ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΓ'.

Πρόβλημα.

Δεδομένων τριῶν σιγμῶν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, ζητεῖται μία τετάρτη σιγμὴ τοιαύτη ὥσε τὸ σχηματιζόμενον ὀρθογώνιον ἀπὸ τὸ ἀπόσημά της ἐκ τῆς πρώτης σιγμῆς, καὶ ἀπὸ μίαν δεδομένην εὐθεῖαν, νὰ ἦναι ἰσοδύναμον μὲ ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔχει διὰ πλευρὰς τὰ ἀποσήματά της ἀπὸ τὰς δύο ἄλλας σιγμάς.

Ας ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ζητουμένη σιγμὴ εἶναι ἡ Δ (σχ. 13. Πίναξ 4.) ὥσε νὰ ἔχωμεν ΑΔ×Η=ΓΔ×ΒΔ.

Ανάλυσις.

Ας γένῃ ἡ ΒΕ=Η. Επειδὴ ΑΔ×Η=ΓΔ×ΒΔ, ἕπεται ὅτι ΑΔ:ΓΔ::ΒΔ:ΒΕ· ὅθεν ΑΓ:ΓΔ::ΔΕ:ΒΕ καὶ ΑΓ×ΒΕ=ΓΔ×ΔΕ. Αλλ' ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον ΑΓ×ΒΕ εἶναι δεδομένον, τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖ διὰ τὸ ὀρθογώνιον τῶν τμημάτων ΓΔ, ΔΕ, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ ΓΕ εἶναι παρομοίως γνωστή. Διὰ τοῦτο ἡ σιγμὴ Δ εἶναι προσδιορισμένη.

Σύνθεσις.

Αφ' οὗ κάμωμεν ΒΕ=Η, διαιροῦμεν τὴν ΓΕ εἰς τὸ Δ ὥσε τὸ ΓΔ×ΔΕ=ΑΓ×ΒΕ. Λέγω ὅτι Δ εἶναι ἡ ζητουμένη σιγμή. Επειδὴ ΑΓ:ΓΔ::ΔΕ:ΒΕ, ὅθεν ΑΔ:ΓΔ::ΒΔ:ΒΕ καὶ ΑΔ×ΒΕ ἢ ΑΔ×Η=ΓΔ×ΒΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΔ'.

Πρόβλημα.

Δεδομένων τριῶν σιγμῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας γραμμῆς, ζητεῖται μία ἄλλη τετάρτη σιγμὴ τοιαύτη, ὥσε τὸ σχηματιζόμενον ὀρθογώνιον ἀπὸ τὰ

ἀποτμήματής ἐκ τῆς πρώτης τιγμῆς καὶ ἀπὸ μίαν δεδομένην εὐθεῖαν, νὰ ἔχῃ δεδομένον λόγον πρὸς ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει διὰ πλευρὰς τὰ ἀποτμήματά της ἐκ τῶν ἄλλων δύο τιγμῶν.

Ας ὑποθέσωμεν λοιπὸν ὅτι ἡ Δ (σχ. 14. ἢ 13. Πίναξ 4) εἶναι ἡ ζητουμένη τιγμὴ, ὥστε νὰ ἔχωμεν ΑΔ×Η πρὸς τὸ ΓΔ×ΒΔ ὡς Μ πρὸς Ν.

Ανάλυσις.

Ας ληφθῇ μία εὐθεῖα Θ τετάρτη ἀνάλογος μεταξὺ τῶν Μ, Ν, Η, καὶ διὰ τοῦτο ἔχομεν ΑΔ×Η:ΓΔ×ΒΔ::Η:Θ, ἑπομένως ΑΔ×Θ=ΓΔ×ΒΔ. Τώρα ἡ τιγμὴ Δ προσδιορίζεται διὰ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως.

Σύνθεσις.

Λαμβάνοντες, ὡς ἀνωτέρω, τὴν Θ, ἂς ζητήσωμεν διὰ τῆς τελευταίας προτάσεως μίαν τιγμὴν Δ τοιαύτην, ὥστε νὰ ἔχωμεν ΓΔ×ΒΔ=ΑΔ×Θ· λέγω ὅτι Δ εἶναι ἡ ζητουμένη τιγμή. Επειδὴ ΑΔ×Η: ΑΔ×Θ ἢ ΓΔ×ΒΔ::Η:Θ ἢ ::Μ:Ν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΕ'.

Πρόβλημα.

Δεδομένων τριῶν τιγμῶν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, ζητοῦμεν μίαν τετάρτην τιγμὴν τοιαύτην, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ ἀποτμήματός της ἐκ τῆς πρώτης τιγμῆς νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἀποτμημάτων της ἀπὸ τὰς ἄλλας δύο τιγμάς.

Ας ὑποθέσωμεν ὅτι Δ εἶναι ἡ ζητουμένη τιγμὴ (σχ. 15. ἢ 13. Πίναξ 4.) ὥστε νὰ ἔχωμεν $ΑΔ^2$=ΓΔ×ΒΔ.

Πρώτη περίτασις. Η τιγμὴ Δ εὑρίσκεται μεταξὺ τῆς Α καὶ Β.

Ἀνάλυσις.

Ἐπειδὴ $\overrightarrow{ΔΑ}$=ΓΔ×ΒΔ· διὰ τοῦτο ΓΔ:ΑΔ::ΑΔ:ΒΔ, ὅθεν ΑΓ:ΑΔ::ΑΒ:ΒΔ ἢ ΑΓ:ΑΒ::ΑΔ:ΒΔ· ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ λόγος τῆς ΑΓ πρὸς ΑΒ εἶναι δεδομένος· λοιπὸν γίνεται γνωστὸς καὶ ἐκεῖνος τῆς ΑΔ πρὸς ΒΔ· περιπλέον εὐκόλως προσδιορίζεται ἡ στιγμὴ Δ, διότι ἡ ΑΓ εἶναι δεδομένη.

Σύνθεσις.

Ας διαιρεθῇ ἡ ΑΒ εἰς δύο μέρη τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν μεταξύ των τὸν αὐτὸν λόγον τῆς ΑΓ πρὸς ΑΒ. Λέγω ὅτι ἡ στιγμὴ Δ τῆς διαιρέσεως πληροῖ εἰς τὴν συνθήκην τοῦ προβλήματος.

Δευτέρα περίστασις· ὅταν Δ ἦναι μεταξὺ τῆς Β καὶ Γ. (σχ. 15. ἢ 13. Πίναξ 4.)

Ἀνάλυσις.

Ας γένῃ ἡ ΔΕ=$\overrightarrow{ΑΔ}$. Ἐπειδὴ $\overrightarrow{ΑΔ}$=ΓΔ×ΒΔ, εἶναι φανερὸν ὅτι ΓΔ:ΑΔ ἢ ΔΕ::ΑΔ:ΒΔ· διὰ τοῦτο ΓΕ:ΔΕ::ΑΒ:ΒΔ ἢ ΓΕ:ΑΒ::ΔΕ:ΒΔ::2ΔΕ ἢ ΑΕ:2ΒΔ, ἢ προσέτι ΓΕ:ΑΒ::ΓΕ+ΑΕ ἢ ΑΓ:ΑΒ+2ΒΔ· τώρα ΑΒ=ΑΔ−ΔΒ, λοιπὸν ΑΒ+2ΒΔ=ΑΔ+ΒΔ ἢ ΒΕ· διὰ τοῦτο ΓΕ×ΒΕ=ΑΒ×ΑΓ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ δεύτερον ὀρθογώνιον εἶναι δεδομένον, διὰ τοῦτο καὶ τὸ πρῶτον γίνεται γνωστόν· ἀλλ' ἡ ΒΓ εἶναι γνωστὴ· λοιπὸν εὐκόλως προσδιορίζεται ἡ στιγμὴ Ε, καὶ διὰ τοῦτο ἡ στιγμὴ Δ ἥτις εἶναι τῆς ἡμισείας τῆς ΑΕ.

Σύνθεσις.

Ας διαιρεθῇ ἡ ΒΓ εἰς τὴν στιγμὴν Ε εἰς δύο μέρη ταιαῦτα, ὥστε ΓΕ×ΒΕ=ΑΒ×ΑΓ, καὶ ἂς

ληφθῇ ἡ σιγμὴ Δ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΕ, τότε ἔχομεν $\overline{\text{ΑΔ}}^{2} = \text{ΓΔ} \times \text{ΒΔ}$.

Τῷ ὄντι, ἐπειδὴ ΓΕ × ΒΕ = ΑΒ × ΑΓ· φανερὸν εἶναι ὅτι ΓΕ : ΑΒ :: ΑΓ : ΒΕ, καὶ ΑΓ − ΓΕ : ΒΕ − ΑΒ :: ΓΕ : ΑΒ, καὶ ἐπειδὴ ΑΒ + 2ΒΔ = ΒΕ, διὰ τοῦτο ΑΕ : 2ΔΒ :: ΓΕ : ΑΒ, ὅθεν ΓΕ : ΑΒ :: ΑΕ : 2ΒΔ ἢ :: ΔΕ : ΒΔ· καὶ ἀλλάττοντες τὴν θέσιν τῶν μέσων συνάγομεν ΓΕ : ΔΕ :: ΑΒ : ΒΔ· διὰ τοῦτο ΓΔ : ΔΕ ἢ $\overline{\text{ΑΔ}}^{2}$ :: ΑΔ : ΒΔ· λοιπὸν τέλος πάντων $\text{ΓΔ} \times \text{ΒΔ} = \overline{\text{ΑΔ}}^{2}$.

Εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίςασιν τὸ πρόβλημα εἶναι δεκτικὸν ἑνὸς ὁρίου, εἰς τὸ ὁποῖον καταςένεται ἀνύπαρκτον, ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒ × ΑΓ εἶναι ἴσον, ἐκ τῆς κατασκευῆς, μὲ τὸ ὀρθογώνιον ΓΕ × ΒΕ· διὰ τοῦτο δὲν πρέπει νὰ ὑπερβῇ τὴν μεγίςην τιμὴν τῆς ὁποίας τὸ τελευταῖον τοῦτο εἶναι ἐπιδεκτικὸν, τοῦτ' ἔςι τὸ τετράγωνον τῆς ½ ΒΓ. Λοιπὸν τὸ ὅριον εἶναι, ὅταν ἡ σιγμὴ Ε συμπέσῃ μὲ τὴν Ο σιγμὴν τῆς ἡμισείας τῆς ΒΓ· τότε ἔχομεν $\text{ΑΒ} \times \text{ΑΓ} = \overline{\text{ΒΟ}}^{2}$ ἢ $\text{ΑΒ} \times \text{ΑΓ} + \overline{\text{ΒΟ}}^{2} = 2\overline{\text{ΒΟ}}^{2} = \overline{\text{ΑΟ}}^{2}$. Διὰ τοῦτο ΑΟ εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ τετραγώνου τοῦ κατασκευαζομένου ἐπὶ τῆς ΑΟ· εἰς ταύτην τὴν περίςασιν ΑΒ : ΒΓ :: $\sqrt{2} - 1 : 2$ ἢ :: $1 : 2 + \sqrt{8}$ τοῦτ' ἔςιν ὁ λόγος τῆς ΑΒ πρὸς ΑΓ εἶναι εἰς τὴν μεγίςην του κατάςασιν, ὅταν ἦναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῆς ἡμισείας τῆς πλευρᾶς ἑνὸς τετραγώνου πρὸς τὸ ἄθροισμα ταύτης τῆς πλευρᾶς, καὶ τῆς διαγωνίου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙϛΓ.

Πρόβλημα.

Δεδομένων τριῶν σιγμῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας γραμμῆς ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ μία τετάρτο

στιγμὴ τοιαύτη, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ ἀποστήματός της ἀπὸ τὴν πρώτην στιγμὴν νὰ ἔχῃ δεδομένον λόγον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἀποσημάτων της ἀπὸ τὰς ἄλλας δύο στιγμάς.

Ας ὑποθέσωμεν ὅτι Δ (σχ. 16) εἶναι ἡ ζητουμένη στιγμὴ, ὥστε $\overline{\text{ΑΔ}}^2$ νὰ ἦναι πρὸς τὸ ΓΔ×ΔΒ εἰς λόγον δεδομένον, παραδείγματος χάριν, ὡς Μ πρὸς Ν.

Πρώτη περίστασις ὅταν ἡ στιγμὴ Δ εὑρίσκεται μεταξὺ τῆς Α καὶ Β.

Ἀνάλυσις.

Ἐπὶ τῆς ΒΓ ἂς γραφθῇ ἡμικύκλιον, καὶ ἂς ἀχθῇ εἰς αὐτὸ ἡ ἐφαπτομένη ΔΕ, τότε $\overline{\text{ΔΕ}}^2$=ΓΔ×ΔΒ· διὰ τοῦτο τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ πρὸς ἐκεῖνο τῆς ΔΕ ἔχει τὸν δεδομένον λόγον Μ πρὸς Ν· ἂς φερθῇ ἡ ἀκτὶς ΕΖ, καὶ ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΕΔ ἕως οὗ νὰ συναντήσῃ εἰς τὸ Η μίαν κάθετον ΑΗ ἐπὶ τῆς ΑΓ. Τὰ τρίγωνα ΑΔΗ καὶ ΕΔΗ οὕτως σχηματιζόμενα, εἶναι ὅμοια καὶ ἔχομεν ΑΔ:ΔΕ::ΑΗ:ΕΖ, ἀλλ' ὁ λόγος τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΔΕ εἶναι γνωστὸς, λοιπὸν γνωστὸς εἶναι καὶ ἐκεῖνος τῆς ΑΗ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς ΕΖ εἶναι δεδομένη, διὰ τοῦτο ἡ ΑΗ καὶ Η εἶναι προσδιορισμένα, ἑπομένως ἡ ἐφαπτομένη ΗΕ, ὡς καὶ ἡ κοινήτομή της Δ μὲ τὴν ΑΓ, εἶναι παρομοίως προσδιορισμένη.

Σύνθεσις.

Ας ληφθῇ μέση ἀνάλογος Ο μεταξὺ Μ καὶ Ν. Ἐπὶ τῆς ΒΓ ἂς γραφθῇ ἡμικύκλιον, ἂς ὑψωθῇ εἰς τὴν στιγμὴν Α ἐπὶ τῆς ΑΓ μία κάθετος ὡς ἡ ΑΗ τοιούτου μήκους, ὥστε Ο:Μ::ΕΖ:ΑΗ· ἐὰν μετὰ

ταῦτα ἀχθῇ ἐκ τῆς ςιγμῆς Η μία ἐφαπτομένη ΗΔΕ, ἡ κοινὴ τομὴ της Δ μὲ τὴν ΑΓ θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη ςιγμή.

Τῷ ὄντι, ἐξ αἰτίας τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΔΑΗ καὶ ΔΕΖ, ἔχομεν ΑΔ : ΔΕ :: ΑΗ : ΕΖ ἢ :: Μ : Ο· λοιπὸν $\overset{-2}{\text{ΑΔ}} : \overset{-2}{\text{ΔΕ}} :: \overset{-2}{\text{Μ}} : \overset{-2}{\text{Ο}}$ ἢ $\overset{-2}{\text{ΑΔ}} : \overset{-2}{\text{ΔΕ}} :: \text{Μ} : \text{Ν}$, καὶ τοῦτο· ἐπειδὴ $\text{Ο} = \text{Μ} \times \text{Ν}$, ἀλλὰ $\overset{-2}{\text{ΔΕ}} = \text{ΓΔ} \times \text{ΔΒ}$· διὰ τοῦτο $\overset{-2}{\text{ΑΔ}} : \text{ΓΔ} \times \text{ΔΒ} :: \text{Μ} : \text{Ν}$.

Δευτέρα περίςασις, ὅταν Δ εὑρίσκεται μεταξὺ Β καὶ Γ (σχ. 16. δὶς)

Ανάλυσις.

Επὶ τῆς ΒΓ ἂς γραφθῇ ἡμικύκλιον· ἂς ἀχθῇ ἡ ΔΖ κατακάθετος εἰς τὴν διάμετρον, ἥτις συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Ζ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΑΖ.

Επειδὴ $\text{ΒΔ} \times \text{ΔΓ} = \overset{-2}{\text{ΔΖ}}$ διὰ τοῦτο ὁ λόγος τῆς $\overset{-2}{\text{ΑΔ}}$ πρὸς τὴν $\overset{-2}{\text{ΔΖ}}$, καὶ ἐκεῖνος τῆς ΑΔ πρὸς ΔΖ εἶναι προσδιορισμένος, ἀλλ' ἡ γωνία ΑΔΖ περιεχομένη μεταξὺ τούτων τῶν πλευρῶν εἶναι δεδομένη ὡς ὀρθὴ, ἕπεται ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΖΔ εἶναι δεδομένου ἐμβαδοῦ· καὶ διὰ τοῦτο ἡ γωνία ΔΑΖ εἶναι προσδιορισμένη, καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΖ εἶναι δεδομένης θέσεως· διὰ τοῦτο ἀκολουθεῖ τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὴν ςιγμὴν Ζ ἢ Ζ' ὅπου αὕτη τέμνει τὴν περιφέρειαν, τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὴν κάθετον ΖΔ ἢ Ζ'Δ' καὶ τὴν ςιγμὴν Δ ἢ Δ'.

Σύνθεσις.

Ας ληφθῇ μία μέση ἀνάλογος Ο μεταξὺ τῆς Μ καὶ Ν· ἂς ὑψωθῇ ἡ κάθετος ΓΕ ὥςε Μ : Ο ::

ΑΓ : ΓΕ. Μετὰ ταῦτα ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΕ, καὶ ἐκ τῆς σιγμῆς Ζ ἢ Ζ΄ ὅπου αὐτὴ συναπαντᾷ τὴν ἡμιπεριφέρειαν τὴν γεγραμμένην ἐπὶ τῆς ΒΓ, ἂς φερθῶσιν αἱ κάθετοι ΖΔ καὶ Ζ΄Δ΄, τότε ἔχομεν

$\overline{\text{Μ}} : \overline{\text{Ν}} :: \overline{\text{ΑΔ}} : \overline{\text{ΒΔ}} \times \overline{\text{ΔΓ}}$ ἢ $:: \overline{\text{ΑΔ}} : \overline{\text{ΒΔ΄}} \times \overline{\text{Δ΄Ο}}$.

Τῷ ὄντι ἡ φανερὰ ὁμοιότης τῶν τριγώνων ΑΓΕ καὶ ΑΔΖ δεικνύει ὅτι ΑΓ : ΓΕ :: ΑΔ : ΔΖ, καὶ διὰ τοῦτο $\overline{\text{ΑΓ}} : \overline{\text{ΓΕ}} :: \overline{\text{ΑΔ}} : \overline{\text{ΔΖ}}$· ἀλλὰ $\overline{\text{Μ}} : \overline{\text{Ν}} :: \overline{\text{Μ}} : \overline{\text{Ο}}$ ἢ $:: \overline{\text{ΑΓ}} : \overline{\text{ΓΕ}}$, διὰ τοῦτο $\overline{\text{ΑΔ}} : \overline{\text{ΔΕ}}$ ἢ $\overline{\text{ΒΔ}} \times \overline{\text{ΔΓ}} :: \overline{\text{Μ}} : \overline{\text{Ν}}$.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀπαιτεῖ σχέσιν τινὰ μεταξὺ τῶν δοθέντων, χωρὶς τῆς ὁποίας καταφαίνεται ἀνύπαρκτον. Ἀδύνατον εἶναι νὰ ὑπάρχῃ ὅταν ἡ ΑΕ ξεμακρύνεται τόσον ἐκ τῆς ΑΓ ὥστε νὰ μὴ συναπαντᾷ πλέον τὴν περιφέρειαν· λοιπὸν τὸ ὅριον εἶναι ὅταν ἡ ΑΕ ἅπτεται τῆς περιφερείας, τότε ὁ λόγος τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ ἤτοι τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΔΖ θέλει εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν τῆς ἡγμένης ἐφαπτομένης ἐκ τῆς σιγμῆς Α πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΘΒ, διὰ τοῦτο τὸ ὅριον ταῦ λόγου εἶναι τὸ τετράγωνον ταύτης, τοῦτ' ἔστιν ὁ λόγος τῆς Μ πρὸς τὴν Ν, ὅταν αὗται αἱ ποσότητες πλησιάζουν εἰς τὴν ἰσότητα, εἶναι εἰς τὸν μεγαλήτερον λόγον τοῦ $\overline{\text{ΑΒ}} \times \overline{\text{ΑΓ}}$ ἢ $\overline{\text{ΑΘ}} - \overline{\text{ΘΒ}}$ πρὸς ΘΒ.

Τρίτη περίσασις. Οταν ἡ σιγμὴ Δ εὑρίσκεται ἐκεῖθεν τῶν σιγμῶν Β καὶ Γ (σχ. 16. τρὶς).

Ἀνάλυσις.

Επὶ τῆς ΒΓ ἂς γραφθῇ ἡμικύκλιον· ἂς ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΔΕ ἥτις ἂς ἐκβληθῇ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν κάθετον ΑΗ, ἂς φερθῇ ἡ ΕΖ. Επειδὴ

$\overrightarrow{ΔΒ} \times \overrightarrow{ΔΓ} = \overrightarrow{ΔΕ}$, ὁ λόγος τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΔΕ εἶναι δεδομένος, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἐκεῖνος τῆς ΑΔ πρὸς ΔΕ. Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΔΗΑ καὶ ΔΕΖ εἶναι ὅμοια, ὡς ὀρθογώνια, καὶ ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν κοινὴν, λοιπὸν ΑΔ : ΔΕ :: ΑΗ : ΕΖ, ἀλλ' ὁ λόγος τῆς ΑΔ πρὸς ΔΕ εἶναι γνωστὸς, ἀκολουθεῖ λοιπὸν τὸ αὐτὸ καὶ δι' ἐκεῖνον τῆς ΑΗ : ΕΖ· καὶ ἐπειδὴ ΕΖ, ὡς τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓ, εἶναι γνωστὴ, διὰ τοῦτο ΑΗ καὶ ἡ στιγμὴ Η εἶναι προσδιορισμένα, ὡς καὶ ἡ ἐφαπτομένη ΗΕ καὶ ἡ τομὴ τῆς Δ μὲ τὴν ΑΓ.

Σύνθεσις.

Ἂς ληφθῇ μία μέση ἀνάλογος Ο, μεταξὺ Μ καὶ Ν· ἂς κάμωμεν περιπλέον ὥστε ἡ ΑΗ νὰ ἦναι εἰς τὴν ΕΖ ὡς Μ πρὸς τὴν Ο. Ἐκ τῆς στιγμῆς Η οὕτω προσδιορισθείσης, ἂς ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΗΕΔ· λέγω ὅτι Δ εἶναι ἡ ζητουμένη στιγμή.

Διὰ νὰ τὸ ἀποδείξωμεν, ἂς φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΕΖ· τὰ τρίγωνα ΑΔΗ καὶ ΕΔΖ ἐπειδὴ εἶναι ὅμοια, ἔχομεν ΑΗ : ΕΖ :: ΑΔ : ΕΔ, ἀλλὰ ΑΗ : ΕΖ :: Μ : Ν :: Μ : Ο, διὰ τοῦτο Μ : Ο :: ΑΔ : ΕΔ, καὶ Μ : Ο :: ΑΔ : ΕΔ· ὅθεν Μ : Ν :: ΑΔ : ΕΔ ἢ :: $\overrightarrow{ΔΑ} : \overrightarrow{ΒΔ} \times \overrightarrow{ΔΓ}$ (*).

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΖ'.

Πρόβλημα.

Δεδομένων τεσσάρων στιγμῶν ἐπὶ μιᾶς δεδομένης εὐθείας, ζητεῖται μία πέμπτη στιγμὴ τοιαύτη, ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἀποστημάτων της ἀπὸ τὰς δύο

(*) Β. Κ. Ο μαθητὴς ἂς χαρακτήσῃ τὸ σχ. 14, σχ. 15, σχ. 17, καὶ σχ. 18.

πρώτας σιγμὰς νὰ εὑρίσκεται εἰς δεδομένον λόγον μὲ τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἀποσημάτων της ἀπὸ τὰς ἄλλας δύο σιγμάς.

Πρέπει νὰ εὕρωμεν μίαν σιγμὴν Ε (σχ. 17. Πίναξ. 5.) τοιαύτην ὥστε ΑΕ×ΕΒ : ΔΕ×ΕΓ::Μ:Ν.

Πρώτη περίσασις· ἂς ὑποθέσωμεν Μ=Ν.

Ανάλυσις.

Ἔστω Ε ἡ ζητουμένη σιγμὴ, τότε ἔχομεν ΑΕ×ΕΒ=ΔΕ×ΕΓ, καὶ διὰ τοῦτο ΑΕ:ΓΕ::ΔΕ:ΕΒ, καὶ ἐν συνθέσει ΑΓ:ΒΔ::ΓΕ:ΕΒ, καὶ ΑΓ+ΒΔ : ΒΔ :: ΒΓ:ΕΒ· ἀλλ' ὁ λόγος τῆς ΑΓ+ΒΔ πρὸς τὴν ΒΔ ἐπειδὴ εἶναι δοδομένος, ἕπεται ὅτι γνωστὸς εἶναι καὶ ἐκεῖνος τῆς ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ· διὰ τοῦτο ἡ ΒΕ καὶ ἡ σιγμὴ Ε εἶναι προσδιορισμένα.

Σύνθεσις.

Η ζητουμένη σιγμὴ Ε θέλει εὑρεθῆ, ἐὰν λάβωμεν αὐτὴν εἰς τρόπον ὥστε ΑΓ+ΒΔ:ΒΔ::ΒΓ:ΕΒ· ἐπειδὴ τότε ἔχομεν, ἀφαιροῦντες, ΑΓ:ΒΔ::ΓΕ:ΒΕ, καὶ ΑΕ:ΕΔ::ΓΕ:ΕΒ· ὅθεν ΑΕ×ΕΒ=ΔΕ×ΕΓ.

Δευτέρα Περίσασις· ὅταν Μ καὶ Ν ἦναι ἄνισα.

Ας ζητήσωμεν διὰ τῆς ἀνωτέρω κατασκευῆς μίαν σιγμὴν Ζ τοιαύτην, ὥστε ΑΖ×ΖΒ=ΔΖ×ΖΓ.

Επειδὴ ΑΕ×ΕΒ : ΔΕ×ΕΓ::Μ:Ν, ἕπεται ὅτι ΑΕ×ΕΒ : ΑΕ×ΕΒ—ΔΕ×ΕΓ::Μ : Μ—Ν, ἀλλὰ ΑΕ×ΕΒ—ΔΕ×ΕΓ=(ΑΕ×ΕΒ—ΑΖ×ΖΒ)+(ΔΖ×ΖΓ—ΔΕ×ΕΓ), καὶ τοῦτο, ἐπειδὴ ΑΕ=ΑΖ+ΖΕ, ΒΖ=ΒΕ—ΕΖ, ΓΖ=ΓΕ+ΕΖ, ΔΕ=ΔΖ—ΕΖ, καὶ ἄγεται προσέτι εἰς ΕΖ (ΑΖ+ΒΕ)+ΕΖ (ΔΖ+ΓΕ)=ΖΕ (ΑΔ+ΒΓ), λοιπὸν ΑΕ×ΕΒ : ΕΖ (ΑΔ+ΒΓ)::Μ:Μ—Ν· ἑπομένως ἡ σιγμὴ Ε προσδιορίζεται διὰ τῆς ΙΔ' πρτάσεως τούτου τοῦ

βιβλίου, διότι ἡ πρότασις ἄγεται εἰς ταύτην. Δεδομένων τριῶν σημείων Α,Β,Ζ μιᾶς εὐθείας, νὰ εὕρομεν μίαν τετάρτην Ε, ὥστε κάμνοντες ΑΕ + ΒΓ = Η, νὰ ἔχωμεν ΕΖ × Η : ΑΕ × ΕΒ : : Μ — Ν : Ν.

Η Συνθετική ἀπόδειξις μὲ εὐκολίαν συνάγεται ἐκ τῶν ἀνωτέρω.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΗ'.

Πρόβλημα.

Δεδομένων τεσσάρων σημείων ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ζητεῖται μία πέμπτη τοιαύτη ὥστε τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἀποσημάτων της ἀπὸ τὰς δύο ἄκρας σημεῖα νὰ ἦναι εἰς δεδομένον λόγον μὲ τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἀποσημάτων της ἀπὸ τὰς δύο μεσαίας σημεῖα.

Ας ζητηθῇ σημεῖόν τι Ε (σχ. 18) ὥστε νὰ ἔχωμεν ΑΕ × ΕΔ : ΒΕ × ΕΓ : Μ : Ν.

Πρώτη περίπτωσις. Ἔστω ΑΒ = ΓΔ.

Ἀνάλυσις.

Ἐπειδὴ ΕΔ = ΓΔ + ΕΓ καὶ ΑΓ = ΑΒ + ΒΕ + ΕΓ, ἔχομεν ΑΕ × ΕΔ = (ΑΒ + ΒΕ) (ΑΒ + ΕΓ) = ΑΒ × ΑΓ + ΒΕ × ΕΓ, λοιπὸν ΑΕ × ΕΔ : ΑΒ × ΑΓ : : Μ : Μ — Ν, διὰ τοῦτο ὁ λόγος τοῦ ΑΕ × ΕΔ πρὸς ΑΒ × ΑΓ εἶναι δεδομένος; καὶ ἀκολούθως εἶναι γνωστὸν καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΑΕ × ΕΔ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ γραμμαὶ ΑΕ, ΕΔ εἶναι δύο τμήματα μιᾶς εὐθείας γραμμῆς ΑΔ ἥτις εἶναι γνωστή, ἠξεύρομεν τί θὰ πράξωμεν διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν σημεῖον Ε (*).

(*) Ο Μ. Ἐπειδὴ ΑΒ = ΓΔ, καὶ ΕΔ = ΓΔ + ΕΓ, διὰ τοῦτο ΕΔ = ΑΒ + ΕΓ, καὶ ἐπειδὴ ΑΓ = ΑΒ + ΒΕ + ΕΓ καὶ ΑΕ = ΑΒ + ΒΕ, διὰ τοῦτο ΑΕ × ΕΔ = (ΑΒ + ΒΕ) × (ΑΒ + ΕΓ) = ΑΒ ×

Σύνθεσις.

Ας κάμωμεν $M-N:M::AB:\Pi$, καὶ ἂς διαιρέσωμεν τὴν ΑΔ εἰς τὴν Ε ἢ εἰς τὴν Ε' ὥστε νὰ ἔχωμεν $AE\times E\Delta=\Pi\times A\Gamma$· λέγω ὅτι τὸ Ε εἶναι ἡ ζητουμένη σιγμή. Διότι, ἐκ τῆς κατασκευῆς, $M:M-N::\Pi:AB$, λοιπὸν $M:M-N::\Pi\times A\Gamma$ ἢ $AE\times E\Delta:AB\times A\Gamma$· διὰ τοῦτο $M:N::AE\times E\Delta:AE\times E\Delta-AB\times A\Gamma$, ἢ $::AE\times E\Delta:BE\times E\Gamma$.

Δευτέρα περίσσεις. Ας ὑποθέσωμεν τὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν ΓΔ. (σχ. 18.).

Ἀνάλυσις.

Φανερὸν εἶναι ὅτι $AE\times E\Delta=(BE+AB)(E\Gamma+\Gamma\Delta)=BE\times E\Gamma+BE\times\Gamma\Delta+AB\times E\Delta$, ἐπειδὴ $AB\times E\Gamma+AB\times\Gamma\Delta=AB(E\Gamma+\Gamma\Delta)=AB\times E\Delta$, λοιπὸν $AE\times E\Delta-BE\times E\Gamma=BE\times\Gamma\Delta+E\Delta\times AB=B\Delta\times\Gamma\Delta-E\Delta\times\Gamma\Delta+AB\times E\Delta=B\Delta\times\Gamma\Delta+(AB-\Gamma\Delta)E\Delta$, ἐπειδὴ $BE=B\Delta-E\Delta$; ἂς ἐκβληθῇ ἡ ΑΔ ἕως εἰς τὴν σιγμὴν Ζ ὥστε $(AB-\Gamma\Delta)\Delta Z=B\Delta\times\Gamma\Delta$· ἡ σιγμὴ αὕτη εἶναι γνωστή, ἐπειδὴ ΑΒ, ΓΔ, ΒΔ εἶναι δεδομένα. Διὰ ταύτης τῆς κατασκευῆς ἔχομεν $AE\times E\Delta-BE\times E\Gamma=(AB-\Gamma\Delta)(\Delta Z+E\Delta)=(AB-\Gamma\Delta)\times EZ$. Καὶ ἐπειδὴ ὁ λόγος τοῦ $AE\times E\Delta$ πρὸς $B\Delta\times E\Gamma$ εἶναι δεδομένος, διὰ τοῦτο καὶ ἐκεῖνος τοῦ $AE\times E\Delta$ πρὸς

$AB+AB\times BE+AB\times E\Gamma+E\Gamma\times EB$, καὶ ἐπειδὴ $AB(AB+BE+E\Gamma)=AB\times AE$, διὰ τοῦτο $AE\times E\Delta=AB\times A\Gamma+BE\times EB$, καὶ ἐπειδὴ $AE\times E\Delta:BE\times E\Gamma::M:N$, διὰ τοῦτο $AE\times E\Delta:AE\times E\Delta-BE\times E\Gamma::M:M-N$, ἢ $AE\times E\Delta:AB\times A\Gamma+BE\times E\Gamma-BE\times E\Gamma::N:M-N$ ἢ $AE\times E\Delta:AB\times A\Gamma::M:M-N$.

(ΑΒ—ΓΔ)ΔΖ γίνεται γνωστὸς· ἀλλ' ἡ διαφορὰ ΑΒ—ΓΔ εἶναι γνωστὴ, καθὼς καὶ αἱ σιγμαὶ Α, Γ, Ζ· λοιπὸν προσδιορίζομεν τὰς σιγμὰς Ζ καὶ Ε διὰ τῆς Δ προτάσεως τοῦτου τοῦ βιβλίου.

Διὰ τῆς προτάσεως ταύτης εὐκόλως συνάγομεν τὴν ζητουμένην κατασκευήν.

Μένει ἀκόμη ἡ τελευταία περίστασις τούτου τοῦ προβλήματος. Διὰ τοῦτο ἐπὶ τῆς ΑΔ (σχ. 18. δὶς Πίναξ 5.), ὡς διαμέτρου γράφομεν περιφέρειαν κύκλου καὶ ὑψώνομεν τὰς καθέτους ΒΙ καὶ ΗΓΘ. Ας ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΙΟΘ, καὶ ἐκ τῆς σιγμῆς Ε ἂς ἀχθῇ παράλληλος αὐτῆς ἡ ΚΕΛ· ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΟΗ, ΕΗ, ἔπειτα ἡ ΕΙ ἥτις ἂς ἐκβληθῇ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὴν σιγμὴν Μ· τέλος πάντων ἂς ἑνωθῇ ἡ σιγμὴ Μ μὲ τὰς σιγμὰς Λ καὶ Η.

Φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ σιγμὴ Ο εἶναι δεδομένη. Περιπλέον ὁ λόγος τοῦ ΑΕ×ΕΔ πρὸς ΒΕ×ΕΓ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς σύνθετος ἐξ ἐκείνου τοῦ ΑΕ×ΕΔ ἢ ΙΕ×ΕΜ πρὸς ΚΕ×ΕΛ, καὶ ἐκ τοῦ λόγου τοῦ ΚΕ×ΕΛ πρὸς ΒΕ×ΕΓ. Επειδὴ δὲ ΒΚ καὶ ΓΛ εἶναι παράλληλοι· διὰ τοῦτο ΚΕ:ΕΛ::ΒΕ:ΕΓ ἢ ΚΕ:ΒΕ::ΕΛ:ΕΓ, καὶ διὰ τοῦτο $KE^2:BE^2$::ΚΕ×ΕΛ:ΒΕ×ΕΓ. Περιπλέον αἱ εὐθεῖαι ΚΕ καὶ ΙΟ ὡς παράλληλοι, δίδουν ΚΕ:ΒΕ::ΙΟ:ΒΟ, ἑπομένως $KE^2:BE^2::IO^2:BO^2$· λοιπὸν $ΓO^2:BO^2$::ΚΕ×ΕΛ:ΒΕ×ΕΓ, ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου ΚΕ×ΕΛ πρὸς ΒΕ×ΕΓ εἶναι δεδομένος καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι ἐκεῖνος τῶν δύο γραμμῶν Π καὶ ΣΤ.

Η γωνία ΜΗΛ ἐπειδὴ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΜΙΗ (διότι αἱ δύο αὗται γωνίαι εἶναι γεγραμμέναι εἰς

τὸ αὐτὸ τόξον), εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐντὸς γωνίαν ΜΕΛ, καὶ διὰ τοῦτο τὸ τετράπλευρον ΜΗΕΛ δύναται νὰ ἐγγραφθῇ εἰς ἕνα κύκλον.

Τοῦτο φανερόνει ὅτι ἡ γωνία ΑΜΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΗΕ. Ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΝ ὑπὸ μίαν κλίσιν ΜΑΝ ἴσην μὲ τὴν ΓΗΟ. Τὰ τρίγωνα ΗΟΓ καὶ ΘΟΓ εἶναι ἴσα· λοιπὸν ἡ γωνία ΓΗΟ=ΓΘΟ=ΓΑΕ=ΕΚΑ· ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΙΕΚ καὶ ΑΕΝ εἶναι ὅμοια, καὶ ΙΕ:ΚΕ::ΕΑ:ΕΝ· λοιπὸν ΙΕ×ΕΝ=ΚΕ×ΕΑ. Ἂς λάβωμεν τὴν ΠΡ εἰς τρόπον ὥστε ΠΡ:ΠΚ::ΕΜ:ΕΝ. Ο λόγος τοῦ ΙΕ×ΕΜ πρὸς ΚΕ×ΕΑ εἶναι ἐκεῖνος τοῦ ΙΕ×ΕΜ πρὸς ΙΕ×ΕΝ ἢ τῆς ΕΜ πρὸς ΕΝ· λοιπὸν ὁ λόγος τοῦ ΑΕ×ΕΔ πρὸς ΒΕ×ΕΓ σύγκειται ἀπὸ ἐκεῖνον τῆς ΠΡ πρὸς ΠΚ, καὶ ἀπὸ τὸν τῆς ΠΚ πρὸς ΣΤ, τοῦτ' ἔστιν εἶναι ἴσος μὲ ἐκεῖνον τῆς ΠΡ πρὸς ΣΤ. Ἀλλ' ὅταν ἡ στιγμὴ τῆς τομῆς Ε πλησιάζῃ πρὸς τὴν Ο, τότε ἡ γωνία ΕΗΟ ἢ ΜΑΖ σμικρύνει, καὶ ἡ στιγμὴ Ν ἀμοιβαίως πλησιάζει εἰς τὴν Μ. Οὕτως τὸ τελευταῖον ὅριον, τὸ ὁποῖον ἡ ΠΡ δὲν δύναται νὰ περάσῃ εἶναι ἡ ΠΚ. Λοιπὸν ὁ λόγος τοῦ ὀρθογωνίου ΑΕ×ΕΔ πρὸς ΒΕ×ΕΓ ἔχει δι' ὅριον ἐκεῖνον τῆς ΠΚ πρὸς ΣΤ ἢ τοῦ $\overline{\text{ΙΟ}}^{2}$ πρὸς $\overline{\text{ΒΟ}}^{2}$.

Η στιγμὴ Ο, ἥτις εἶναι τὸ ὅριον τῆς τομῆς Ε εὐκόλως δύναται νὰ προσδιορισθῇ· διότι, ἐξ αἰτίας τοῦ παραλληλισμοῦ τῶν εὐθειῶν ΒΙ καὶ ΓΘ, ἔχομεν ΒΙ:ΓΘ::ΒΟ:ΟΓ, καὶ ΒΙ ἢ ΑΒ×ΒΔ:ΓΘ ἢ ΑΓ×ΓΔ::ΒΟ:ΓΟ. Λοιπὸν διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν στιγμὴν Ο πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὴν ΒΓ εἰς δύο τμήματα, τὰ ὁποῖα νὰ ἦναι εἰς λόγον ὑποδιπλάσιον ἐκείνου τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒ×ΒΔ πρὸς ΑΓ×ΓΔ·

τοῦτο ἐκτελεῖται διὰ τῆς ΙΔ προτάσεως τοῦ πρώτου βιβλίου.

Ἀλλὰ τὸ ὅριον, τὸ ὁποῖον ἐγνωρίσαμεν δύνασται νὰ προσδιορισθῇ εὐκολώτερον. Τῷ ὄντι, ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΙΗ, καὶ ἂς ἀχθῇ εἰς ταύτην τὴν γραμμὴν ἡ κάθετος ΔΥ· ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΔΗ, ΔΙ, ΓΥ καὶ ΒΥ· ἀφ' οὗ δὲ φερθῇ ἡ διάμετρος ΙΩ ἂς ἑνωθῇ ἡ Ω μὲ τὴν Η.

Ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΔΗΓ, ΔΙΥ ἔχει διὰ μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΔΘ ἢ τοῦ ἴσου μὲ αὐτὸ ΗΔ· διὰ τοῦτο αὗται αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι. Περιπλέον τὰ τετράπλευρα ΒΙΥΔ, ΗΓΔΥ δύνανται νὰ ἐγγραφθῶσιν εἰς ἕνα κύκλον, διότι αἱ ἀπέναντι γωνίαι τῶν Β, Υ καὶ Γ, Υ εἶναι ὀρθαί· λοιπὸν ἡ γωνία ΔΗΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΔΥΗ καὶ ἡ ΔΙΥ ἴση μὲ τὴν ΔΒΥ· διὰ τοῦτο αἱ γωνίαι ΔΥΓ καὶ ΔΒΥ εἶναι ἴσαι. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΓΔΥ καὶ ΥΔΒ εἶναι ὅμοια ὡς ἔχοντα μίαν κοινὴν γωνίαν· οὕτως ΒΔ : ΔΥ :: ΔΥ : ΔΓ καὶ ΒΔ × ΔΓ = $\overline{\text{ΔΥ}}^2$· ἀλλ' ἀπὸ ἄλλο μέρος $\overline{\text{ΔΗ}}^2$ = ΑΔ × ΔΓ· λοιπὸν $\overline{\text{ΔΗ}}^2$ — $\overline{\text{ΔΥ}}^2$ ἢ $\overline{\text{ΗΥ}}^2$ = ΑΔ × ΔΓ — ΔΒ × ΔΓ = ΑΒ × ΔΓ· κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον συνάγομεν $\overline{\text{ΙΥ}}^2$ = ΑΓ × ΒΔ. Διὰ τοῦτο τὸ διάστημα ΙΗ εἶναι προσδιορισμένον, ἐπειδὴ τὸ τοιοῦτον εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῶν δύο τετραγώνων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀμοιβαίως ἴσα μὲ τὰ ὀρθογώνια ΑΓ × ΔΒ, ΑΒ × ΔΓ. Περιπλέον ἡ γωνία ΒΙΟ ἴση μὲ τὴν ΗΘΙ, εἶναι ἴση καὶ μὲ τὴν ΗΖΙ, καὶ ἐπειδὴ παρομοίως ἡ γωνία ΟΒΙ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΙΗΖ, ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΙΟΒ,

ΖΙΗ εἶναι ὅμοια, καὶ ὅτι ΙΟ:ΒΟ::ΙΖ ἡ ΑΔ:ΙΗ. Οὕτως τὸ ὅριον τοῦ λόγου τοῦ ΑΕ×ΕΔ πρὸς ΒΕ×ΕΓ, τοῦτ' ἔςιν ἡ τιμὴ τούτου τοῦ λόγου εἰς τὴν κατάςασιν τοῦ ἐλαχίςου, εἶναι ἴση μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῆς ΑΔ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν πλευρῶν τῶν δύο τετραγώνων ἀμοιβαίως ἴσων μὲ τὰ ὀρθογώνια ΑΓ×ΔΒ, ΑΒ×ΔΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΙΘ'.

Πρόβλημα.

Ἐκ μιᾶς δεδομένης ςιγμῆς νὰ ἄξωμεν μίαν εὐθεῖαν τοιαύτην, ὥςε τὸ διαχωριζόμενον ταύτης μέρος ἀπὸ μίαν δεδομένην περιφέρειαν νὰ ἦναι ἴσον μὲ δεδομένην τινὰ γραμμήν.

Ἔςω Α ἡ ςιγμὴ (σχ. 19. Πίναξ. 5.), ἐκ τῆς ὁποίας θέλομεν νὰ φέρωμεν μίαν γραμμὴν ΑΘΙ, ὥςε τὸ διαχωριζόμενον ταύτης μέρος ἀπὸ τὴν περιφέρειαν, δηλαδὴ τὸ ΘΙ νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὴν Θ.

Ἀνάλυσις.

Ἐπειδὴ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον αἱ ἴσαι χορδαὶ ἰσάκις ἀπέχουν τοῦ κέντρου· διὰ τοῦτο ἐὰν ἐγγράψωμεν εἰς τὸν δεδομένον κύκλον μίαν χορδὴν ΔΕ ἴσην μὲ τὴν Θ, τότε φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ ζητουμένη χορδὴ πρέπει νὰ ἀπέχῃ ἐκ τοῦ κέντρου ὅσον ἡ ΔΕ, δηλαδὴ μίαν ποσότητα ἴσην μὲ τὴν ΓΖ. Ὅθεν αὕτη ἡ χορδὴ πρέπει νὰ ἅπτεται τῆς περιφερείας τῆς γραφομένης ἐκ τοῦ κέντρου Γ, μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΖ. Τώρα ἐπειδὴ ἡ ςιγμὴ Α εἶναι δεδομένη, ἡ ἐφαπτομένη ΑΗ εἰς τὸν κύκλον εἶναι γνωςὴ καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΘΙ εἶναι προσδιορισμένη.

Σύνθεσις.

Ἂς φερθῇ μία χορδὴ ΔΕ ἴση μὲ τὴν Θ, ἐκ τῆς Γ ἂς ἀχθῇ ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας ἡ κάθετος ΓΖ,

καὶ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΖ ἂς γραφθῇ εἰς συγκεντρικὸς κύκλος. Η ἐφαπτομένη ΘΑΙ εἰς τοῦτον τὸν κύκλον εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα· ἐπειδὴ εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ χορδαὶ ΘΙ καὶ ΔΕ, ὡς ἰσάκις ἀπέχουσαι τοῦ κέντρου, εἶναι ἴσαι μεταξύ των καὶ μὲ τὴν δεδομένην εὐθεῖαν Θ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Κ'.

Πρόβλημα.

Εἰς μιᾶς δεδομένης σιγμῆς νὰ ἐξωμεν μίαν εὐθεῖαν, ὥστε τὸ διαχωριζόμενον ταύτης μέρος ἀπὸ δύο συγκεντρικὰς περιφερείας, νὰ ἦναι ἴσον μὲ δεδομένην εὐθεῖαν γραμμήν.

Ζητεῖται νὰ φερθῇ ἐκ τῆς σιγμῆς Α (σχ. 20.) ἡ εὐθεῖα ΑΒΓ, ὥστε τὸ μέρος ΓΒ τὸ διαχωριζόμενον ἀπὸ τὰς δύο περιφερείας ΘΕΓΜ καὶ ΙΖΒΛ νὰ ἦναι ἴσον μὲ τὴν Δ.

Ἐξ ὁποιασδήποτε σιγμῆς Θ λαμβανομένης ἐπὶ μιᾶς τῶν δεδομένων περιφερειῶν ἂς φερθῇ ἡ χορδὴ ΘΜ=ΕΓ, καὶ ἐπὶ τούτων ἂς φερθῶσιν αἱ κάθετοι ΟΚ καὶ ΟΗ. Αἱ ἴσαι χορδαὶ ΘΜ καὶ ΕΓ ἀπέχουν ἰσάκις τοῦ κέντρου, καὶ διὰ τῆς ἀντιστρόφου ἰδιότητος ΙΛ=ΒΖ· διὰ τοῦτο τὰ ἡμίσεα τούτων τῶν χορδῶν εἶναι ἴσα, τοῦτ' ἔστι ΘΚ=ΗΓ, καὶ ΙΚ=ΗΒ. Λοιπὸν ΘΙ ἐκτὸς ὅτι εἶναι ἴση μὲ τὴν ΒΓ, εἶναι καὶ δεδομένη· ἕπεται ἐκ τούτου ὅτι ἡ σιγμὴ Ι, καθὼς καὶ ἡ χορδὴ ΘΜ εἶναι προσδιορισμένα. Τὸ αὐτὸ ὑπάρχει, καὶ διὰ τὴν ΑΗΓ ἥτις ἅπτεται τοῦ κύκλου ΟΚΗ, τοῦ ὁποίου ἡ εὐθεῖα ΘΜ εἶναι ἐφαπτομένη.

Σύνθεσις.

Ἐκ σιγμῆς τινὸς Θ λαμβανομένης κατ' ἀρέσκειαν ἐπὶ μιᾶς τῶν περιφερειῶν, ἂς φερθῇ μία εὐθεῖα ΘΙΜ