Ἀναγωγὴ τῶν κλασμάτων εἰς τοὺς ἐλαχίστους ὅρους των.

§. 47. Συμβαίνει συχνὰ εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν κλασμάτων νὰ ἀπαντήσωμεν κλάσμα ἐκφραζόμενον διὰ μεγαλωτάτων ἀριθμῶν· τώρα ὅσον ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς εἶναι μεγάλοι, τόσον πλειοτέραν δυσκολίαν ἀπαντῶμεν εἰς τὸ νὰ λάβωμεν μίαν καθαρὰν ἰδέαν τοῦ κλάσματος.

Π. χ. Διὰ νὰ ἐκτιμήσωμεν $\frac{12}{15}$, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὴν μονάδα εἰς δεκαπέντε ἴσα μέρη, καὶ νὰ λάβωμεν 12 ἀπὸ τὰ τοιαῦτα μέρη, ἀλλὰ ἐὰν παρατηρήσωμεν, ὅτι 12 καὶ 15 διαιροῦνται ἐν ταυτῷ διὰ τοῦ 3, ἐκτελοῦντες ταύτην τὴν πρᾶξιν συνάγομεν $\frac{4}{5}$, κλάσμα ἰσοδύναμον τοῦ διδομένου (ἀριθμ. 42), καὶ διὰ νὰ λάβωμεν μίαν ἰδέαν τούτου τοῦ κλάσματος, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν μονάδα εἰς 5 ἴσα μέρη, καὶ νὰ λάβωμεν 4, τὸ ὁποῖον εἶναι εὐκολώτερον τοῦ πρώτου.

Διὰ τοῦτο, ὅταν μᾶς παῤῥησιάζηται ἓν κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι ἀρκετὰ μεγάλοι, εἶναι ὠφέλιμον νὰ τὸ ἀνάγωμεν εἰς μίαν ἔκφρασιν πλέον ἁπλουστέραν, ἐὰν εἶναι δυνατόν.

Τὸ πρῶτον μέσον, τὸ ὁποῖον μᾶς παῤῥησιάζεται, εἶναι νὰ διαιρῶμεν τοὺς δύο του ὅρους διὰ τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, ἕως οὗ εἶναι δυνατόν.

Ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{108}{144}$, τὸ ὁποῖον ἔχομεν νὰ ἀνάξωμεν εἰς τοὺς μικροτέρους του ὅρους.

Εἶναι φανερὸν, ὅτι οἱ δύο του ὅροι εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 2, καὶ ἐκτελουμένης τῆς πράξεως συνάγομεν $\frac{54}{72}$ διὰ πρῶτον ἀποτέλεσμα.

Οἱ δύο ὅροι τούτου τοῦ νέου κλάσματος διαιροῦνται ἀκόμη διὰ τοῦ 2, καὶ συνάγομεν δι' ἐξαγόμενον $\frac{27}{36}$.

Δοκιμάζοντες τώρα τὴν διαίρεσιν διὰ τοῦ 3, εὑρίσκομεν $\frac{9}{12}$, κλάσμα τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι διαιροῦνται ἀκόμη διὰ τοῦ 3, καὶ συνάγομεν τέλος πάντων $\frac{3}{4}$ διὰ τὸ κλάσμα $\frac{108}{144}$, ἠγμένον εἰς τὴν ἁπλουστέραν του μορφήν.

Αὕτη ἡ μέθοδος εἶναι εὔκολος καὶ ὠφέλιμος εἰς τὰς πράξεις, ὅμως δὲν εἶναι πολλὰ γενικὴ, ἄλλως δὲ συμβαίνει τὸ ἄτοπον, ὅταν οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος εἶναι πολλὰ μεγάλοι, νὰ ἀφίνωμεν νὰ μᾶς ἐκφεύγωσι κοινοὶ διαιρέται εἰς τοὺς δύο ὅρους.

Ἰδοὺ ἀκριβής τις καὶ βεβαία μέθοδος τοῦ νὰ ἀνάγωμεν δεδομένον τι κλάσμα εἰς τὴν ἁπλουστέραν του ἔκφρασιν. Αὕτη συνίσταται εἰς τὸ νὰ προσδιορίσωμεν κατ' εὐθεῖαν τὸν μεγαλήτερον ἀριθμὸν, ὅστις δύναται εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν νὰ διαιρῇ καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος. Ἡ μέθοδος αὕτη, τὴν ὁποίαν ἤδη ἀναπτύσσομεν, εἶναι γνωστὴ ὑπὸ τὸ ὄνομα, Μέγιστος κοινὸς Διαιρέτης.

§. 48. Ἂς γνωσθοῦν δὲ πρότερον προοιμιώδεις τινὲς γνώσεις.

Εἷς ἀριθμὸς πολλαπλάσιος ἄλλου ἀριθμοῦ καλεῖται, ὅταν τὸν περιέχῃ ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν φορῶν, τουτέστιν ὅταν ὁ πρῶτος ἀριθμὸς διαιρῆται ἐντελῶς διὰ τοῦ δευτέρου.

Καὶ ἀντιστρόφως, ὁ δεύτερος ἀριθμὸς εἶναι ὑποπολλαπλάσιος, ἢ διαιρέτης τοῦ πρώτου.

Οὕτως 24 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 6, ἐπειδὴ 4 φοραῖς 6 κάμνει τὸ 24; καὶ ἀντιστρόφως 4 καὶ καὶ 6 εἶναι διαιρέται, ἢ ὑποπολλαπλάσιοι τοῦ 24. Παρομοίως 60 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 12, ἐπειδὴ 5 φοραῖς 12 δίδει 60, καὶ ἀντιστρόφως 5 καὶ 12 εἶναι διαιρέται, ἢ ὑποπολλαπλάσιοι τοῦ 60.

Καλεῖται ἀριθμὸς πρῶτος κάθε ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος δὲν διαιρεῖται ἐντελῶς, παρὰ διὰ τοῦ ἑαυτοῦ του, ἢ διὰ τῆς μονάδος, ἥτις εἶναι διαιρέτης ὅλων τῶν ἀριθμῶν· οὕτως 2, 3, 5, 7, 11, 13 .... εἶναι πρῶτοι ἀριθμοὶ, ἀλλὰ 4, 6, 8, 9, 12 .... δὲν εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι· ἐπειδὴ οὗτοι ἔχουσι διαιρέτας τὸν 2 καὶ 3.

Δύο ἀριθμοὶ καλοῦνται ἀναμεταξύ των πρῶτοι, ὅταν δὲν ἔχωσιν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην, παρὰ τὴν μονάδα, οὕτως 4 καὶ 9, 7 καὶ 12, 12 καὶ 25, εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι ἀναμεταξύ των· 8 καὶ 12 δὲν εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι ἀναμεταξύ των, ἐπειδὴ διαιροῦνται εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν διὰ τοῦ 2 καὶ διὰ τοῦ 4.

Πρώτη ἀρχή. Κάθε ἀριθμὸς, ὅστις διαιρεῖ ἐντελῶς ἕνα ἀριθμὸν, διαιρεῖ οὗτος καὶ ἕκαστον πολλαπλάσιον τοῦ τοιούτου δευτέρου ἀριθμοῦ.

Π. χ. 24 μὲ τὸ νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 8, καὶ δίδει διὰ πηλίκον 3, 5 φοραῖς 24, ἢ 120 διαιρούμενον διὰ τοῦ 8 δίδει (ἀριθμ. 40) διὰ πηλίκον 5 φοραῖς 3 ἢ 15. Παρομοίως 60 διαιρούμενον διὰ 12, δίδει διὰ πηλίκον 5, 7 φοραῖς 60 ἢ 420 διαιρούμενου διὰ τοῦ 12, δίδει διὰ πηλίκον 7 φοραῖς 5. ἢ 35.

Δευτέρα ἀρχή. Κάθε ἀριθμὸς χωριζόμενος εἰς δύο μέρη, τὸ ἓν καὶ τὸ ἄλλο διαιρετὰ δι' ἄλλου δευτέρου ἀριθμοῦ, πρέπει καὶ αὐτὸς νὰ διαιρῆται ἐντελῶς διὰ τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ.

Τῷ ὄντι, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ μὲ τὸ νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο μερικῶν πηλίκων, ἐὰν τὰ τοιαῦτα μερικὰ πηλίκα εἶναι ἀκέραια, τὸ ἄθροισμά των, τουτέστι τὸ ὅλον πηλίκον πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιον.

Τρίτη ἀρχή. Κάθε ἀριθμὸς, ὅς τις διαιρεῖ ἐντελῶς ἓν ὅλον ἀναλυόμενον εἰς δύο μέρη, καὶ ὅς τις διαιρεῖ παρομοίως τὸ ἓν τῶν μερῶν, πρέπει προσέτι νὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄλλο μέρος· ἐπειδὴ τὸ ὅλον πηλίκον μὲ τὸ νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο μερικῶν πηλίκων, ἐὰν τὸ ἓν τῶν πηλίκων τούτων ἦτον κλασματικὸν, ἠθέλαμεν ἔχει ἀριθμόν τινα ἀκέραιον ἴσον μὲ ἕνα ἀριθμὸν κλασματικὸν (ἀριθμ. 1), τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπ ν.

§. 49. Τούτου τεθέντος, ἔστωσαν οἱ δύο ἀριθμοὶ 360 καὶ 276, τῶν ὁποίων ζητοῦμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην, ἢ τὸν μεγαλήτερον ἀριθμὸν, ὅς τις διαιρεῖ ἐν ταυτῷ καὶ τοὺς δύο.

Εἶναι κατὰ πρῶτον φανερὸν, ὅτι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δὲν ὑπερβαίνει τὸν μικρότερον ἀριθμὸν 276, καὶ ἐπειδὴ 276 διαιρεῖ τὸν ἑαυτόν του, ἐὰν ἐδύνατο νὰ διαιρέσῃ καὶ τὸ 360, ἤθελεν εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Ἂς δοκιμάσωμεν τὴν διαίρεσιν 360 διὰ 276, εὑρίσκομεν διὰ πηλίκον 1 καὶ διὰ ὑπόλοιπον 84, λοιπὸν 276 δὲν εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης. Λέγω τώρα, ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ 360 καὶ τοῦ 276, εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ 276, καὶ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως 84.

Τῷ ὄντι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης μέλλων νὰ διαιρέσῃ τὸ 360 καὶ ἓν τῶν μερῶν του 276, θέλει διαιρέσει ἐξ ἀνάγκης (ἀριθμ. 48) τὸ ἄλλο μέρος 84. Διὰ τοῦτο συνάγομεν, ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ 360 καὶ 276, δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ ἐκεῖνον τοῦ 276 καὶ 84, ἐπειδὴ πρέπει νὰ διαιρῇ τοὺς τοιούτους δύο ἀριθμούς· ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ 276 καὶ 84 διαιρῶν τὰ δύο μέρη τοῦ ὅλου 360, πρέπει νὰ διαιρῇ ἐξ ἀνάγκης τοῦτον τὸν τελευταῖον ἀριθμὸν, καὶ ἐπειδὴ εἶναι διαιρέτης ἀκριβὴς τοῦ 360 καὶ 276, δὲν δύναται ὁ τοιοῦτος νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τοῦ 360 καὶ 276· λοιπὸν βλέπομεν, ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ 360 καὶ 276, καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ 276 καὶ 84 δὲν ὑπερβαίνει ὁ εἷς τὸν ἄλλον· λοιπὸν εἶναι ἴσοι.

Οὕτως τὸ ζήτημα ἤχθη εἰς τὸ νὰ ζητήσωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν 276 καὶ 84 ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι ἁπλούστεροι τῶν 360 καὶ 276.

Πρὸς τοῦτο συλλογιζόμεθα περὶ τοῦ 276 καὶ 84, ὡς ἐσυλλογίσθημεν περὶ τῶν πρώτων ἀριθμῶν· τουτέστι δοκιμάζοντες τὴν διαίρεσιν τοῦ 276 διὰ 84· ἐπειδὴ ἐὰν ἡ τοιαύτη διαίρεσις ἐκτελῆται ἀκριβῶς, τότε τὸ 84 ἤθελεν εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης μεταξὺ 376 καὶ 84, καὶ ἑπομένως τοῦ 360 καὶ 276

Ἐκτελοῦντες ταύτην τὴν νέαν διαίρεσιν, εὑρίσκομεν 3 διὰ πηλίκον, καὶ 24 διὰ ὑπόλοιπον, λοιπὸν 84 δὲν εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης, ἀλλὰ δι' ἑνὸς συλλογισμοῦ ἀναλογοῦντος, μὲ τὸν ὁποῖον ἐκάμαμεν ἀνωτέρω, ἀποδεικνύομεν, ὅτι ὁ μέγιστος κονὸς διαιρέτης τοῦ 276 καὶ 84, εἶναι ἐκεῖνος τοῦ πρώτου ὑπολοίπου 84, καὶ τοῦ δευτέρου 24.

Ἂς ἐπαναλάβωμεν αὐτὸν τὸν συλλογισμόν. Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ 276 καὶ 84, μέλλων νὰ διαιρέσῃ τὸ 84, διαιρεῖ ἐξ ἀνάγκης τὸ πολλαπλάσιόν του 3 φοραῖς 84· οὕτω διαιρῶν ἓν ὅλον 276, καὶ ἓν τῶν μερῶν του 3 φοραῖς 84, διαιρεῖ καὶ τὸ ἄλλο μέρος 24. Ἤδη λοιπὸν ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης 276 καὶ 84 δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ ἐκεῖνον τοῦ 84 καὶ 24· ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ 84 καὶ 24 διαιρῶν 3 φοραῖς 84 καὶ 24, τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ δύο μέρη τοῦ 276, διαιρεῖ ἐξ ἀνάγκης καὶ τὸ 276· οὕτως διαιρῶν τὸ 84 καὶ 276 δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τοῦ 84 καὶ 276· λοιπὸν ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ 276 καὶ τοῦ 84 εἶναι ἐκεῖνος, ὅς τις ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ 84 καὶ τοῦ 24, καὶ δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ ὁ εἷς τὸν ἄλλον, διὰ τοῦτο εἰσὶν ἴσοι.

Τὸ ζήτημα τώρα ἐφέρθη εἰς τὸ νὰ ἀναζητήσωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τοῦ 84 καὶ 24, τουτέστι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν 84 διὰ 24. Ἐκτελοῦντες ταύτην τὴν νέαν διαίρεσιν εὑρίσκομεν 3 διὰ πηλίκον καὶ 12 διὰ ὑπόλοιπον· λοιπὸν 24 δὲν εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ τοιοῦτος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν ὅς τις ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ ὑπολοίπου 24 καὶ τοῦ ὑπολοίπου 12, διαιροῦμεν 24 διὰ 12 καὶ εὑρίσκομεν ἀκριβὲς πηλίκον 2. Λοιπὸν 12 εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ 24 καὶ 12, καὶ εἶναι παρομοίως ἐκεῖνος τοῦ 84 καὶ 24 καὶ τοῦ 276 καὶ 84, καὶ τοῦ 360 καὶ τοῦ 276. Λοιπὸν 12 εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Εἰς τὰς πράξεις διατάττεται οὕτως ἡ ἐργασία.

	1	3	3	2
360	276	84	24	12
84	24	12	0	

Ἀφ' οὗ διαιρέσωμεν 360 διὰ 276, ὡς συνειθίζομεν, ἡ ὁποία πρᾶξις δίδει 1 διὰ πηλίκον, τὸ ὁποῖον γράφομεν ἄνω τοῦ διαιρέτου (ἀντὶ νὰ τὸ γράψωμεν ὑποκάτω αὐτοῦ) καὶ ἓν ὑπόλοιπον 84, γράφομεν τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ 276, καὶ διαιροῦμεν 276 διὰ 84· συνάγομεν ἓν πηλίκον, τὸ ὁποῖον γράφομεν ἄνω τοῦ διαιρέτου 84, καὶ ἓν ὑπόλοιπον 24, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 84, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Κανὼν Γενικός. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην δύο ἀριθμῶν, διαιροῦμεν τὸν μεγαλήτερον ἀριθμὸν διὰ τοῦ μικροτέρου, καὶ ἐὰν δὲν εὕρωμεν ὑπόλοιπον, τότε ὁ μικρότερος ἀριθμὸς εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Ἐὰν ὑπάρχῃ ὑπόλοιπον, διαιροῦμεν τὸν μικρότερον ἀριθμὸν δι' αὐτοῦ τοῦ ὑπολοίπου, καὶ ἐὰν ἡ διαίρεσις ἐκτελεσθῇ μὲ ἀκρίβειαν, τότε τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Ἐὰν εἰς ταύτην τὴν δευτέραν διαίρεσιν εὑρεθῇ ἓν ὑπόλοιπον, διαιροῦμεν τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον διὰ τοῦ δευτέρου, ἐξακολουθοῦντες νὰ διαιρῶμεν πάντοτε τὸ προευρεθὲν ὑπόλοιπον διὰ τοῦ ἀκολούθου, ἕως οὗ νὰ εὕρωμεν μίαν ἀκριβῆ διαίρεσιν· τότε ὁ τελευταῖος διαιρέτης, τὸν ὁποῖον ἐμεταχειρίσθημεν, εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Ἐὰν ὁ τελευταῖος διαιρέτης εἶναι ἡ μονὰς, τοῦτο φανερόνει, ὅτι οἱ δύο δεδομένοι ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι ἀναμεταξύ των, ἐπειδὴ δὲν ἔχουσι ἄλλον διαιρέτην κοινὸν, παρὰ τὴν μονάδα.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν δύο δεδομένοι ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι ἀναμεταξύ των, καὶ εἰς τοὺς ὁποίους ἐφαρμόζομεν τὰς ἄνω εἰρημένας πράξεις, πρέπει ἐξ ἀνάγκης νὰ εὕρωμεν τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον ἴσον μὲ τὴν μονάδα· ἐπειδὴ ἐκ τῆς φύσεως τῶν πράξεων τὰ ὑπόλοιπα πηγαίνουν ἐλαττούμενα· προσέτι δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἓν ὑπόλοιπον ἴσον μὲ τὸ μηδὲν, προτοῦ νὰ ἀπαντήσωμεν ἓν ὑπόλοιπον ἴσον μὲ τὸ 1· ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης ὁ διαφορετικὸς ἀπὸ τὴν μονάδα, ὅςτις ἤθελε δώσει ὑπόλοιπον μηδὲν, ἤθελεν εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο δεδομένων ἀριθμῶν· διὰ τοῦτο ἀναγκαίως πρέπει, ἐὰν ἐκτελέσωμεν ἕνα ἀριθμὸν πράξεων, νὰ εὕρωμεν τὴν μονάδα διὰ ὑπόλοιπον.

§. 50. Ἰδοὺ καὶ ἄλλαι ἐφαρμογαὶ τῆς ἰδίας μεθόδου.

Νὰ ἀνάξωμεν εἰς τὴν ἁπλουστέραν ἔκφρασιν τὸ κλάσμα $\frac{592}{999}$.

Ἂς ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου εἰς τοὺς δύο ἀριθμοὺς 999 καὶ 592. Ἀφ' οὗ εὕρωμεν τὸν μεγαλήτερον ἀριθμὸν, ὅςτις νὰ διαιρῇ εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν τοὺς δύο ὅρους του, ἡμεῖς ἐκτελοῦμεν διὰ τούτου τοῦ ἀριθμοῦ, καὶ οὕτω συνάγομεν τὸ ζητούμενον κλάσμα.

	1	1	2	5
999	592	407	185	37
407	185	37	00	

999	37
259	27
0	

592	37
222	10
00	

Εὑρίσκομεν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην 37. Οὕτως διαιροῦντες 999 καὶ 592 διὰ 37 συνάγομεν $\frac{16}{27}$ διὰ τὴν τιμὴν τοῦ $\frac{592}{999}$, ἠγμένον εἰς τοὺς μικροτέρους του ὅρους.

Ἔστω διὰ νέον παράδειγμα τὸ κλάσμα $\frac{912}{3072}$.

	3	2	1	2	2
3072	912	336	240	96	48
336	240	96	48	0	

3072	48
192	64
0	

912	48
432	19
0	

Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶναι ἐδῶ 48, καὶ διαιροῦντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ 48 εὑρίσκομεν $\frac{19}{64}$ τὸ ἠγμένον κλάσμα.

§. 51. Ἔστω διὰ τελευταῖον παράδειγμα τὸ $\frac{317}{873}$ κλάσμα.

	2	1	3	15	1	1	2
873	317	239	78	5	3	2	1
239	78	5	28	2	1	0	
			3				

Ἡ μέθοδος μᾶς ἄγει εἰς τοῦτο τὸ παράδειγμα εἰς ἓν ὑπόλοιπον ἴσον μὲ 1, τοῦτο φανερόνει, ὅτι 873 καὶ 317 εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι ἀναμεταξύ των. Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν τὸ κλάσμα $\frac{317}{873}$ καλεῖται ἀνάγωγον, ἐπειδὴ δὲν ἄγεται εἰς ἁπλουστέραν τινὰ ἔκφρασιν διὰ τῆς διαιρέσεως τῶν δύο του ὅρων δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Παρατήρησις. Εἰς τὴν τρίτην πρᾶξιν εὑρήκαμεν τὸ ὑπόλοιπον 5, ὅςτις εἶναι ἕνας πρῶτος ἀριθμὸς (ἀριθμ. 48). Τώρα ἐπειδὴ 5 δὲν διαιρεῖ τὸ πρὸ αὐτοῦ 78, δυνάμεθα, χωρὶς νὰ ἦναι ἀνάγκη νὰ προχωρήσωμεν, νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι οἱ δύο δεδομένοι ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι ἀναμεταξύ των. Τῷ ὄντι ἐγνωρίσαμεν εἰς τὴν ἀπόδειξιν τῆς μεθόδου, ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἀριθμῶν διαιρεῖ ἀναγκαίως τὸ ὑπόλοιπον ἑκάστης διαιρέσεως· οὕτως 5 ὄντος ἀριθμοῦ πρώτου, δύο μόνον περιστάσεις δύνανται νὰ ἀκολουθήσωσιν, ἢ τὸ 5 διαιρεῖ τὸ πρὸ αὐτοῦ ὑπόλοιπον, καὶ τότε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶναι τὸ 5, ἢ δὲν τὸ διαιρεῖ, καὶ εἰς ταύτην τὴν περίστασιν δὲν ὑπάρχει ἄλλος κοινὸς διαιρέτης ἀναμεταξύ των παρὰ ἡ μονάς.

Ἐν γένει, ὅταν φθάσωμεν εἰς τὸν δρόμον τῶν πράξεων, εἰς ἀριθμὸν, τὸν ὁποῖον γνωρίζομεν, ὅτι εἶναι πρῶτος, καὶ μὴ διαιροῦντα τὸ πρὸ αὐτοῦ ὑπόλοιπον, εἶναι βέβαιον, ὅτι οἱ δύο δεδομένοι ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι ἀναμεταξύ των, καὶ εἶναι ἀνωφελὲς νὰ προχωρήσωμεν εἰς τὴν πρᾶξιν.

Ἡμεῖς πάλιν θέλομεν ἀναφέρει τὴν πρᾶξιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου (κεφ. ε^ον), ἥτις εἶναι μία ἀπὸ τὰς πλέον ἀξιολόγους ἐργασίας τῆς ἀριθμητικῆς.

Ἂς περάσωμεν κατὰ τὸ παρὸν εἰς τὰς τέσσαρας θεμελιώδεις ἐργασίας τῶν κλασμάτων.

Περὶ προσθέσεως τῶν κλασμάτων.

§. 52. Ὁ σκοπὸς τῆς ἀθροίσεως τῶν κλασμάτων εἶναι ὁ αὐτὸς, ὡς ἐκεῖνος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, τουτέστι νὰ εὕρωμεν ἕνα μόνον, ἔχοντα τὴν αὐτὴν τιμὴν μὲ τὰ προσθετέα κλάσματα.

Δύο περιστάσεις δύνανται νὰ παῤῥησιασθῶσιν, ἢ τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ προσθέσωμεν, εἶναι ὁμοειδῆ, τουτέστιν ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ἢ ἑτεροειδῆ, τουτέστιν ἔχουν παρονομαστὴν διαφορετικόν· εἰς τὴν πρώτην περίστασιν ἐκτελοῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν, μετὰ ταῦτα δίδομεν εἰς αὐτὸ τὸ ἄθροισμα τὸν κοινὸν παρονομαστήν.

Εἰς τὴν δευτέραν περίστασιν πρότερον τὰ ἄγομεν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἀριθμ. 43, καὶ ὕστερον πράττομεν ἐπὶ τῶν νέων κλασμάτων, ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν.

Οὕτως τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων $\frac{2}{11}$, πλέον $\frac{3}{11}$, πλέον $\frac{4}{11}$ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{9}{11}$. Παρομοίως τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων $\frac{5}{23}$, $\frac{2}{23}$, $\frac{7}{23}$, $\frac{4}{23}$ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{18}{23}$.

Προστεθήτωσαν ἤδη τὰ τρία

κλάσματα· $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$

$$\begin{array}{ccc} 32, & 24, & 12 \\ \hline \frac{64}{96}, & \frac{72}{96}, & \frac{84}{96} \end{array}$$

Ἀφ' οὗ ἄξωμεν τὰ τοιαῦτα κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν κατὰ τὸν κανόνα τοῦ (ἀριθμ. 43) κάμνομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν, τὸ ὁποῖον εἰναι 220· περιπλέον δίδομεν εἰς τὸ 220 τὸν παρονομαστὴν 96, καὶ οὕτως ἔχομεν $\frac{220}{40}$ διὰ τὸ ζητούμενον κεφάλαιον.

§. 53. Τὸ τελευταῖον τοῦτο παράδειγμα μᾶς ἄγει εἰς ἓν ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀνάγκην νὰ ἐξηγηθῇ.

Καθὼς εἶναι ἀνάγκη ἀπὸ δύο μισὰ, τρία τρίτα, τέσσαρα τέταρτα, πέντε πέμπτα, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν μονάδα, οὕτω πρέπει διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν μονάδα νὰ ἔχωμεν ἐννενήκοντα ἓξ ἐννενηκοστὰ ἕκτα· λοιπὸν ὅσαις φοραῖς 220 περιέχει 96, τόσαι μονάδες ἀκέραιοι εὑρίσκονται εἰς τὸ $\frac{220}{96}$· καὶ ἐπειδὴ διαιροῦντες 220 διὰ 96 συνάγομεν διὰ πηλίκον 2, καὶ διὰ ὑπόλοιπον 28, ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι $\frac{220}{96}$ εἶναι ἕνας ἀριθμὸς κλασματικὸς σύνθετος ἀπὸ δύο μονάδας, πλέον τὸ κλάσμα $\frac{28}{96}$, ἢ $\frac{7}{24}$ (ἐξαλειφομένου τοῦ παράγοντος 4 ἀπὸ τοὺς δύο ὅρους).

Ἐν γένει ὁσάκις εὕρωμεν ἐξαγόμενον κλασματικὸν, τοιοῦτον, ὥστε ὁ ἀριθμητὴς νὰ εἶναι μεγαλήτερος τοῦ παρονομαστοῦ, διὰ νὰ ἐξάξωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας, τὰς περιεχομένας εἰς ταύτην τὴν ἔκφρασιν διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ τὸ πηλίκον ἐκφράζει τὸ ἀκέραιον, καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἑνωθῇ μὲ τὸν ἀκέραιον ἀριθμόν.

Εὑρίσκομεν διὰ τούτου τοῦ μέσου $\frac{17}{12}$ ἴσον μὲ

$1\frac{5}{12}$, $\frac{153}{15}$ ἴσον μὲ $10\frac{3}{15}$ ἢ 10 καὶ $\frac{1}{5}$. $\frac{954}{89}$ εἶναι ἴσον μὲ 7 καὶ $\frac{31}{89}$.

Καὶ ἀντιστρόφως, ὅταν ἔχωμεν ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν ἡνωμένον μὲ ἓν κλάσμα, διὰ νὰ σχηματίσωμεν ἕνα ἀριθμὸν κλασματικὸν, τὸ ὁποῖον εἶναι πολλάκις ὠφέλιμον, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος, καὶ προσθέτομεν εἰς τὸ γινόμενον τὸν ἀριθμητήν του, καὶ δίδομεν εἰς τὸ κεφάλαιον τὸν παρονομαστὴν τοῦ προτεθέντος κλάσματος.

Π. χ. 3 καὶ $\frac{2}{5}$ ἀνάγεται εἰς $\frac{15}{5}$ πλέον $\frac{2}{5}$, ἢ $\frac{17}{5}$.

11 καὶ $\frac{7}{12}$ εἶναι ἴσον $\frac{11 \text{ φοραῖς } 12}{12}$ πλέον $\frac{7}{12}$ ἢ $\frac{139}{12}$.

8 καὶ $\frac{17}{24}$ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{209}{24}$.

Περὶ Ἀφαιρέσεως τῶν Κλασμάτων.

§. 54. Ἡ ἀφαίρεσις τῶν κλασμάτων ἔχει διὰ σκοπὸν νὰ εὕρῃ τὴν ὑπεροχὴν ἑνὸς μεγαλητέρου κλάσματος ἐπὶ ἑνὸς μικροτέρου

Ἐὰν τὰ δύο κλάσματα ἔχωσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ἀφαιροῦμεν τοὺς δύο ἀριθμητὰς, τὸν ἕνα ἀπὸ τὸν ἄλλον, καὶ δίδομεν εἰς τὴν διαφορὰν τὸν κοινὸν παρονομαστήν.

Ἐὰν δὲν ἔχωσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, τὰ ἄγομεν, καὶ μετὰ ταῦτα ἐργαζόμεθα, ὡς εἴπομεν.

Οὕτως ἀπὸ $\frac{11}{12}$ νὰ ἀφαιρέσωμεν $\frac{5}{12}$, τὸ ὑπόλοιπου εἶναι $\frac{6}{12}$, ἢ $\frac{1}{2}$. Παρομοίως ἀπὸ $\frac{17}{24}$ νὰ ἀφαιρέσωμεν $\frac{7}{24}$, μένουν $\frac{10}{24}$ ἢ $\frac{5}{12}$.

Ἔστω τώρα νὰ ἀφαιρέσωμεν $\frac{2}{3}$ ἀπὸ $\frac{7}{8}$.

Τὰ τοιαῦτα δύο κλάσματα ἄγομεν εἰς $\frac{16}{24}$ καὶ $\frac{21}{24}$, καὶ δίδουσι $\frac{5}{24}$ διὰ διαφοράν των. Εὑρίσκομεν παρομοίως, ὅτι ἐὰν ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{19}{20}$ ἀφαιρέσωμεν $\frac{13}{17}$, μένει $\frac{63}{340}$.

Δυνατὸν εἶναι νὰ ἔχωμεν ἀκέραιον ἡνωμένον μὲ κλάσμα, νὰ τὸ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ ἀκέραιον ἡνωμένον μὲ κλάσμα.

Π. χ. ἀπὸ τὸν κλασματικὸν

$$\begin{array}{rl}
\text{ἀριθμὸν} & 13\frac{3}{4} \;..\; \frac{39}{52} \;...\; \frac{91}{52} \\
\text{νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν} & 5\frac{11}{13} \;...\; \frac{44}{52} \\
\hline
 & 7\frac{47}{52}
\end{array}$$

Διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν πρᾶξιν ἀρχίζομεν νὰ ἄξωμεν τὰ κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, καὶ οὕτως ἔχομεν $\frac{39}{52}$ διὰ τὸ πρῶτον, καὶ $\frac{44}{52}$ διὰ τὸ δεύτερον. Μετὰ ταῦτα μὴ δυνάμενοι νὰ ἀφαιρέσωμεν $\frac{44}{52}$ ἀπὸ $\frac{39}{52}$ δανειζόμεθα ἀπὸ τὸν ἀκέραιον 13 τοῦ ἀνωτέρου ἀριθμοῦ μίαν μονάδα, τὴν ὁποίαν ἄγομεν ὁμοῦ μὲ τὸ $\frac{39}{52}$ εἰς ἕνα μόνον κλασματικὸν ἀριθμόν, καὶ συνάγομεν $\frac{91}{52}$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἀφαιροῦντες $\frac{44}{52}$ ἔχομεν $\frac{47}{52}$. Ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀκεραίων. Θεωροῦμεν 13 ἐλαττούμενον ἀπὸ μίαν μονάδα, ἐξαιτίας ἐκείνης τὴν ὁποίαν ἐδανείσθημεν, καὶ λέγομεν 5 ἀπὸ 12 μένει 7. Λοιπὸν τὸ ζητούμενον ἐξαγόμενον εἶναι 7 καὶ $\frac{47}{52}$. ὡς ἀνωτέρω φαίνεται.

§. 55. Ἰδοὺ ζήτημά τι, εἰς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἑνωμένη ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἡνωμένων μὲ κλάσματα.

Εἷς ἔμπορος ὑφασμάτων ἐπώλησε διὰ πωλητοῦ εἰς διαφόρους φοραῖς ἓν τμῆμα ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον περιεῖχε πήχας 30 καὶ $\frac{7}{8}$, τουτέστιν ἐπώλησε 7 καὶ $\frac{3}{4}$, 9 καὶ $\frac{2}{3}$, 11 καὶ $\frac{5}{12}$, ἐπιθυμεῖ νὰ μάθῃ τί τοῦ ἔμεινεν ἀπὸ τὸ ὕφασμα, διὰ νὰ βεβαιωθῇ ἐὰν ὁ πωλητής του ἦτον πιστός.

Πρέπει κατὰ πρῶτον νὰ γίνῃ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅσων πηχῶν ἐπωλήθησαν, καὶ μετὰ ταῦτα νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ τοιοῦτον ἄθροισμα ἀπὸ 30 καὶ $\frac{7}{8}$, καὶ τὸ ἐξαγόμενον ταύτης τῆς ἀφαιρέσεως πρέπει νὰ ἐκφράζῃ τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον ἔμεινε.

Διὰ περισσοτέραν εὐκολίαν πρέπει νὰ ἐκθέσωμεν, ὡς ἐδῶ ἀκολουθεῖ, τὰς πράξεις.

	12		
$7\frac{3}{4}$	3	9	
$9\frac{2}{3}$	4	8	
$11\frac{5}{12}$	1	5	
		22	
$28\frac{10}{12}$			

π.	
$30\frac{7}{8}$	$\frac{21}{24}$
$28\frac{10}{12}$	$\frac{20}{24}$
$2\frac{1}{24}$	

Ἀφ' οὗ θέσωμεν ὑπ' ἀλλήλους τοὺς τρεῖς προσθετέους ἀριθμοὺς, παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ κλάσματα αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν δύνανται νὰ ἀχθῶσιν εἰς παρονομαστὴν 12, θέτομεν αὐτὸν τὸν ἀριθμὸν εἰς τὰ δεξιὰ, ὀλίγον τι παράνω τῶν κλασμάτων, καὶ ὑπογραμμίζομεν· μετὰ ταῦτα γράφομεν ὑπὸ τὸν 12, καὶ ἀμοιβαίως ὑπὸ τῆς ἰδίας ὁριζοντίου γραμμῆς τριῶν κλασμάτων τὰ πηλίκα 3, 4 καὶ 1 ἐξαγόμενα ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ 12 διὰ τῶν τριῶν παρονομαστῶν, μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν μόνον τοὺς ἀριθμητὰς τῶν τοιούτων κλασμάτων διὰ 3, 4 καὶ 1, καὶ συνάγομεν 9, 8 καὶ 5, καὶ μετὰ ταῦτα κάμνομεν τὸ ἄθροισμα 22 τῶν τριῶν νέων ἀριθμητῶν, ὥστε θέλομεν ἔχει διὰ ἄθροισμα τῶν τριῶν κλασμάτων $\frac{22}{12}$ ἢ 1 καὶ $\frac{10}{12}$, γράφομεν $\frac{10}{12}$ ὑπὸ τῶν τριῶν κλασμάτων, καὶ κρατοῦμεν ἓν διὰ νὰ τὸ φέρωμεν εἰς τὴν στήλην τῶν ἀκεραίων μονάδων, τὰς ὁποίας ἑνόνομεν κατὰ τὸν συνήθη τρόπον, καὶ τότε ἔχομεν 28 καὶ $\frac{10}{12}$ διὰ τὸ κεφάλαιον τῶν τριῶν ἀριθμῶν τῶν πηχῶν, τὰς ὁποίας ἐπώλησε.

Γράφομεν αὐτὸ τὸ ἄθροισμα ὑπὸ τὸν 30 καὶ $\frac{7}{8}$, καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν ἀφαίρεσιν, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται, παρατηροῦντες, ὅτι τὰ δύο κλάσματα δύνανται νὰ φερθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν διὰ 2 φοραῖς 12 ἢ 24.

Εὑρίσκομεν τέλος πάντων 2 καὶ $\frac{1}{24}$ ὑπόλοιπον τοῦ ὑφάσματος, τὸ ὁποῖον μὲ εὐκολίαν ὁ ἔμπορος δύναται νὰ βεβαιωθῇ, μετρῶν τὸ τμῆμα τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ τὰς τρεῖς πωλήσεις.

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων.

§. 56. Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἔχει ἐν γένει σκοπὸν (ἀρ. 9), δεδομένων δύο ἀριθμῶν, νὰ συνθέσῃ ἕνα τρίτον ἀριθμὸν μὲ τὸν πρῶτον, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, καθ' ὃν ὁ δεύτερος σύγκειται ἐκ τῆς μονάδος.

Τούτου τεθέντος, παρατηροῦμεν πολλὰς περιστάσεις εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν κλασμάτων. Δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν

α^{ον} Ἓν κλάσμα νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἕνα ἀκέραιον ἀριθμόν. Ἔστω π. χ. $\frac{7}{12}$ νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5.

Κατὰ τὸν προειρημένον ὁρισμὸν, ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς 5 περιέχει 5 φοραῖς τὴν μονάδα, ἐπε-