΑΕ : ΒΘ : : ΔΓ×ΔΛ : ΔΘ×ΔΖ· λοιπὸν ΔΓ×ΔΛ = ΔΕ×ΔΖ, ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι ἡ σιγμὴ Ζ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο. Λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΕΟΖ εἶναι ἰσοσκελές, τὸ αὐτὸ πρέπει νὰ ἀκολουθῇ καὶ διὰ τὸ τρίγωνον ΘΒΖ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΕΟΖ : οὕτως Ζ ἀνήκει παρομοίως εἰς τὸν κύκλον Β, καὶ εἶναι ἡ σιγμὴ τῆς ἁφῆς τῶν κύκλων Β καὶ Ο.

Εὰν Λ συμπέσῃ μὲ τὴν Γ, ἡ κατασκευὴ ἐκτελεῖται διὰ τοῦ πορίσματος τῆς ἀνωτέρω προτάσεως.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΛΔ'.

Πρόβλημα.

Νὰ γράψωμεν κύκλον ἐφαπτόμενον δύο δεδομένων εὐθειῶν καὶ δεδομένου κύκλου.

Ζητοῦμεν λοιπὸν κύκλον, ὅστις νὰ ἅπτεται τῶν γραμμῶν ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ. 31.) καὶ ἄλλου κύκλου τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον εἶναι Ε.

Ανάλυσις.

Ας φερθῇ ἡ ΖΕ, καὶ εἰς τὰς στιγμὰς τῶν ἀφῶν αἱ εὐθεῖαι ΖΘ, ΖΙ. Επειτα ἐκ τῆς στιγμῆς Ζ λαμβανομένης ὡς κέντρου, ἂς γραφθῇ μ' ἀκτῖνα ΖΕ περιφέρεια κύκλου, ὅστις νὰ συναπαντᾷ τὰς ΖΙ καὶ ΖΘ ἐκβαλλομένας τὴν μὲν εἰς τὸ Κ, τὴν δὲ εἰς τὸ Λ, ἐκ τῶν στιγμῶν τούτων ἂς ἀχθῶσιν αἱ ἐφαπτόμεναι ΜΝ, ΟΠ.

Επειδὴ ΖΕ = ΖΚ = ΛΖ, καὶ ΖΗ = ΖΘ = ΖΙ· ἕπεται ὅτι ΗΕ = ΘΚ = ΙΛ. Αλλ' αἱ ἐφαπτόμεναι ΓΔ καὶ ΟΠ ὡς κάθετοι ἐπὶ τῆς ἰδίας εὐθείας ΖΚ εἶναι παράλληλοι· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ΑΒ εἶναι παράλληλος τῆς ΜΝ. Λοιπὸν ΟΠ καὶ ΜΝ εἶναι προσδιωρισμένης θέσεως, καὶ ἐκ τῆς ΚΖ προτάσεως τοῦ παρόντος βιβλίου ὁ κύκλος ΕΚΛ εἶναι γνωστός· διὰ τοῦτο καὶ ὁ συγκεντρικὸς κύκλος ΗΘΙ εἶναι προσδιωρισμένος.

Σύνθεσις.

Εἰς ἓν διάστημα ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ δεδομένου κύκλου, ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΜΝ καὶ ΟΠ παράλληλοι ἡ μὲν τῆς ΑΒ, ἡ δὲ τῆς ΓΔ. Επειτα διὰ τῆς ΚΖ προτάσεως τοῦ παρόντος βιβλίου, ἂς εὑρεθῇ τὸ κέντρον Ζ τοῦ κύκλου ὅστις διερχόμενος ἐκ τῆς στιγμῆς Ε νὰ ἅπτεται τῆς ΜΝ καὶ ΟΠ. Λέγω ὅτι Ζ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου.

Τῷ ὄντι ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΖΕ, ΖΚ καὶ ΖΛ. Επειδὴ ΗΕ = ΘΚ = ΙΛ, φανερὸν εἶναι ὅτι ΖΗ = ΖΘ = ΖΙ. Διὰ τοῦτο ὁ κύκλος ἅπτεται εἰς Θ καὶ Ι. ἐπειδὴ ΓΔ καὶ ΑΒ εἶναι κάθετοι ἀμοιβαίως ἐπὶ ἐπὶ τῶν ΖΚ καὶ ΖΛ.

Σχόλιον. Τὰ ἀνωτέρω ἓξ προβλήματα περιέχονται

εἰς τοῦτο τὸ γενικὸν πρόβλημα: Τριῶν δεδομένων, ἢ σιγμῶν, ἢ εὐθειῶν, ἢ κύκλων, νὰ γράψωμεν ἕνα κύκλον ὅστις νὰ προσδιορίζεται ἐκ τούτων τῶν δεδομένων. Η ἔκφρασις αὕτη παρέχει δέκα ἰδιαιτέρας περιστάσεις, δύο τῶν ὁποίων ἐθεωρήθησαν εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας· ἡ μὲν πρώτη καθ' ἣν πρέπει νὰ φέρωμεν μίαν περιφέρειαν ἐκ τριῶν δεδομένων σιγμῶν, ἡ δὲ δευτέρα καθ' ἣν ζητοῦμεν νὰ φέρωμεν κύκλον ὅστις νὰ ἅπτεται τριῶν δεδομένων εὐθειῶν, καθὼς ὅταν ἐγγράφωμεν ἕνα κύκλον εἰς ἓν τρίγωνον· αἱ ἄλλαι ἕξ περιστάσεις ἐθεωρήθησαν ἀνωτέρω. Μένουν λοιπὸν ἄλλαι δύο τοῦτ' ἔστι 1. εἰς τὴν ὁποίαν ἔχομεν τρεῖς δεδομένους κύκλους, καὶ ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν τέταρτον ὅστις νὰ ἅπτεται τῶν τριῶν δεδομένων. 2. εἰς τὴν ὁποίαν ἔχομεν δύο κύκλους καὶ μίαν εὐθείαν, καὶ ζητοῦμεν νὰ γράψωμεν κύκλον ὅστις νὰ ἅπτεται τῶν δεδομένων δύο κύκλων καὶ τῆς δεδομένης εὐθείας. (1)

Μία ἀρχὴ κοινὴ ἥτις ἐπαρρησιάσθη εἰς ὅλας τὰς γνωστὰς λύσεις καταστίνει ἁπλουστέρας τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος. Ἐὰν λάβωμεν σιγμὰς ἀντὶ τῶν δεδομένων εὐθειῶν ἢ τῶν δεδομένων κύκλων, αἱ δύο τελευταῖαι περιστάσεις ἄγονται εἰς ἐκείνας τὰς ὁποίας ἐλύσαμεν μεταχειριζόμενοι μέσους ἀναλόγους, καὶ ὅσα εἰς τὴν τελευταίαν πρότασιν ἐκάμαμεν, δηλαδὴ ἄγοντες μίαν παράλληλον ἢ γράφοντες κύκλον συγκεντρικὸν εἰς διαστήματα τὰ ὁποῖα κατὰ τὰς σχετικὰς θέσεις τῶν δεδομένων πρέπει νὰ ὦσι ἴσα ἢ μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δεδομένων ἀκτίνων.

---

(1) Περὶ τῆς λύσεως τῶν δύο τούτων περιστάσεων ἔλιπε εἰς τὸ τέλος τοῦ παραρτήματος. (ὁ Μεταφραστής).