Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν ἀμελοῦντες τὸν διαιρετέον καταστήσωμεν τὸν διαιρέτην ἕνα τινὰ ἀριθμὸν φορῶν μεγαλήτερον ἢ μικρότερον, τὸ πηλίκον διὰ ταύτης τῆς πράξεως κατασταίνεται ἕνα ἴσον ἀριθμὸν μικρότερον ἢ μεγαλήτερον. Τῷ ὄντι εἶναι ἡ μόνη ὑπόθεσις, τὴν ὁποίαν ἠμποροῦμεν νὰ δεχθῶμεν, ὥστε ὁ πολλαπλασιασμὸς νὰ δώσῃ τὸ αὐτὸ γινόμενον, ἢ τὸν αὐτὸν διαιρούμενον.

Λοιπὸν πολλαπλασιαζομένου ἢ διαιρουμένου τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, τὸ πηλίκον δὲν ἀλλάττει· ἐπειδὴ ἐὰν ἐκ τῆς εἰς τὸν διαιρετέον γινομένης μεταβολῆς, πολλαπλασιάζομεν ἢ διαιροῦμεν τὸ πηλίκον ἐπὶ ἕνα ἀριθμὸν, ἡ δευτέρα μεταβολὴ κατασταίνει αὐτὸ ἕνα ἀριθμὸν φορῶν μικρότερον ἢ μεγαλήτερον, καὶ οὕτω γίνεται ἡ ἀνταμοιβή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

Περὶ Κλασμάτων.

§. 41. Εἴδομεν ἤδη (εἰς τὸν ἀριθμ. 1 καὶ 8) τί ἐστὶ κλάσμα, καὶ ποίαν ἰδέαν πρέπει νὰ λάβωμεν αὐτοῦ. Πάντοτε διακρίνονται δύο ὅροι εἰς ἕνα κλάσμα, ὁ παρονομαστὴς καὶ ὁ ἀριθμητής· ὁ παρονομαστὴς δεικνύει εἰς πόσα ἴσα μέρη ἐδιαιρέθη ἡ μονὰς, καὶ ὁ ἀριθμητὴς πόσα λαμβάνομεν ἀπὸ ταῦτα τὰ μέρη· ἡ ἕνωσις τῶν λαμβανομένων μερῶν συσταίνει τὸ ὅλον. Οὕτως εἰς τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$, τὸ ὁποῖον ἐκφράζομεν τρία τέταρτα, 4 εἶναι ὁ παρονομαστὴς καὶ φανερόνει, ὅτι ἡ μονὰς ἐδιαιρέθη εἰς 4 μέρη ἴσα, 3 εἶναι ὁ ἀριθμητὴς καὶ φανερόνει, ὅτι λαμβάνομεν τρία ἀπὸ τὰ τοιαῦτα μέρη. Παρομοίως τὸ κλάσμα $\frac{11}{12}$, τὸ ὁποῖον ἐκφράζομεν ἕνδεκα δωδέκατα, δηλοῖ, ὅτι ἡ μονὰς ἐδιαιρέθη εἰς 12 μέρη ἴσα, καὶ ὅτι ἐλάβομεν τὰ 11.

Εἴδομεν παρομοίως (εἰς τὸν ἀριθμ. 39), ὅτι ἓν κλάσμα, ὡς τὸ $\frac{13}{15}$, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ δέκατον πέμπτον μέρος ἑνὸς ὅλου, ἐκφραζομένου διὰ 13· τουτέστιν ἓν κλάσμα δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ὡς τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμητοῦ του, διαιρουμένου διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του, ὥστε δεκατρεῖς φοραῖς τὸ δέκατον πέμπτον τῆς μονάδος, ἢ δεκατρία δέκατα πέμπτα, καὶ καὶ τὸ δέκατον πέμπτον μέρος τοῦ δεκατρία ἢ 13 διαιρούμενον διὰ 15 εἶναι ἐκφράσεις ταυτοσήμαντοι.

§. 42. Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν, τὸν ὁποῖον ἐδώκαμεν εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν πορίζεται ἡ ἀκόλουθος συνέπεια.

1ον. Ἐὰν μὴ ἐγγίζοντες τὸν παρονομαστὴν ἑνὸς κλάσματος πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητήντου δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, τὸ νέον κλάσμα θέλει εἶναι τόσαις φοραῖς μεγαλήτερον ἢ μικρότερον τοῦ πρώτου, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ τοιοῦτος ἀριθμός.

Τῷ ὄντι, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν ἐπὶ 2, 3, 4, κτλ. δεικνύομεν ἐκ τούτου, ὅτι λαμβάνομεν 2, 3, 4, κτλ. φοραῖς περισσότερα μέρη τῶν πρώτων, καὶ ἐπειδὴ τὰ μέρη εἶναι τὰ αὐτὰ, τὸ νέον κλάσμα εἶναι 2, 3, 4 κτλ. φοραῖς μεγαλήτερον· οὕτως ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{6}{25}$, εἶναι φανερὸν, ὅτι

$\frac{12}{25}$, $\frac{18}{25}$, $\frac{24}{25}$ κ. τ. λ. εἶναι κλάσματα 2, 3, 4 φοραῖς μεγαλήτερα τοῦ πρώτου.

Ἐκ τοῦ ἐναντίου, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ 2, 3, 4 κ. τ. λ. δείχνομεν, ὅτι λαμβάνομεν 2, 3, 4 φοραῖς ὀλιγώτερα μέρη· λοιπὸν κ. τ. λ.

Οὕτως $\frac{3}{25}$, $\frac{2}{25}$ εἶναι 2, 3 φοραῖς μικρότερα τοῦ $\frac{6}{25}$.

2ον. Ἐὰν μὴ ἐγγίζοντες τὸν ἀριθμητὴν, πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν ἑνὸς κλάσματος δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ, διαιροῦμεν ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸ κλάσμα ἐπὶ τοῦτον τὸν ἀριθμόν.

Τῷ ὄντι ὅταν πολλαπλασιάζωμεν ἐπὶ 2, 3, 4 τὸν παρονομαστὴν, τότε διαιροῦμεν τὴν μονάδα εἰς 2, 3, 4 μέρη περισσότερα τῶν πρότερον, καὶ τὸ εἶδος τούτων τῶν τελευταίων μερῶν τῆς μονάδος εἶναι 2, 3, 4 μικρότερα, καὶ ἐπειδὴ λαμβάνομεν πάντοτε τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τούτων τῶν μερῶν, ἕπεται, ὅτι τὸ κλάσμα εἶναι 2, 3, 4 μικρότερον τοῦ πρώτου.

Ἐξ ἐναντίας, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν διὰ τοῦ 2, 3, 4, ἡ μονὰς εὑρίσκεται διαιρημένη εἰς 2, 3, 4 φοραῖς ὀλιγώτερα μέρη, καὶ οὕτως τὸ εἶδος τῶν τοιούτων μερῶν τῆς μονάδος εἶναι 2, 3, 4 φοραῖς μεγαλήτερον τοῦ εἴδους τῶν πρώτων μερῶν. Λοιπὸν κ. τ. λ.

3ον. Δὲν τρέπεται ποσῶς ἡ τιμὴ ἑνὸς κλάσματος, ὅταν πολλαπλασιάζωμεν ἢ διαιρῶμεν τοὺς δύο του ὅρους διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ.

Τῷ ὄντι ἡ τροπὴ τοῦ ἀριθμητοῦ κατασταίνει τὸ κλάσμα ἕνα τινὰ ἀριθμὸν φορῶν μεγαλήτερον ἢ μικρότερον, ἀλλ' ἡ τροπὴ ἡ γινομένη ἐπὶ τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ καταστιαίνει ἐξ ἐναντίας τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν φορῶν μικρότερον ἢ μεγαλήτερον, λοιπὸν γίνεται ἡ ἀνταμοιβὴ, καὶ ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος ἔμεινεν ἡ αὐτή.

Οὕτως τὰ κλάσματα $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{15}{20}$ εἶναι ὅλα ἰσοδύναμα μὲ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$, ἐπειδὴ αὐτὰ συνάγονται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἑκάστου τῶν δύο ὅρων του ἐπὶ 2, 3, 4, 5. Παρομοίως τὸ κλάσμα $\frac{24}{36}$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ κλάσμα $\frac{12}{18}$, ἢ $\frac{8}{18}$, ἢ $\frac{6}{9}$, ἐπειδὴ εὑρίσκομεν αὐτὰ διαιροῦντες τοὺς δύο ὅρους τοῦ $\frac{24}{36}$ διὰ 2, 3, 4.

Αὗται αἱ διάφοροι προτάσεις δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν, ὡς συνέπειαι τοῦ δευτέρου τρόπου τοῦ θεωρεῖν τὰ κλάσματα (ὅρ. ἀριθμ. 41.) καὶ τῶν ἀρχῶν, τὰς ὁποίας ἐπάνω εἰς τὴν διαίρεσιν (ἀριθ. 40.) ἐσυστήσαμεν.

§. 43. Ἐπειδὴ ἡ ἀνάγκη τῆς ἐφαρμογῆς τῆς τρίτης προτάσεως ἀπαντᾶται συχνὰ, νομίζομεν χρέος νὰ δώσωμεν δεῖξιν τινὰ αὐτῆς εὐθεῖαν καὶ ἀνεξάρτητον ἀπὸ τὰς δύο πρώτας.

Ἃς λάβωμεν πρὸς παράδειγμα τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$, καὶ ἃς πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους 5 καὶ 8 ἐπὶ 3, ἐντεῦθεν ἔχομεν $\frac{15}{24}$· λέγω, ὅτι τὸ τελευταῖον τοῦτο κλάσμα εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ πρῶτον.

Τῷ ὄντι ἀφ' οὗ ἡ ἀρχικὴ μονὰς διῃρέθη εἰς 8 ἴσα μέρη, ἃς διαιρέσωμεν ἕκαστον ὄγδοον εἰς τρία ἴσα μέρη, ἡ μονὰς εὑρίσκεται οὕτω διῃρημένη εἰς εἰκοσιτέσσαρα μέρη ἴσα, ἕκαστον δὲ ὄγδοον ἀξίζει τρία εἰκοστὰ τέταρτα, καὶ πέντε ὄγδοα ἀξίζουν πεντάκις τρία, ἢ δεκαπέντε εἰκοστὰ τέταρτα, δηλαδὴ τὰ κλάσματα $\frac{5}{8}$ καὶ $\frac{15}{24}$ ἔχουν ἀκολούθως τὴν αὐτὴν τιμήν. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἠθέλαμεν δείξει, ὅτι τὰ $\frac{11}{12}$, καὶ $\frac{55}{60}$, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ τελευταῖον σχηματίζεται πολλαπλασιαζομένων τῶν δύο ὅρων 11 καὶ 12 τοῦ πρώτου ἐπὶ 5, εἶναι ἴσα.

Ἐπειδὴ ἀντιστρόφως περνοῦμεν ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{15}{24}$ εἰς τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$, ἀφ' οὗ ληφθῇ τὸ τρίτον ἑκάστου τῶν ὅρων τοῦ πρώτου, καὶ ἀπὸ τὸ κλάσμα $\frac{55}{60}$ εἰς τὸ κλάσμα $\frac{11}{12}$, ἀφ' οὗ ληφθῇ τὸ πέμπτον τῶν δύο ὅρων τοῦ πρώτου, συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ κλάσμα δὲν ἀλλάττει τιμὴν, ὅταν πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσιν οἱ δύο του ὅροι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Ἂς περάσωμεν τώρα εἰς τὰς διαφόρους ἐργασίας, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ πράξωμεν ἐπὶ τῶν κλασμάτων, διὰ τὴν λύσιν ἑνὸς ζητήματος, τοῦ ὁποίου τὰ διδόμενα εἶναι κλάσματα ἢ κλασματικοὶ ἀριθμοί.

Ἀλλὰ πρὶν ἐκθέσωμεν τὰς τέσσαρας θεμελιώδεις ἐργασίας, θέλομεν γνωστοποιήσει δύο μεταμορφώσεις αὐτῶν τῶν κλασμάτων, αἵτινες εἶναι μεγαλωτάτης χρήσεως, καὶ σχηματίζουν δύο εἴδη μερικῶν πράξεων τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν κλασμάτων.

Ἀναγωγὴ τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

§. 44. Ἡ μεταμόρφωσις αὕτη ἔχει σκοπὸν νὰ ἀνάξῃ εἰς τὸ αὐτὸ εἶδος εἴτε εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν δύο δοθέντα κλάσματα διαφόρου εἴδους, ἢ διαφορετικῶν παρονομαστῶν· τώρα ἡ ἀρχὴ, κατὰ τὴν ὁποίαν δὲν τρέπεται ἡ τιμὴ ἑνὸς κλάσματος, ἀφ' οὗ πολλαπλασιασθοῦν οἱ δύο του ὅροι ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, μᾶς προμηθεύει ἁπλούστατόν τι μέσον, διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν ταύτην τὴν μεταμόρφωσιν.

Ἔστωσαν π. χ. τὰ κλάσματα $\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{5}{7}$, τὰ ὁποῖα πρόκειται νὰ ἀνάξωμεν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους 3 καὶ 4 τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ τὸν 7 παρονομασὴν τοῦ δευτέρου, καὶ τοὺς δύο ὅρους 5 καὶ 7 τοῦ δευτέρου ἐπὶ 4 παρονομαστὴν τοῦ πρώτου, θέλει προκύψει $\frac{21}{28}$ καὶ $\frac{20}{28}$ διὰ τὰ δύο ζητούμενα κλάσματα.

Τὰ κλάσματα ταῦτα ἔχουν τὴν αὐτὴν τιμὴν μὲ τὰ δεδομένα κλάσματα, κατὰ τὴν ἀρχὴν, τὴν ὁποίαν ἐφανερώσαμεν, περιπλέον ἐξ ἀνάγκης ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς ἑκάστου πορίζεται ἐκ τοῦ πολλπλασιασμοῦ τῶν δύο πρώτων παρονομαστῶν 4 καὶ 7.

Ἔστωσαν προσέτι τὰ κλάσματα $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{11}$ νὰ ἀναχθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους 4 καὶ 7 τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ 88 γινόμενον τῶν παρονομαστῶν 8 καὶ 11 τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου κλάσματος, μετὰ ταῦτα τοὺς δύο ὅρους 5 καὶ 8 τοῦ δευτέρου κλάσματος ἐπὶ 77 γινόμενον τῶν παρονομαστῶν 7 καὶ 11 τοῦ πρώτου καὶ τρίτου κλάσματος, τέλος τοὺς δύο ὅρους 6 καὶ 11 τοῦ τρίτου κλάσματος ἐπὶ 56 γινόμενον τῶν παρονομαστῶν 7 καὶ 8 τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου. Οὕτως ἔχομεν τὰ νέα κλάσματα $\frac{352}{616}$, $\frac{385}{616}$, $\frac{336}{616}$.

Τὰ κλάσματα ταῦτα ἔχουν τὴν αὐτὴν τιμὴν, ὡς τὰ πρῶτα, καὶ ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ἐπειδὴ συνάγονται ἐκ τοῦ γινομένου τῶν τριῶν παρονομαστῶν, 7, 8 καὶ 11.

Σ. Κ. Ἀληθῶς ἐδέχθημεν μίαν ἀρχὴν, ὅτι τὸ γινόμενον ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ παραγόντων εἶναι πάντοτε τὸ αὐτὸ καθ' ὁποιανδήποτε τάξιν λάβωμεν τοὺς παράγοντας εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν, ἐν ᾧ ἡ τοιαύτη ἀρχὴ δὲν ἀπεδείχθη (εἰς τὸν ἀριθμ. 26), παρὰ μόνον εἰς τὴν περίστασιν δύο μόνον παραγόντων, ἀλλὰ ἡμεῖς θέλομεν τὴν ἀποδείξει εἰς ὅλην της τὴν ἔκτασιν εἰς τὸ ε^{ον}. κεφάλαιον.

Γενικὸς Κανών. Διὰ νὰ ἀνάξωμεν ἕνα τινὰ ἀριθμὸν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, πολλαπλασιάζομεν διαδοχικῶς τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τὸ ἀποτελεσθὲν ἐξ ὅλων τῶν ἄλλων παρονομαστῶν.

Ἔστω διὰ νέον παράδειγμα τὰ πέντε κλάσματα $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{10}{13}$, $\frac{13}{25}$ καὶ $\frac{29}{43}$. Διὰ πλειοτέραν ἁπλότητα διατάττομεν οὕτω τὴν πρᾶξιν.

$$\frac{3}{8} \quad \frac{7}{11} \quad \frac{10}{13} \quad \frac{23}{25} \quad \frac{29}{43}$$

$$153725 \cdot \quad 111800 \cdot \quad 94600 \cdot \quad 49192 \cdot \quad 28600 \cdot$$

$$\frac{461175}{1229800}, \frac{782600}{1229800}, \frac{946000}{1229800}, \frac{1131416}{1229800}, \frac{829400}{1229800}.$$

Καὶ ἀφ' οὗ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον τῶν πέντε παρονομαστῶν, 8, 11, 13, 25 καὶ 43, οἵτινες δίδουσι διὰ γινόμενον 1229800, διαιροῦμεν διαδοχικῶς τὸ γινόμενον τοῦτο δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν, καὶ λαμβάνομεν τὰ πέντε πηλίκα 153725, 111800, 94600, 49192. 28600, τὰ ὁποῖα γράφομεν ἀμοιβαίως ὑπὸ τὰ πέντε δεδομένα κλάσματα, μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ πηλίκον τὸ ἀνταποκρινόμενον εἰς αὐτοὺς, καὶ ὅλα τὰ κλάσματα οὕτως ἄγουται εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

Ὁ λόγος ταύτης τῆς πράξεως εὐκόλως γίνεται καταληπτός. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς 1229800 μὲ τὸ νὰ εἶναι τὸ γινόμενεν τῶν πέντε παρονοματᾶν, τὸ πηλίκον 153725 τῆς διαιρέσεως τοῦ 1229800 διὰ 8 ἐκφράζει ἀναγκαίως τὸ γινόμενον τῶν ἄλλων τεσσάρων παρονομαστῶν 11, 13, 25, 43. Παρομοίως 111800 ἐπειδὴ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 1229800 ἐπὶ τὸν δεύτερον παρονομαστὴν 11, εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενεν τῶν τεσσάρων ἄλλων παρονομαστῶν, 8, 13, 25 καὶ 43. Τοὺς αὐτοὺς συλλογισμοὺς ἐκτελοῦμεν καὶ διὰ τὰ ἄλλα πηλίκα.

Ἡ τοιαύτη πρᾶξις εἶναι χωρὶς ἀμφιβολίαν πλέον σύντομος, παρὰ ἐκείνην, διὰ τῆς ὁποίας ἔπρεπε διὰ κάθε κλάσμα νὰ πολλαπλασιάζωμεν τοὺς τέσσαρας παρονομαστὰς τῶν ἄλλων τεσσάρων κλασμάτων· καὶ διὰ τοῦτο πρέπει νὰ μεταχειριζώμεθα ταύτην τὴν πρᾶξιν, ὁσάκις ἔχομεν περισσότερον παρὰ τρία κλάσματα νὰ ἄξωμεν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν.

§. 45. Εἶναι μία περίστασις εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἀγωγὴ τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν ἐκτελεῖται μὲ τρόπον ἁπλούστατον· συμβαίνει δὲ, ὅταν ὁ μεγαλήτερος τῶν παρονομαστῶν περιέχῃ ἐντελῶς ὅλους τοὺς ἄλλους, τουτέστι διαιρῆται ἀκριβῶς δι' ὅλων τῶν ἄλλων.

Ἔστωσαν π. χ. τὰ κλάσματα.

$$\frac{2}{3},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{5}{6},\quad \frac{7}{12},\quad \frac{23}{36}.$$

$$\begin{array}{ccccc} 12 & 9 & 6 & 3 & 1. \\ \hline \frac{24}{36}, & \frac{27}{36}, & \frac{30}{36}, & \frac{21}{36}, & \frac{23}{36}. \end{array}$$

Εὐκόλως βλέπομεν, ὅτι 36 διαιρεῖται ἐντελῶς διὰ τῶν τεσσάρων ἄλλων παρονομαστῶν, 3, 4, 6, 12.

Τούτου τεθέντος ἐκτελοῦμεν διαδοχικῶς ταύτας τὰς διαιρέσεις, καὶ θέτομεν τὰ πηλίκα 12, 9, 6 καὶ 3 ὑποκάτω τῶν τεσσάρων πρώτων κλασμάτων, μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου ἐπὶ τὸ ἀντικείμενον εἰς αὐτὸ πηλίκον, ἀφίνοντες τὸ κλάσμα $\frac{23}{36}$, ὡς ὑπάρχει, καὶ οὕτως ὅλα τὰ κλάσματα ἀνάγονται εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν 36.

Μερικαῖς φοραῖς χωρὶς νὰ διαιρῆται ὁ μεγαλήτερος παρονομαστὴς δι' ὅλων τῶν ἄλλων, δυνάμεθα νὰ ἐννοῶμεν, ὅτι πολλαπλασιάζοντές τον ἐπὶ 2, 3, 4 . . . συνάγομεν ἓν γινόμενον διαιρετὸν ἐντελῶς δι' ὅλων τῶν παρονομαστῶν. Εἰς ταύτην τὴν περίστασιν ἀκόμη ὑπάρχει συντομία.

Ἔστωσαν τὰ κλάσματα.

$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{25}{36}$
18	9	6	4	3	2
$\frac{54}{72}$,	$\frac{63}{72}$,	$\frac{66}{72}$.	$\frac{52}{72}$,	$\frac{51}{72}$,	$\frac{50}{72}$.

Ὁ παρονομαστὴς 36 δὲν διαιρεῖται ἐντελῶς δι' ὅλων τῶν ἄλλων, ἀλλὰ διπλασιαζόμενος δίδει 72, ἀριθμὸς, ὅστις προδήλως διαιρεῖται διὰ 4, 8, 12, 18, 24, 36.

Τούτου τεθέντος, σχηματίζομεν τὰ πηλίκα τῆς διαιρέσεως 72 διὰ τῶν παρονομαστῶν, τὰ ὁποῖα θέτομεν ἀμοιβαίως ὑποκάτω τῶν κλασμάτων, καὶ μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους ἑκάστου ἐπὶ τὸ ἀνταποκρινόμενον πηλίκον. Ὅλα ταῦτα τὰ κλάσματα λαμβάνουσιν οὕτω τὸ αὐτὸν παρονομαστὴν 72.

Αὗται αἱ ἁπλότητες ἀπαιτοῦν πολλὴν γύμνασιν, ἀλλὰ θέλομεν δώσει μετὰ ταῦτα (κεφάλαιον ε'.) τὸ μέσον τοῦ νὰ ἀνάγωμεν ἕνα ὁπιονδήποτε ἀριθμὸν κλασμάτων εἰς τὸν ἁπλούστερον παρονομαστήν.

Ἰδοὺ μερικαὶ ἐφαρμογαὶ τῆς ἀνωτέρω μεταμορφώσεως.

§. 46. Ζήτημα πρῶτον. Ζητεῖται ἐκ τῶν δύο κλασμάτων $\frac{3}{5}$ καὶ $\frac{7}{12}$ ποῖον εἶναι τὸ μεγαλήτερον.

Κατὰ πρῶτον εἶναι δύσκολον νὰ ἀποκριθῶμεν εἰς τοῦτο τὸ ζήτημα· ἐπειδὴ ἐὰν ἀπὸ ἓν μέρος ἡ μονὰς εἶναι εἰς τὸ δεύτερον κλάσμα διῃρημένη εἰς μεγαλήτερον τινὰ ἀριθμὸν μερῶν, παρὰ εἰς τὸ πρῶτον. ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος λαμβάνομεν περισσότερα μέρη, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς 4 εἶναι μεγαλήτερος ἀπὸ τὸν ἀριθμητὴν 3, ἀλλ' ἀφαιρεῖται ἡ δυσκολία, ὅταν τὰ ἀνάξωμεν εἰς τὸν ἴδιον παρονομαστὴν, ἐπειδὴ εἶναι φανερὸν, ὅτι ἀπὸ δύο κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ἐκεῖνο θέλει εἶσθαι τὸ μεγαλήτερον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν μεγαλήτερον ἀριθμητήν.

Πραχθείσης ταύτης τῆς ἀναγωγῆς προκύπτει· $\frac{36}{60}$ διὰ τὸ πρῶτον, καὶ $\frac{35}{60}$ διὰ τὸ δεύτερον. Λοιπὸν τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ εἶναι τὸ μεγαλήτερον, καὶ $\frac{1}{60}$ εἶναι ἡ μεταξύτων διαφορά.

Γνωρίζομεν παρομοίως, ὅτι ἐκ τῶν τριῶν κλασμάτων $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{11}$, $\frac{8}{13}$, τὸ μεγαλήτερον εἶναι τὸ $\frac{8}{13}$, καὶ τὸ μικρότερον εἶναι τὸ $\frac{6}{11}$, καὶ τὸ μέσον τὸ $\frac{4}{7}$. ἐπειδὴ ἀγόμενα εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν τρέπονται εἰς $\frac{572}{1001}$ $\frac{546}{1001}$ $\frac{616}{1001}$.

Δυνάμεθα νὰ ἀνάξωμεν καὶ τὰ κλάσματα εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμητὴν (τὸ ὁποῖον ἤθελεν ἐκτελεσθῇ πολλαπλασιαζομένων τῶν δύο ὅρων ἑκάστου ἐπὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἄλλων ἀριθμητῶν), καὶ ἐκ τῶν κλασμάτων τούτων τὸ μεγαλήτερον ἤθελεν εἶσθαι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἤθελεν ἔχει τὸν μικρότερον παρονομαστήν· ἐπειδὴ μὲ τὸ νὰ εἶναι τὸ εἶδος τῶν μερῶν μεγαλήτερον τοῦ εἴδους τῶν ἄλλων, ἠθέλαμεν ἔχει τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ζήτημα Δεύτερον. Ποίαν τροπὴν φέρει εἰς ἓν κλάσμα ἡ πρόσθεσις ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἰς τοὺς δύο του ὅρους.

Ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{7}{12}$, εἰς τοὺς δύο ὅρους τοῦ ὁποίου προσθέτεται 6, ἐκ τούτου προκύπτει $\frac{13}{18}$ διὰ τὸ νέον κλάσμα.

Ἤδη ἀναγομένων τῶν δύο κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν τὸ πρῶτον γίνεται $\frac{126}{216}$, καὶ τὸ δεύτερον $\frac{156}{216}$. Λοιπὸν τὸ προτεθὲν κλάσμα αὐξήθη κατὰ τὴν τιμὴν, καὶ ἡ αὔξησις αὐτοῦ εἶναι $\frac{30}{216}$.

Διὰ νὰ δώσωμεν τὸν λόγον τούτου ἄνευ τινὸς ὑπολογισμοῦ, ἂς παρατηρήσωμεν, ὅτι, ἐπειδὴ ἡ μονὰς εἶναι ἴση μὲ $\frac{12}{12}$, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς μονάδος καὶ $\frac{7}{12}$, ἐκφράζεται διὰ $\frac{5}{12}$, παρομοίως ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς μονάδος καὶ $\frac{13}{18}$, ἐκφράζεται διὰ $\frac{5}{18}$, οἱ δὲ ἀριθμηταὶ τῶν δύο τούτων διαφορῶν εἶναι οἱ αὐτοί· καὶ τῷ ὄντι, ἐπειδὴ 13 καὶ 18 ἐσχηματίσθησαν διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ 6 εἰς τοὺς δύο ὅρους 7 καὶ 12· ὅθεν ἕπεται, ὅτι εἶναι ἡ αὐτὴ διαφορὰ μεταξὺ 18 καὶ 13, καὶ μεταξὺ 12 καὶ 7· ἀλλὰ ἡ διαφορὰ $\frac{5}{18}$ εἶναι ἐξ ἀνάγκης μικροτέρα τῆς $\frac{5}{12}$, ἐπειδὴ ὁ παρονομαστής του εἶναι μεγαλήτερος· λοιπὸν τὸ κλάσμα $\frac{13}{18}$ διαφέρει ὀλιγώτερον τῆς μονάδος παρὰ $\frac{7}{12}$. Λοιπὸν τοῦτο εἶναι μεγαλήτερον.

Καταλαμβάνομεν προσέτι, ὅτι ὅσον πλέον ὁ προσθετόμενος ἀριθμὸς εἰς τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος εἶναι μεγαλήτερος, τόσον περισσότερον ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς μονάδος καὶ τοῦ νέου κλάσματος εἶναι μικροτέρα· ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς ταύτης τῆς διαφορᾶς μὲ τὸ νὰ εἶναι πάντοτε 5, ὁ παρονομαστὴς αὐξάνει διαδοχικῶς, καὶ τοιουτοτρόπως τὸ κλάσμα γίνεται μεγαλήτερον.

Ἐπειδὴ ὁ τοιοῦτος συλλογισμὸς δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς κάθε ἄλλο κλάσμα, ἠμποροῦμεν νὰ συνάξωμεν, ὅτι ἐὰν εἰς τοὺς δύο ὅρους ἑνὸς κλάσματος προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, τὸ συναγόμενον κλάσμα θέλει εἶναι μεγαλήτερον τοῦ προτεθέντος κλάσματος, καὶ τόσον μεγαλήτερον, ὅσον μεγαλήτερος εἶναι ὁ προσθετόμενος ἀριθμός.

Κατ' ἀντίστροφον συλλογισμὸν ἓν κλάσμα σμικρύνει κατὰ τὴν τιμὴν, ὅταν ἀφαιρῶμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἀπὸ τοὺς δύο του ὅρους.

Ἐπιστεύσαμεν ὡς χρέος μας νὰ ἐμιλήσωμεν περὶ ταύτης τῆς προτάσεως, διὰ νὰ πιστεύσουν καὶ οἱ ἀρχάριοι, ὅτι ἀκολουθεῖ ἡ περίστασις αὕτη εἰς τὰ κλάσματα, ὡς ἀκολουθεῖ καὶ ἡ περίστασις καθ' ἣν πολλαπλασιάζομεν, ἢ διαιροῦμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τοὺς δύο ὅρους ἑνὸς κλάσματος. Εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίστασιν δὲν μεταβάλλεται ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος· ἀλλὰ προσθέτοντες ἢ ἀφαιροῦντες τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, αὐξάνομεν, ἢ ἐλαττοῦμεν τὸ κλάσμα.