καὶ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΖ ἂς γραφθῇ εἰς συγκεντρικὸς κύκλος. Η ἐφαπτομένη ΘΑΙ εἰς τοῦτον τὸν κύκλον εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα· ἐπειδὴ εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ χορδαὶ ΘΙ καὶ ΔΕ, ὡς ἰσάκις ἀπέχουσαι τοῦ κέντρου, εἶναι ἴσαι μεταξύ των καὶ μὲ τὴν δεδομένην εὐθεῖαν Θ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ'.

Πρόβλημα.

Εἰς μιᾶς δεδομένης σιγμῆς νὰ ἐξωμεν μίαν εὐθεῖαν, ὥστε τὸ διαχωριζόμενον ταύτης μέρος ἀπὸ δύο συγκεντρικὰς περιφερείας, νὰ ἦναι ἴσον μὲ δεδομένην εὐθεῖαν γραμμήν.

Ζητεῖται νὰ φερθῇ ἐκ τῆς σιγμῆς Α (σχ. 20.) ἡ εὐθεῖα ΑΒΓ, ὥστε τὸ μέρος ΓΒ τὸ διαχωριζόμενον ἀπὸ τὰς δύο περιφερείας ΘΕΓΜ καὶ ΙΖΒΛ νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὴν Δ.

Ἐξ ὁποιασδήποτε σιγμῆς Θ λαμβανομένης ἐπὶ μιᾶς τῶν δεδομένων περιφερειῶν ἂς φερθῇ ἡ χορδὴ ΘΜ=ΕΓ, καὶ ἐπὶ τούτων ἂς φερθῶσιν αἱ κάθετοι ΟΚ καὶ ΟΗ. Αἱ ἴσαι χορδαὶ ΘΜ καὶ ΕΓ ἀπέχουν ἰσάκις τοῦ κέντρου, καὶ διὰ τῆς ἀντιστρόφου ἰδιότητος ΙΛ=ΒΖ· διὰ τοῦτο τὰ ἡμίσεα τούτων τῶν χορδῶν εἶναι ἴσα, τοῦτ' ἔστι ΘΚ=ΗΓ, καὶ ΙΚ=ΗΒ. Λοιπὸν ΘΙ ἐκτὸς ὅτι εἶναι ἴση μὲ τὴν ΒΓ, εἶναι καὶ δεδομένη· ἕπεται ἐκ τούτου ὅτι ἡ σιγμὴ Ι, καθὼς καὶ ἡ χορδὴ ΘΜ εἶναι προσδιορισμένα. Τὸ αὐτὸ ὑπάρχει, καὶ διὰ τὴν ΑΗΓ ἥτις ἅπτεται τοῦ κύκλου ΟΚΗ, τοῦ ὁποίου ἡ εὐθεῖα ΘΜ εἶναι ἐφαπτομένη.

Σύνθεσις.

Ἐκ σιγμῆς τινὸς Θ λαμβανομένης κατ' ἀρέσκειαν ἐπὶ μιᾶς τῶν περιφερειῶν, ἂς φερθῇ μία εὐθεῖα ΘΙΜ

τοιαύτη, ὥστε τὸ μέρος ΘΙ νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὴν Δ. Ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας ἂς ἀχθῇ ἡ κάθετος ΟΚ, καὶ λαμβανομένης τῆς ΟΚ ὡς ἀκτῖνος καὶ τοῦ σημείου Ο ὡς κέντρου, ἂς γραφθῇ εἷς κύκλος, εἰς τὸν ὁποῖον ἂς ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΑΒΓ. Ἡ εὐθεῖα αὕτη πληροῖ εἰς τὸ πρόβλημα. Διότι αἱ χορδαὶ ΕΓ καὶ ΖΒ εἶναι ἀμοιβαίως ἴσαι μὲ τὰς ΘΜ καὶ ΙΛ αἵτινες ἀπέχουν ἰσάκις τοῦ κέντρου· διὰ τοῦτο τὰ ἡμίσεα αὐτῶν εἶναι ἴσα, τουτ' ἔστι ΗΓ=ΘΚ, καὶ ΗΒ=ΙΚ ὅθεν ΒΓ=Δ.

Φανερὸν εἶναι ὅτι τὸ ἀπόσημα ΒΓ τῶν δύο περιφερειῶν εἶναι εἰς τὴν ἐλαχίστην κατάστασίν του ὅταν ἡ ΑΓ διέλθῃ ἀπὸ τὸ κέντρον, καὶ εἰς τὴν μεγίστην, ὅταν ἡ ΑΓ γένῃ ἐφαπτομένη τοῦ ἐντὸς κύκλου. Διὰ τοῦτο ἡ δεδομένη εὐθεῖα Δ περιέχεται μεταξὺ δύο ὁρίων, αὕτη δὲν δύναται νὰ γένῃ μεγαλητέρα τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων τῶν δεδομένων κύκλων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΑ'.

Πρόβλημα.

Δεδομένων δύο κύκλων, καὶ μιᾶς σιγμῆς ἐπὶ τῆς εὐθείας ἥτις ἑνόνει τὰ κέντρα αὐτῶν τοιαύτης, ὥστε τὰ ἀποσήματά της ἀπὸ τὰ κέντρα τῶν κύκλων νὰ ἦναι ἀνάλογα τῶν ἀκτίνων, ζητεῖται νὰ φερθῇ μία ἄλλη εὐθεῖα ἐκ ταύτης τῆς σιγμῆς, ὥστε τὸ διαχωριζόμενον μέρος ἀπὸ τὰς δύο περιφερείας νὰ ἔχῃ δεδομένον μῆκος.

Ἔστωσαν Δ καὶ Ε (σχ. 21.) τὰ κέντρα τῶν δύο κύκλων, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ σιγμὴ Α τῆς εὐθείας ΔΕ ἔχει τοιαύτην θέσιν ὥστε ΑΔ : ΑΕ :: ΔΙ : ΕΚ. Ζητεῖται νὰ φερθῇ ἐκ ταύτης τῆς σιγμῆς Α ἡ εὐθεῖα ΑΒΓ ὥστε τὸ μέρος ΒΓ νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὴν Δ.

Ανάλυσις.

Ας ἐπιζευχθῶσιν αἱ γραμμαὶ ΒΔ καὶ ΓΕ· ἐπειδὴ ΑΔ:ΑΕ::ΔΙ ἢ ΔΒ:ΕΚ ἢ ΕΓ, διὰ τοῦτο ἡ ΒΔ εἶναι παράλληλος τῆς ΕΓ, λοιπὸν ΑΔ:ΔΕ::ΑΒ:ΒΓ. Ἀλλὰ ΑΔ καὶ ΔΕ εἶναι δεδομέναι, καθὼς καὶ ἡ ΒΓ ἥτις εἶναι ἴση μὲ τὴν Δ· λοιπὸν ἡ ΑΒ εἶναι προσδιορισμένης θέσεως καὶ μεγέθους.

Σύνθεσις.

Ας ληφθῇ μία γραμμὴ Μ τοιαύτη ὥστε ΕΚ—ΔΙ:ΔΙ::Λ:Μ. Εκ τῆς στιγμῆς Α ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΒ ἴση μὲ τὴν Μ· λέγω ὅτι ΑΒΓ εἶναι ἡ ζητουμένη.

Επειδὴ ἐξ ὑποθέσεως, ΑΔ:ΑΕ::ΔΙ ἢ ΔΒ:ΕΚ ἢ ΕΓ· λοιπὸν ΔΒ εἶναι παράλληλος τῆς ΕΓ, καὶ διὰ τοῦτο ΔΒ ἢ ΔΙ:ΕΓ ἢ ΕΚ::ΑΒ:ΑΓ, ἑπομένως ΕΚ—ΔΙ:ΔΙ::ΒΓ:ΑΒ· ἀλλὰ ΕΚ—ΔΙ:ΔΙ::Λ:Μ ἢ::Λ:ΑΒ· λοιπὸν τέλος πάντων ΒΓ:ΑΒ::Λ:Μ· ἕπεται ὅτι ΒΓ=Λ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΒ'.

Πρόβλημα.

Δεδομένων δύο κύκλων ἐξ ὧν ὁ εἷς εἶναι ἐντὸς τοῦ ἄλλου, νὰ ἄξωμεν ἐκ μιᾶς δεδομένης στιγμῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ μικροτέρου, καὶ ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἥτις ἑνόνει τὰ δύο κέντρα μίαν εὐθεῖαν τοιαύτην, ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν μέρος, νὰ ἦναι ἴσον μὲ δεδομένον μῆκος.

Πρέπει λοιπὸν νὰ φέρωμεν τὴν ΑΒΓ (σχ. 22. Πίναξ. 5.) εἰς τρόπον ὥστε τὸ διαχωριζόμενον μέρος ΒΓ νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὴν ΡΡ. (*)

(*) Εἰς τοὺς Πίνακας, σημειοῦται ἡ εὐθεῖα ΚΡ καὶ ἡ ΚΣ διὰ Ο, καὶ Ν.

Ἀνάλυσις.

Ἃς φερθῶσιν αἱ γραμμαὶ ΒΗ, ΗΓ καὶ ΖΠ. Ἐκ τοῦ κέντρου Ε τοῦ μεγαλητέρου κύκλου ἂς ἀχθῇ ἐπὶ τῆς ΑΓ ἡ κάθετος ΙΕ· ἂς ληφθῇ μετὰ ταῦτα ἡ ΙΛ=ΒΙ· ἂς φερθῇ ἡ ΙΚ παράλληλος τῆς ΒΗ. Ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΑΘ ἂς ληφθθῇ μία τετάρτη ἀνάλογος ΑΜ τῶν γραμμῶν, ΑΚ, ΑΗ, ΑΖ· ἐκ τῆς στιγμῆς Μ ἂς ἀχθῇ ἡ ΜΝ παράλληλος τῆς ΖΠ ἥτις ἂς συναπαντήσῃ τὴν προεκβολὴν τῆς ΑΓ εἰς Ν.

Ἐπειδὴ ΑΚ παράλληλος τῆς ΒΗ καὶ ΖΠ τῆς ΜΝ· ἕπεται ὅτι ΑΚ : ΑΗ : : ΑΛ : ΑΒ, καὶ ΑΖ : ΑΜ : : ΑΠ : ΑΝ· ἀλλ' ἐκ τῆς κατασκευῆς ΑΚ : ΑΗ : : ΑΖ : ΑΜ· λοιπὸν ΑΚ : ΑΗ : : ΑΛ : ΑΒ : : ΑΠ : ΑΝ· ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ΑΚ : ΑΗ : : ΑΛ+ΑΠ ἢ ΠΛ : ΑΒ+ΑΝ ἢ ΒΝ. Ἀλλὰ ΙΠ=ΙΓ καὶ ΙΛ=ΙΒ, λοιπὸν ΠΛ=ΒΓ=ΚΡ· ἐξ αἰτίας δὲ τοῦ παραλληλισμοῦ τῶν εὐθειῶν ΑΚ, ΙΕ καὶ ΒΗ ἡ ΚΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΕΗ, καὶ διὰ τοῦτο ΑΚ εἶναι δεδομένη. Συνάγομεν δὲ ὅτι ἐπειδὴ εἶναι γνωστοὶ οἱ τρεῖς πρῶτοι ὅροι τῆς ἀναλογίας, ὁ τέταρτος ἡ ΒΝ εἶναι παρομοίως γνωστός. Ἀλλὰ περιπλέον ΑΓΘ=ΑΖΠ=ΑΜΝ· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΓΑΘ καὶ ΑΝΜ, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν ἄλλην γωνίαν ἴσην, εἶναι ὅμοια. Διὰ τοῦτο ΑΘ : ΑΓ : : ΑΝ : ΑΜ, καὶ ΑΘ×ΑΜ=ΑΓ×ΑΝ. Διὰ τοῦ τελευταίου τούτου ἐξαγομένου βλέπομεν ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τῶν τμημάτων ΑΝ, ΑΓ εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ γραμμὴ ΓΝ, ἥτις εἶναι προσδιορισμένη, εἶναι γνωστὸν· λοιπὸν ΑΓ εἶναι γνωστὴ τόσον εἰς θέσιν, ὅσον καὶ εἰς μέγεθος.

Σύνθεσις.

Ἀφ' οὗ ληφθῇ ἡ ΚΕ=ΕΗ, ἂς φερθῇ ἐκ τῆς Α ἕως εἰς τὴν Μ μία τετάρτη ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν ΑΚ,

ΑΗ καὶ ΑΖ· ἂς ληφθοῦν δύο γραμμαὶ ΚΡ καὶ ΚΣ αἵτινες νὰ ἦναι μεταξύ των ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΑΗ. Εἰς τὴν σιγμὴν Ο ἂς διαιρεθῇ ἡ εὐθεῖα ΣΡ εἰς δύο τμήματα τοιαῦτα, ὥστε ΣΟ×ΟΡ=ΑΘ×ΑΜ, καὶ τέλος πάντων ἐκ τῆς σιγμῆς Α μέχρι τῆς περιφερείας τοῦ μεγαλητέρου κύκλου, ἂς φερθῇ μία εὐθεῖα ΑΓ=ΟΡ. Αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τοῦτο, ἂς φέρωμεν τὰς εὐθείας ΓΘ, ΒΗ καὶ ΖΠ, τὴν ΜΝ παράλληλον τῆς ΖΠ, τὰς δὲ ΕΙ, ΚΛ παραλλήλους τῆς ΓΘ. Επειδὴ ΗΛ=ΙΒ, καὶ ΙΠ=ΙΓ, ΗΛ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΒΓ τὰ τρίγωνα ΓΑΘ καὶ ΑΝΜ εἶναι ὅμοια, καὶ διὰ τοῦτο ΑΘ:ΑΓ::ΑΝ:ΑΜ· ὅθεν ΑΘ×ΑΜ=ΑΓ×ΑΝ. Ἀλλ' ἐκ τῆς κατασκευῆς, ΑΘ×ΑΜ=ΣΟ×ΟΡ καὶ ΑΓ=ΟΡ· λοιπὸν ΑΝ=ΣΟ. Τώρα ἡ ἰδιότης τῶν παραλλήλων μᾶς δίδει, ΑΚ:ΑΗ::ΑΛ:ΑΒ· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως, ΑΚ:ΑΗ::ΑΖ:ΑΜ ἢ::ΑΠ:ΑΝ, λοιπὸν ΑΚ:ΑΗ::(ΑΛ+ΑΠ) ἢ ΒΓ:(ΑΝ+ΑΒ) ἢ ΒΝ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ΒΓ:ΒΝ::ΚΡ:ΚΣ, καὶ ΒΓ:ΓΝ::ΚΡ:ΣΤ· ἀλλὰ ΓΝ=ΣΡ, λοιπὸν ΒΓ=ΚΡ, τοῦτ' ἔστι ἴση μὲ τὴν δεδομένην γραμμήν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΓ'.

Πρόβλημα.

Ἐκ τοῦ ἄκρου τῆς διαμέτρου δεδομένου κύκλου, νὰ ἀξωμεν μίαν εὐθεῖαν τοιαύτην ὥστε τὸ διαχωριζόμενον μέρος μεταξὺ τῆς περιφερείας καὶ μιᾶς καθέτου εἰς τὴν διάμετρον νὰ ἦναι ἴσον μὲ δεδομένον μῆκος.

Ζητεῖται νὰ φέρωμεν ἐκ τῆς Α (σχ. 23. Πινακ. 5.) τὴν εὐθεῖαν ΑΓ εἰς τρόπον ὥστε τὸ μέρος ΒΓ νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὴν ΗΘ.

Ανάλυσις.

Ας ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΔ. Η γωνία ΑΒΔ ὡς ἔχουσα τὴν κορυφὴν της ἐπὶ τῆς περιφερείας, καὶ τὰ ἄκρα της ἐπὶ τῆς διαμέτρου, εἶναι ὀρθὴ, καὶ ἴση μὲ τὴν ΑΕΓ. Διὰ τοῦτο τὰ τρίγωνα ΔΑΒ καὶ ΓΑΕ, τὰ ὁποῖα ἔχουν περιπλέον μίαν κοινὴν γωνίαν, εἶναι ὅμοια, ἑπομένως ΑΒ : ΑΔ : : ΑΕ : ΑΓ· λοιπὸν ΑΒ×ΑΓ = ΑΔ×ΔΕ. Αλλὰ τὸ ὀρθογώνιον ΑΔ×ΑΕ εἶναι γνωστὸν· λοιπὸν γνωστὸν εἶναι καὶ τὸ ΑΒ×ΑΓ. Επειδὴ περιπλέον ἡ ΒΓ εἶναι δεδομένη· διὰ τοῦτο ΑΒ εἶναι προσδιορισμένου μεγέθους, καὶ ἀκολούθως γνωστῆς θέσεως.

Σύνθεσις.

Ας ἐκβληθῇ ἡ ΗΘ ἕως τὴν στιγμὴν Ι ὥστε ΗΙ×ΙΘ = ΑΔ×ΑΕ· ἂς φερθῇ εἰς τὸν κύκλον μία χορδὴ ΑΒ ἴση μὲ τὴν ΙΘ· λέγω ὅτι αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη γραμμή. Διότι, ἐὰν φέρωμεν τὴν ΒΔ, ἡ φανερὰ ὁμοιότης τῶν τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΕΓ μᾶς δίδει τὴν ἀναλογίαν, ΑΒ : ΑΔ : : ΑΕ : ΑΓ· ὅθεν συνάγομεν τὴν ἐξίσωσιν ΑΒ×ΑΓ = ΑΔ×ΑΕ = ΗΙ×ΙΘ. Επειδὴ δὲ ΑΒ = ΙΘ, διὰ τοῦτο ΑΓ = ΗΙ καὶ ΒΓ = ΗΘ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΔ'.

Πρόβλημα.

Εκ μιᾶς δεδομένης στιγμῆς ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη δεδομένην γωνίαν, νὰ ἄξωμεν ἄλλην εὐθεῖαν, ὥστε τὸ περιεχόμενον μέρος μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας νὰ ἦναι ἴσον μὲ δεδομένον μέγεθος.

Εκ τῆς στιγμῆς Δ (σχ. 24. Πίναξ. 5.) ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΔ ἥτις διαιρεῖ τὴν γωνίαν ΒΑΓ εἰς δύο ἴσα μέρη, θέλομεν νὰ ἄξωμεν εὐθεῖαν τοιαύτην, ὡς τὴν ΒΓ, ἴσην μὲ δεδομένην.

Ἀνάλυσις.

Ἐκ τῶν τριῶν στιγμῶν Α, Β, Γ ἂς διέλθῃ εἷς κύκλος· ἂς φερθῇ ἡ διάμετρος ΕΖ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΖ· φανερὸν εἶναι ὅτι ὁ κύκλος οὗτος, καὶ διὰ τοῦτο τὸ τρίγωνον ΒΑΓ εἶναι δεδομένου μεγέθους. Ἐπειδὴ ἔχοντες τὴν ΒΓ καὶ τὴν γωνίαν ΒΑΓ, εὑρίσκομεν τὸ τοιοῦτον μέγεθος γράφοντες τμῆμα κύκλου ἱκανὸν νὰ χωρέσῃ τὴν γωνίαν ΒΑΓ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ γωνία ΒΑΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΑΕ, τὸ τόξον ΕΒ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΓΕ, καὶ ἡ διάμετρος ΕΖ πίπτει κατακάθετος ἐπὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΓΒ. Τώρα μὲ τὸ νὰ ἦναι ἡ ΑΔ δεδομένη, ἡ ΑΖ προσδιορίζεται εἰς μέγεθος διὰ τῆς τελευταίας προτάσεως. Λοιπὸν ΔΒ γίνεται γνωστὴ εἰς θέσιν καὶ μέγεθος.

Σύνθεσις.

Ἐπὶ τῆς δεδομένης εὐθείας ἂς γραφθῇ κύκλος ἱκανὸς νὰ χωρέσῃ τὴν γωνίαν ΒΑΓ· ἂς διαιρεθῇ τὸ τόξον ΒΓ εἰς δύο ἴσα μέρη εἰς τὴν στιγμὴν Ε. Ἐκ τῆς στιγμῆς ταύτης, διὰ τῆς τελευταίας προτάσεως, ἂς φερθῇ ἡ εὐθεῖα ΕΔΑ οὕτως, ὥστε ΑΔ νὰ ἦναι ἴση μὲ τὸ ἀπόσημα τῆς δεδομένης στιγμῆς ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας. ΒΔ, ΓΔ θέλουν εἶναι τὰ δύο τμήματα τῆς ζητουμένης γραμμῆς, διὰ τῶν ὁποίων ἡ θέσις της ἀμέσως προσδιορίζεται.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν δεδομένην γωνίαν, καὶ ἡ ΑΔ τὴν διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη, διότι τὸ τόξον ΒΓ = ΓΕ· περιπλέον ἐπειδὴ ΑΔ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἀπόσημα τῆς δεδομένης στιγμῆς ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ τριγώνου, καὶ ΒΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν δεδομένην γραμμήν, διὰ τοῦτο ἕπεται ὅτι τὸ κατασκευαζόμενον σχῆμα πληροῖ εἰς ὅλας τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος.

Τὸ πρόβλημα εἶναι δεκτικὸν ὁρίου. Επειδὴ φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ δεδομένη γραμμὴ ΒΓ δύναται νὰ ἦναι τόσον μικρὰ, ὥστε νὰ μὴ ἠμπορῇ νὰ φθάσῃ εἰς τὰς πλευράς τῆς γωνίας ΒΑΓ. Η ἀνωτέρω κατασκευὴ φανερόνει τὴν ἐλαχίστην κατάστασιν τῆς ΒΓ· διότι ἡ ΕΑ δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὴν διάμετρον ΕΖ, καὶ τὸ ὅριον ὑπάρχει, ὅταν αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐφαρμόζωνται, οὕτως ἡ ΒΓ φθάνει εἰς τὸ ὅριόν της, ὅταν ἦναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ· δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τότε τὰ τμήματα ΒΔ, ΓΔ εἶναι ἴσα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΕ'.

Πρόβλημα.

Εκ τῆς κορυφῆς ἑνὸς ῥόμβου, νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν τοιαύτην ὥστε τὸ μέρος τὸ μεταξὺ τῶν δύο πλευρῶν ὅπου αὕτη συναπαντᾷ τὰς δύο πλευράς, νὰ ἦναι δεδομένου μήκους.

Εστω ΑΒΓΔ (σχ. 25. Πίναξ 5) δεδομένος τις ῥόμβος, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι προσεκβλημένη. Ζητεῖται ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς Α, νὰ φέρωμεν τὴν ΑΕΖ ὥστε τὸ ἐκτὸς μέρος ΕΖ νὰ ἦναι ἴσον μὲ δεδομένην εὐθεῖαν.

Ανάλυσις.

Ας ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΓ, ἥτις ἂς ἐκβληθῇ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν γραμμὴν ΕΗ ἡ ὁποία κάμνει μὲ τὴν ΑΕ μίαν γωνίαν ΑΕΗ ἴσην μὲ τὴν ΑΓΖ. Φανερὸν εἶναι ὅτι τὰ τρίγωνα ΓΑΖ καὶ ΕΑΗ εἶναι ὅμοια, ἑπομένως ΑΓ:ΓΖ::ΑΕ:ΕΗ ἀλλ' ἡ ΓΕ ἐπειδὴ εἶναι παράλληλος τῆς ΑΒ, ἔχομεν ΒΓ:ΓΖ::ΑΕ:ΕΖ· λοιπὸν ΑΓ:ΒΓ::ΕΖ:ΕΗ. Τώρα οἱ τρεῖς ὅροι ταύτης τῆς ἀναλογίας εἶναι δεδομένοι· λοιπὸν καὶ ὁ τέταρτος προσδιορίζεται. Περιπλέον ἡ γωνία

ΑΓΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΓΒ ἢ μὲ τὴν ΖΓΗ· ἐὰν εἰς ἑκάστην τούτων τῶν γωνιῶν προστεθῇ ἡ γωνία ΕΓΖ, τὰ προκύπτοντα ἀθροίσματα ΑΓΖ ἢ ΑΕΗ, καὶ ΕΓΗ εἶναι ἴσα· διὰ τοῦτο τὰ τρίγωνα ΑΗΕ καὶ ΕΗΓ εἶναι ὅμοια, ἀκολούθως ΑΗ : ΕΗ :: ΕΗ : ΓΗ, ἢ ΕΗ² = ΑΗ × ΓΗ. Ἀλλ' ἀνωτέρω ἐπροσδιορίσθη ἡ ΕΗ· λοιπὸν τὸ ὀρθογώνιον ΑΗ × ΓΗ προσδιορίζεται. Τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖ διὰ τὴν στιγμὴν Ε, τὴν Η καὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΖ.

Σύνθεσις.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ δεδομένον τμῆμα εἶναι Κ. Ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΓ· ἂς ληφθῇ μία τετάρτη ἀνάλογος Λ τῶν τριῶν γραμμῶν ΑΓ, ΒΓ, Κ· ἔπειτα ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ἡ ΑΓ εἰς τὴν στιγμὴν Η, ὥστε ΑΓ × ΗΓ = Λ². Καὶ τέλος πάντων ἐκ τῆς στιγμῆς Η μὲ τὴν ἀκτῖνα ΗΕ = Λ ἂς γραφθῇ τόξον κύκλου, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΓΔ εἰς τὴν στιγμὴν Ε. Λέγω ὅτι ἡ ΑΕΖ εἶναι ἡ ζητουμένη γραμμή.

Ἐπειδὴ ΑΗ × ΗΓ = Λ² = ΕΗ², ἕπεται ὅτι ΑΗ : ΕΗ :: ΕΗ : ΓΗ. Τοῦτο φανερόνει ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΗΕ καὶ ΕΗΓ εἶναι ὅμοια· διὰ τοῦτο ἡ γωνία ΑΕΗ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΕΓΗ ἢ ΑΓΖ, λοιπὸν τὰ τρίγωνα ΑΕΖ καὶ ΑΗΕ εἶναι παρομοίως ὅμοια· ἑπομένως ΑΓ : ΓΖ :: ΑΕ : ΕΗ. Ἀλλ' ἀπὸ ἄλλο μέρος, ΒΓ : ΓΖ :: ΑΕ : ΕΖ· λοιπὸν ΑΓ : ΒΓ :: ΕΖ : ΕΗ· ἔχομεν παρομοίως ΑΓ : ΒΓ :: Κ : Λ· λοιπὸν Κ = ΕΖ.

Ἄλλη Λύσις.

Ἀνάλυσις.

Ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΗ (σχ. 25. δὶς Πίναξ 6.) ὥστε νὰ σχηματίζῃ τὴν γωνίαν ΑΖΗ ἴσην μὲ τὴν ΑΔΓ· ἂς ληφθῇ

ἡ ΓΘ=ΓΕ· ἐκ τῆς Γ ἄς ἀχθῇ ἡ ΓΝ= ΓΑ· τέλος ἄς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΓΗ καὶ ΑΘ.

Επειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΓΝ εἶναι ἰσοσκελὲς ἡ γωνία ΓΑΝ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΝΑ· καὶ ἐπειδὴ ἡ διαγώνιος ΑΓ διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γωνίαν τοῦ ῥόμβου ΒΓΔΑ· τὰ τρίγωνα ΑΓΕ καὶ ΑΓΘ εἶναι ἴσα· ὅθεν συνάγομεν ὅτι ΑΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΘ καὶ ἡ γωνία ΓΑΕ ἴση μὲ μὴν ΓΑΘ. Τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΖΗ εἶνα ὅμοια, ἑπομένως ΑΔ : ΑΕ : : ΑΖ : ΑΗ, καὶ ΑΔ × ΑΗ = ΑΕ × ΑΖ. Αλλ' ἡ γωνία ΑΓΔ= ΓΑΔ=ΓΝΑ· λοιπὸ τὰ τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΑΓΝ εἶναι ὅμοια, καὶ διὰ τοῦτο ΑΝ : ΑΓ : : ΑΓ : ΑΔ· ὅθεν ΑΝ × ΑΔ=$\overline{\text{ΑΓ}}^2$. Περιπλέον ἐπειδὴ ΑΓ διαιρεῖ (1) τὴν γωνίαν ΘΑΖ εἰς δύο ἴση μέρη, διὰ τοῦτο ΖΑ × ΑΘ=$\overline{\text{ΑΓ}}^2$ + ΖΓ × ΓΘ ἢ ΖΑ × ΑΕ=$\overline{\text{ΑΓ}}^2$ + ΖΓ × ΓΕ, λοιπὸν ΖΓ × ΓΕ=ΖΑ × ΑΕ − $\overline{\text{ΑΓ}}^2$=ΑΗ × ΑΔ − ΑΔ × ΝΑ = ΝΗ × ΑΔ. Αλλὰ ΒΔ καὶ ΓΕ μὲ τὸ νὰ ἶναι πα-

(1) Ο. Μ. Εξ αἰτίας τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΕ (ολ· 24) ἔχομεν ΑΒ × ΑΓ = ΔΑ × ΑΕ = ΔΑ (ΑΔ + ΔΕ) = ΑΔ × ΔΕ + $\overline{\text{ΑΔ}}^2$ τώρα ΑΔ × ΔΕ = ΒΔ × ΔΓ, λοιπὸν ΑΒ × ΑΓ = ΒΔ × ΔΓ + $\overline{\text{ΔΓ}}^2$, δηλαδὴ εἰς κάθε τρίγωνον ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν γωνίαν αὐτοῦ εἰς δύο ἴσα μέρη τὸ ὀρθογώνιον τῶν δύο πλευρῶν αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὴν γωνίαν, εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς διαιρούσης πλέον τὸ ὀρθογώνιον τῶν δύο τμημάτων τῆς ἄλλης πλευρᾶς.

ράλληλοι, ἔχομεν ΖΓ : ΕΖ : : ΕΔ : ΑΕ : : ΕΖ : ΕΗ, καὶ ΓΕ : ΕΖ : : ΑΒ ἢ ΑΔ : ΕΖ, λοιπὸν ΖΓ×ΓΕ : $\overline{\text{ΕΖ}}^2$: : ΑΔ : ΑΗ : : ΝΗ×ΑΔ : ΝΗ×ΕΗ· ἀλλ' ἐπειδὴ ΖΓ×ΓΕ = ΝΗ×ΑΔ ἕπεται ὅτι $\overline{\text{ΕΖ}}^2$ = ΝΗ×ΑΗ. Ἐκ ταύτης τῆς τελευταίας ἐξισώσεως φανερὸν γίνεται ὅτι ἡ ΑΗ, ἡ σιγμὴ Η εἶναι προσδιορισμένα. Τώρα ἐὰν ἐπὶ τῆς ΑΗ γράψωμεν ἓν τμῆμα ἱκανὸν νὰ χωρέσῃ τὴν γωνίαν ΑΖΗ = ΑΔΓ, ἡ σιγμὴ Ζ θέλει εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ τόξου τούτου τοῦ τμήματος ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τούτου τοῦ τόξου μὲ τὴν ΒΓ προσδιορίζει τὴν θέσιν τῆς σιγμῆς Ζ, καὶ οὕτως γίνεται γνωστὴ ἡ εὐθεῖα ΑΖ.

Σύνθεσις.

Ἔστω Κ τὸ μέγεθος τοῦ δοθέντος τμήματος. Ἂς εὑρεθῇ ἡ Λ, τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον νὰ ἰσοδυναμῇ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῆς Κ καὶ τῆς διαγωνίου ΑΓ· ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΑΔ, καὶ ἐκ τῆς σιγμῆς Γ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΗ = Λ. Ἐπὶ τῆς ΑΗ, ἂς γραφθῇ τμῆμα ἱκανὸν νὰ χωρέσῃ τὴν γωνίαν ΑΔΓ· ἂς ἑνωθῇ ἡ Α μὲ τὴν Ζ ὅπου τὸ τμῆμα συναπαντᾷ τὴν ΓΒ, λέγω ὅτι ἡ ΑΖ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τοῦτο, ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΝ = ΓΑ καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΗΖ καὶ ΕΘ. Τὰ τρίγωνα ΑΘΓ καὶ ΑΕΓ εἶναι ἴσα. Τῷ ὄντι ἡ γωνία ΑΖΗ ἐπειδὴ εἶναι ἴση, ἐκ τῆς κατασκευῆς, μὲ τὴν ΑΔΓ, εἶναι παρομοίως ἴση μὲ τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζει μὲ τὴν ΑΔ ἡ προεκβολὴ τῆς ΒΑ ἀπὸ τὰς ΑΔ, καὶ διὰ τοῦτο ΑΒ ἅπτεται τοῦ κύκλου εἰς τὸ Α· ἔχουσα διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΑΗ λοιπὸν ἡ γωνία ΒΑΘ = ΘΖΑ = ΔΑΕ, καὶ ΒΑΓ - ΒΑΘ ἢ

ΓΕΘ=ΔΑΓ−ΔΑΕ ἢ ΓΑΕ. Περιπλέον αἱ γωνίαι ΑΓΘ καὶ ΑΓΕ εἶναι παρομοίως ἴσαι· ἡ δὲ πλευρὰ ΕΓ εἶναι κοινὴ εἰς τὰ δύο τρίγωνα ΓΕΘ, ΓΕΕ. Η ἰσότης λοιπὸν τῶν δύο τούτων τριγώνων εἶναι φανερὰ· ὅθεν συνάγομεν ΑΘ=ΑΕ, καὶ ΓΘ=ΓΕ. Από τὸ ἄλλο μέρος, τὰ τρίγωνα ΑΔΕ, ΑΖΗ εἶναι ὅμοια· λοιπὸν ΑΔ:ΑΕ::ΑΖ:ΑΗ, καὶ ΑΔ×ΑΗ=ΑΕ×ΑΖ· μετὰ ταῦτα, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΑΓΝ καὶ ΑΔΓ, ἔχομεν ΑΝ:ΑΓ::ΑΓ:ΑΔ, καὶ ΑΝ×ΑΔ=$\overline{\text{ΑΓ}}^2$· ἀλλὰ ΖΓ:ΕΖ::ΑΔ:ΑΕ::ΑΖ:ΑΗ, καὶ ΓΓ:ΕΖ::ΑΒ ἢ ΑΔ:ΑΖ, διὰ τοῦτο ΖΓ×ΓΕ:ΕΖ::ΑΔ:ΑΗ::ΝΗ×ΑΔ:ΝΗ×ΑΗ. Προσέτι ἐπειδὴ ΑΓ διαιρεῖ τὴν γωνίαν ΖΑΘ εἰς δύο ἴσα μέρη, ἔχομεν ΖΓ×ΓΘ+$\overline{\text{ΑΓ}}^2$=ΖΑ×ΑΘ=ΑΗ×ΑΔ=ΑΝ×ΑΔ+ΝΗ×ΑΔ· ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ΖΓ×ΓΘ ἢ ΖΓ×ΓΕ=ΝΗ×ΑΔ· καὶ $\overline{\text{ΕΖ}}^2$=ΝΗ×ΑΗ· ἀλλὰ $\overline{\text{Κ}}^2$=$\overline{\text{ΓΗ}}^2$−$\overline{\text{ΑΓ}}^2$=ΝΗ×ΑΗ, λοιπὸν ΕΖ=Κ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ.

Πρόβλημα.

Εκ δύο δεδομένων σημείων νὰ φέρωμεν κύκλον, ὅστις νὰ ἅπτεται μιᾶς, δεδομένης θέσεως, εὐθείας.

Ζητεῖται νὰ γραφθῇ εἷς κύκλος, ὅστις νὰ διέρχεται ἐκ τῶν σημείων Α, Β (σχ. 26. Πίναξ 6.) καὶ νὰ ἅπτεται τῆς δεδομένης θέσεως γραμμῆς, δηλαδὴ τῆς ΓΔ.

Δυνατὸν νὰ παρρησιασθῶσιν δύο περιστάσεις, ἐκείνη εἰς τὴν ὁποίαν ἡ γραμμὴ ἥτις ἑνόνει τὰς δεδομένας σημεῖα νὰ εἶναι παράλληλος τῆς ΓΔ, καὶ ἐκείνη εἰς τὴν ὁποίαν κλίνει πρὸς αὐτήν.

Πρώτη περίςασις εἰς τὴν ἑποίαν ΑΒ εἶναι παράλληλος τῆς ΓΔ.

Ανάλυσις.

Επειδὴ ΓΔ εἶναι ἐφαπτομένη, ἡ ἀγομένη κάθετος ΓΗ ἐκ τῆς ςιγμῆς τῆς ἁφῆς, διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον, αὐτὴ διαιρεῖ λοιπὸν εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν γραμμὴν ΑΒ, παράλληλον τῆς ΓΔ· ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ κάθετος αὕτη, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ςιγμὴ τῆς ἁφῆς Ε, εἶναι προσδιορισμένη. Οὕτως ὁ διερχόμενος κύκλος διὰ τῶν ςιγμῶν Α, Β καὶ Ε εἶναι ὁ ζητούμενος.

Σύνθεσις.

Ας φερθῇ ἡ ΕΗ καταπαράθετος ἐπὶ τῆς ἡμιτείας τῆς ΑΒ, καὶ ἐκ τῶν τριῶν ςιγμῶν Α, Ε, Β ἂς διέλθῃ κύκλος· οὗτος ἅπτεται τῆς εὐθείας ΕΓ· ἐπειδὴ ΗΕ διέρχεται ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, καὶ περιπλέον συναπαντᾷ τὴν ΑΓ κατ' ὀρθὴν γωνίαν.

Δευτέρα περίςασις, εἰς τὴν ἑποίαν ἡ ΓΔ κλίνει πρὸς τὴν ΓΔ. (σχ. 26. δις).

Ανάλυσις.

Ας ἐκβληθῇ ἡ ΒΑ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΓΔ εἰς Ζ, τότε $ZE^2 = AZ \times ZB$. ἀλλ' ἐπειδὴ εἶναι δεδομένη ἡ ςιγμὴ τῆς συναπαντήσεως, τὸ ὀρθογώνιον $AZ \times ZB$ εἶναι προσδιορισμένον, διὰ τοῦτο ἔχομεν παρομοίως τὴν ΖΕ, ὡς καὶ τὴν ςιγμὴν Ε, προσδιορισμένην. Αρκεῖ λοιπὸν νὰ κάμωμεν νὰ διέλθῃ εἰς κύκλος ἐκ τῶν ςιγμῶν Α, Β καὶ Ε.

Σύνθεσις.

Ας ἐκβληθῇ ἡ ΒΑ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ΓΔ εἰς Ζ· ἐπὶ τῆς ΓΔ ἐκ τῆς ςιγμῆς Ζ ἂς φερθῇ

μία μέση ἀνάλογος ΖΕ ἡ ΖΕ' μεταξὺ τῆς ΑΖ καὶ ΖΒ· ἐκ τῶν σημείων Α, Ε, Β ἂς διέλθῃ εἷς κύκλος, ὅστις ἅπτεται τῆς εὐθείας ΓΔ.

Ἐπειδὴ ἔχομεν ΑΖ : ΖΕ : : ΖΕ : ΖΒ, ἕπεται ὅτι $ZE^2 = AZ \times ZB$ καὶ διὰ τοῦτο ΓΔ ἅπτεται τοῦ κύκλου εἰς τὴν Ε.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΖ'.

Πρόβλημα.

Ἐκ δεδομένης σημείου νὰ διέλθῃ εἷς κύκλος ἐφαπτόμενος δύο δεδομένων εὐθειῶν.

Ζητεῖται νὰ γράψωμεν ἕνα κύκλον ὅστις διερχόμενος ἐκ τῆς σημείου Ε (σχ. 27. Πίναξ 6.) νὰ ἅπτεται τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ.

Πρώτη περίπτωσις, ἂς ὑποθέσωμεν τὴν ΑΒ παράλληλον τῆς ΓΔ.

Ἀνάλυσις.

Ἐκ τοῦ κέντρου Ο ἂς ἀχθῇ ἡ παράλληλος ΖΟ, καὶ ἡ κάθετος ΚΙ εἰς τὰς δύο δεδομένας εὐθείας. Φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ ἀκτὶς ΟΙ εἶναι δεδομένη, καὶ διὰ τοῦτο ἡ θέσις τῆς ΖΟ εἶναι παρομοίως δεδομένη· ἀλλ' ἡ ἀκτὶς ΟΕ ἢ Ο'Ε ἐπειδὴ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΟΙ, ἡ ἀκτὶς, ὡς καὶ τὸ κέντρον Ο, εἶναι παρομοίως προσδιορισμένα.

Σύνθεσις.

Ἂς ἀχθῇ μία παράλληλος ΖΟ, ἐκ τῆς σημείου τῆς ἡμισείας τοῦ διαστήματος μεταξὺ τῶν δύο δεδομένων εὐθειῶν, ἐκ τῆς σημείου Ε μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τούτου τοῦ διαστήματος, ἂς γραφθῇ κύκλος, ὅστις συναπαντᾷ τὴν ΖΟ εἰς Ο ἢ Ο'. Αὕτη ἡ

ςιγμὴ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου· ἐπειδὴ ΟΕ = ΟΙ = ΟΚ, καὶ διὰ τοῦτο ὁ διερχόμενος κύκλος ἐκ τῆς Ε ἅπτεται τῶν εὐθειῶν ΓΔ καὶ ΑΒ τῆς μὲν εἰς τὸ Κ, τῆς δὲ εἰς τὸ Ι.

Δευτέρα περίςασις· ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ΓΔ κλίνει πρὸς τὴν ΑΒ (σχ. 27. εἰς Πίναξ 6.).

Ἀνάλυσις.

Ἂς ἐκβληθῶσιν αἱ δύο δεδομέναι εὐθεῖαι ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς τὸ Ζ. Ἂς φερθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΟΙ, ΟΚ, ΟΖ· ἐκ τῆς Ε ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΗΘ κάθετος εἰς τὴν ΟΖ.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΚΖ καὶ ΟΙΖ εἶναι ἴσα, ἐπειδὴ ἔχομεν τὴν ΟΖ κοινὴν, καὶ τὴν πλευρὰν ΟΙ ἴσην μὲ τὴν ΟΚ. Η γωνία ΟΖΚ εἶναι λοιπὸν ἴση μὲ τὴν ΟΖΙ· ἐπειδὴ δὲ ἡ ςιγμὴ Ζ εἶναι δεδομένη ἕπεται ὅτι ἡ γραμμὴ ΟΖ εἶναι προσδιορισμένη. Ἀλλὰ προσέτι ἡ ςιγμὴ Ε εἶναι δεδομένη, λοιπὸν ἀκολουθεῖ τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὴν κάθετον ΕΗ· ἐπειδὴ δὲ ἡ ΗΘ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΗΕ, φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ ςιγμὴ Θ εἶναι προσδιορισμένη. Τώρα ἐπειδὴ ἔχομεν δύο ςιγμὰς Θ καὶ Ε ἐκ τῶν ὁποίων πρέπει νὰ διέλθῃ ἡ περιφέρεια ἐφαπτομένη τῆς ΑΒ καὶ ΓΔ· αὕτη δύναται νὰ γραφθῇ διὰ τῆς προηγουμένης προτάσεως.

Σύνθεσις.

Ἂς ἐκβληθῶσιν αἱ ΓΑ, ΓΔ ἕως οὗ νὰ συναπαντηθῶσιν εἰς τὸ Ζ· ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΟ ὥςε νὰ διαιρῇ τὴν γωνίαν ΒΖΔ εἰς δύο ἴσα μέρη. Εκ τῆς Ε ἂς φερθῇ ἡ ΕΗ κάθετος ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας, τὴν ὁποίαν κάθετον ἐκβάλλομεν μίαν ἴσην ποσότητα ὑπὸ τὴν ΟΖ ἕως εἰς Θ· ἔπειτα ἂς προσδιορισθῇ μία μέση ἀνάλογος ΛΙ ἢ ΛΠ μεταξὺ ΘΛ καὶ ΛΕ.

Τέλος πάντων ἐκ τῶν τριῶν σιγμῶν Θ, Ε, Ι ἢ Θ, Ε, Ζ ἂς διέλθῃ περιφέρεια κύκλου· αὕτη θέλει πληροῖ εἰς τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος.

Τῷ ὄντι, τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ὅς ις διέρχεται ἐκ τῶν σιγμῶν Ε καὶ Θ, πρέπει νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ΖΟ ἥτις εἶναι κάθετος ἐπὶ ἡμισείας τῆς ΕΘ. Ἔστω Ο τοῦτο τὸ κέντρον, καὶ ἂς φερθῇ ἡ εὐθεῖα ΟΙ, καὶ ἡ κάθετος ΟΚ. Ἐπειδὴ ΟΛ×ΛΕ=ΛΙ² διὰ τοῦτο ὁ κύκλος ἅπτεται τῆς ΑΒ εἰς τὴν Ι, καὶ ἡ γωνία ΟΙΖ εἶναι ὀρθή. Διὰ τοῦτο τὰ τρίγωνα ΚΟΖ καὶ ΙΟΖ εἶναι ἴσα· διότι ἔχουν τὴν πλευρὰν ΟΖ κοινὴν, καὶ περιπλέον τὰς γωνίας ΟΚΖ καὶ ΟΖΚ ἀμοιβαίως ἴσας μὲ τὰς ΟΙΖ καὶ ΟΖΙ· διὰ τοῦτο ΟΙ=ΟΚ. Λοιπὸν ὁ γεγραμμένος κύκλος ἐκ τῆς σιγμῆς Ο, ὡς κέντρου, μὲ τὴν ΟΙ ὡς ἀκτῖνα διέρχεται ἐκ τῆς Κ καὶ ἅπτεται αὐτῆς εἰς ταύτην τὴν σιγμήν.

Πόρισμα. Ἐὰν ἡ σιγμὴ Ε εὑρίσκεται ἐπὶ μιᾶς τῶν δεδομένων γραμμῶν, παραδείγματος χάριν, ἐπὶ τῆς ΑΒ, τότε συμπίπτει μὲ τὴν σιγμὴν τῆς ἁφῆς τῆς ΑΒ, καὶ τὸ πρόβλημα λύεται ἁπλούστατα. Ἐπειδὴ τὸ κέντρον Ο μὲ τὸ νὰ εὑρίσκεται πάντοτε ἐπὶ τῆς ΟΖ, προσδιορίζεται διὰ τῆς κοινῆς τομῆς ταύτης τῆς γραμμῆς μὲ τὴν κάθετον ΙΟ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΚΗ'.

Πρόβλημα.

Ἐκ δύο δεδομένων σιγμῶν νὰ φέρωμεν περιφέρειαν κύκλου ἥτις νὰ ἅπτεται δεδομένου κύκλου.

Ζητοῦμεν κύκλον ὅς ις νὰ διέρχεται ἐκ τῶν σιγμῶν Α (σχ. 28. Πίναξ 6) καὶ νὰ ἅπτεται ἑνὸς ἄλλου τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον εἶναι Γ.