μενον νὰ δώσῃ ὀλιγώτερον ἀπὸ χιλιάδας εὑρίσκεται ἀναγκαίως εἰς τὰς 3844 χιλιάδας τοῦ διαιρετέου. καὶ ἐὰν ζητήσωμεν τὸν μεγαλήτερον ἀριθμὸν τῶν φορῶν, κατὰ τὰς ὁποίας τὸ 657 περιέχεται εἰς 3844, τὸ τοιοῦτον ψηφίον θέλει εἶναι ἐκεῖνο τῶν χιλιάδων τοῦ πηλίκου· ἐπειδὴ πρῶτον τὸ τοιοῦτον ψηφίον δὲν εἶναι μεγαλήτερον, διότι τὸ γινόμενόν του ἐπὶ 657 δίδει ὀλιγώτερα παρὰ 3844 χιλιάδας, καὶ δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸν διαιρετέον, καὶ διὰ τοῦτο τὸ πηλίκον εἶναι τοὐλάχιστον ἴσον μὲ τόσαις φοραῖς 1000, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ ψηφίον τοῦτο, ἀλλὰ οὔτε εἶναι μικρότερον, ἐπειδὴ ἐὰν αὐξηθῇ ἀπὸ μίαν μόνην μονάδα, τὸ γινόμενόν του ἐπὶ 657 δίδει περισσότερον ἀπὰ 3844 χιλιάδας καὶ δὲν δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ πλέον ἀπὸ τὸν διαιρετέον.

Ἂς ζητήσωμεν λοιπὸν πόσαις φοραῖς 3844 περιέχει 657, ἢ ἁπλῶς πόσαις φοραῖς 38 περιέχει 6, εὑρίσκομεν 6, ἀλλὰ 6 εἶναι μεγαλήτερον, ἐπειδὴ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ 657 ἐπὶ 6, τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ 6 εἶναι 30, τὸ ὁποῖον δίδει τρεῖς ἑκατοντάδας διὰ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τοῦ 6 ἐπὶ 6 ἢ 36· ἂς δοκιμάσωμεν λοιπὸν τὸ 5· τὸ γινόμενον τοῦ 657 ἐπὶ 5 εἶναι 3285 τὸ ὁποῖον γράφεται ὑπὸ τῶν 3844., καὶ βάλλομεν 5 εἰς τὸ πηλίκον, ἐπειδὴ ἐκφράζει τὰς χιλιάδας τοῦ ὅλου πηλίκου. Ἀφαιροῦντες 3285 ἀπὸ 3844, καὶ κατεβάζοντες εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου 55, τὰ ἄλλα ψηφία τοῦ διαιρετέου, συνάγομεν 559637 ἀριθμὸν, ὅστις σύγκειται ἀκόμη ἀπὸ τὰ μερικὰ γινόμενα τοῦ 657 ἐπὶ τὰς ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας τοῦ πηλίκου, καὶ ἐπὶ τοῦ ὁποίου πρέπει ἐπομένως νὰ συλλογισθῶμεν καὶ νὰ πράξωμεν, ὡς εἰς τὸν πρῶτον διαιρετέον. Διὰ νὰ λάβωμεν τὰς ἑκατοντάδας, λαμβάνομεν τὰς 5596 ἑκατοντάδας τοῦ νέου διαιρετέου, καὶ ζητοῦμεν πόσαις φοραῖς 5596 περιέχει 657, ἢ ἁπλῶς πόσαις φοραῖς 55 περιέχει 6, καὶ εὑρίσκομεν 9 ὡς πηλίκον, ἀλλὰ τὸ 9 εἶναι προφανῶς μεγαλήτερον, ὅθεν ἂς δοκιμάσωμεν τὸ 8· τὸ δὲ γινόμενον τοῦ 657 ἐπὶ 8 εἶναι 5256, ἀριθμὸς μικρότερος παρὰ 5596· οὕτως 8 εἶναι τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου, καὶ γράφομεν τοῦτο τὸ ψηφίον εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ἤδη εὑρεθέντος ψηφίου, καὶ θέτομεν προσέτι τὸ γινόμενον 5256 ὑπὸ τῶν 5596, διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν.

Ἐκτελοῦντες τὴν νέαν ταύτην ἀφαίρεσιν, καὶ γράφοντες εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου 340 τὰ ἄλλα ψηφία 37 τοῦ διαιρετέου, συνάγομεν 34037 ἀριθμὸν, ὅστις περιέχει ἀκόμη τὰ μερικὰ γινόμενα τοῦ 657 ἐπὶ τὰς δεκάδας καὶ μονάδας τοῦ πηλίκου.

Διαιροῦντες 3403 διὰ 657, ἢ μᾶλλον 34 διὰ 6 εὑρίσκομεν 5· τὸ γινόμενον τοῦ 657 ἐπὶ 5 εἶναι 3285 ἀριθμὸς μικρότερος τῶν 3403 καὶ ἐκτελεσοῦμεν ταύτην τὴν νέαν ἀφαίρεσιν.

Καὶ γράφοντες εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου 118 τὸ τελευταῖον ψηφίον 7 τοῦ διαιρετέου, συνάγομεν 1187 ἀριθμὸν, ὅστις περιέχει προδήλως 657 μίαν φορὰν· οὕτως 1 εἶναι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ πηλίκου, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τῶν τριῶν προηγουμένων, ὅθεν ἔχομεν 5851 ζητούμενον πηλίκον.

Ἀφαιροῦντες προσέτι 657 ἀπὸ 1187 εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον 530, τὸ ὁποῖον φανερόνει, ὅτι ὁ δεδομένος διαιρετέος περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ γινομένου 657 ἐπὶ 5852, καὶ ἐκείνου τοῦ 657 ἐπὶ 5852.

Δυνάμεθα δὲ νὰ βεβαιώσωμεν τὴν πρᾶξιν, πολλαπλασιάζοντες 657 ἐπὶ 5851· ἢ 5851 ἐπὶ 677· καὶ προσθέτοντες τὸ ὑπόλοιπον 530 εἰς τὸ γινόμενον.

$$\begin{array}{r} 5851 \\ 657 \\ \hline 40957 \\ 29255 \\ 35106 \\ 530 \\ \hline 3844637 \end{array}$$

Σ. Κ. Ἐμποροῦμεν νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι εἰς τὸν δρόμον τῶν πράξεων ἀρκεῖ νὰ κατεβάσωμεν εἰς τὸ πλευρὸν ἑκάστου ὑπολοίπου τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, ἐξακολουθοῦντες οὕτως, ἕως νὰ κατεβάσωμεν ὅλα τὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου.

§. 33. Κανὼν Γενικός. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δύο ἀκεραίους ἀριθμοὺς, τὸν ἕνα διὰ τοῦ ἄλλου, γράφομεν τὸν διαιρέτην εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, τοὺς χωρίζομεν διὰ καθέτου γραμμῆς, καὶ σύρομεν ἄλλην ὁριζόντιον γραμμὴν ὑπὸ τὸν διαιρέτην.

Μετὰ ταῦτα λαμβάνομεν κατὰ τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης, ἢ ἕνα περισσότερον, ἐὰν ἡ ἕνωσις τούτων τῶν πρώτων ψηφίων εἶναι μικροτέρα παρὰ τὸν διαιρέτην· οὕτω σχηματίζομεν τὸν πρῶτον μερικὸν διαιρετέον, τοῦ ὁποίου ὁ χαρακτὴρ ἐκφράζει κατ' εὐθεῖαν τὰς μονάδας ἐκ τῆς φύσεως τῶν ὑψηλοτέρων μονάδων τοῦ πηλίκου· ζητοῦμεν πόσαις φοραῖς οὗτος ὁ μερικὸς διαιρετέος περιέχει τὸν διαιρέτην· (τὸ πηλίκον τοῦτο τὸ προσδιορίζομεν διὰ δοκιμασιῶν, μὴ θεωροῦντες παρὰ τὸ πρῶτον, ἢ τὰ δύο πρῶτα ψηφία εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ μερικοῦ διαιρετέου, καὶ τὸ πρῶτον ψηφίον εἰς τὰ ἀριστερὰ του διαιρέτου.)

Προσδιορισθὲν τὸ τοιοῦτον πηλίκον, τὸ γράφομεν ὑπὸ τὸν διαιρέτην, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην διὰ τούτου τοῦ ψηφίου, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον ἀπὸ τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου.

Κατεβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου· ἡ τοιαύτη ἕνωσις μᾶς δίδει τὸν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον, καὶ ζητοῦντες, ὡς ἀνωτέρω, πόσαις φοραῖς ὁ τοιοῦτος δεύτερος μερικὸς διαιρετέος περιέχει τὸν διαιρέτην, γράφομεν τὸ τοιοῦτον πηλίκον εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ πρώτου, καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τοῦτο τὸ δεύτερον πηλίκον, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον ἀπὸ τὸν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον.

Κατεβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ δευτέρου τούτου ὑπολοίπου τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου· ὅθεν λαμβάνομεν τὸν τρίτον μερικὸν διαιρετέον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐνεργοῦμεν, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω.

Ἐξακολουθοῦμεν ταύτην τὴν σειρὰν τῶν πράξεων, ἕως οὗ νὰ κατεβάσωμεν τὸ τελευταῖον ψηφίον, προσέχοντες εἰς κάθε πρᾶξιν νὰ γράφωμεν τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον συνάγομεν, εἰς τὰ δεξιὰ τῶν προτέρων, (καὶ τοῦτο διὰ νὰ δώσωμεν εἰς ἐκείνους τὴν ἀληθινήν τους τιμήν). Ἐὰν ὕστερον ἀπὸ ὅλας ταύτας τὰς πράξεις δὲν μένῃ τίποτε, ἡ διαίρεσις καλεῖται ἀκριβής· ἐὰν εὕρωμεν ὑπόλοιπον, προσθέτομεν αὐτὸ, ὅταν ἐκτελοῦμεν τὴν βάσανον, εἰς τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον.

§. 34. Ἀφ' οὗ ᾠκειώθημεν μὲ τὸν τρόπον τῶν διαφόρων τούτων πράξεων, δυνάμεθα προσέτι νὰ συντέμνωμεν πολὺ τὰς μερικὰς πράξεις, ἐκτελοῦντες τοὺς πολλαπλασιασμοὺς καὶ τὰς ἀφαιρέσεις εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν, ὡς θέλομεν τὸ ἰδεῖ εἰς τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ πλέον δύσκολον, ἀπὸ ὅσα εἶναι δυνατὸν νὰ μᾶς προβάλλωσι.

Νὰ διαιρέσωμεν 9639475 διὰ 2789.

Λαμβάνομεν κατὰ πρῶτον τὰ πρῶτα τέσσαρα ψηφία εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου, ἐπειδὴ ἡ ἕνωσίς των περιέχει τὸν διαιρέτην, καὶ διαιροῦμεν 9639 διὰ 2789, ἢ ἁπλῶς 9 διὰ 2, καὶ εὑρίσκομεν 4 διὰ πηλίκον. Τὸ τοιοῦτον ψηφίον ἐκφράζει ποσότητα ὑπὲρ τὸ πρέπον· ἐπειδὴ θεωροῦντες μόνον τὰ δύο πρῶτα ψηφία εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου, βλέπομεν, ὅτι 4 φοραῖς 27 δίδει 108, ἀριθμὸς μεγαλήτερος τοῦ 96· δοκιμάζομεν 3, καὶ ἐπειδὴ τρεῖς φοραῖς 27 δίδει 81, ἀριθμὸν πολὺ μικρότερον τοῦ 96, εἴμεθα σχεδὸν βέβαιοι ὅτι τὸ 3 εἶναι τὸ ἀληθινὸν ψηφίον τῶν χιλιάδων τοῦ πηλίκου, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸν διαιρέτην.

```
9639475|2789
-------|----
12724  |3455
-----
 15617
 -----
  17425
  -----
ὑπόλοιπον 691.
```

Τούτου τεθέντος, ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 2789 ἐπὶ 3, καὶ νὰ γράψωμεν τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν 9639, διὰ νὰ πράξωμεν τὴν ἀφαίρεσιν, πράττομεν, ὡς ἐδῶ ἀκολουθεῖ· λέγομεν 3 φοραῖς 9 δίδει 27, 27 ἀπὸ 9 δὲν δύναται, ὑποθέτω 9· αὐξανόμενον ἀπὸ 2 δεκάδας, ὥστε καταστaίνεται 29, καὶ ἀφαιροῦντες 27 ἀπὸ τὸ 29, ἔχομεν 2., τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὰς 4639, ἀφ' οὗ ὑπογραμμίσωμεν τὸν τελευταῖον ἀριθμόν· παρατηροῦμεν δὲ τώρα, ὅτι τὰς δύο δεκάδας, τὰς ὁποίας ἐπροσθέσαμεν, τὰς ἐδανείσθημεν ἐκ τοῦ ψηφίου 3, τὸ ὁποῖον πλέον ἀξίζει 1, ἀλλὰ (ἀριθμ. 14) φθάνομεν προδήλως εἰς τὸ αὐτὸ, καὶ εἶναι πλέον σύντομος ἡ πρᾶξις, νὰ κρατήσωμεν τὰς δύο δεκάδας, διὰ νὰ τὰς προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τῶν δεκάδων τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον 3, καὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ ὅλον ἀπὸ τὰς δεκάδας τοῦ διαιρετέου 9639 ὁλικῶς λαμβανομένου.

Λέγομεν μετὰ ταῦτα 3 φοραῖς 8 κάμνουν 24, καὶ 2 δεκάδες αἱ κρατηθεῖσαι κάμουν 26, 26 ἀπὸ 3 εἶναι ἀδύνατον, ἀλλὰ δανειζόμενοι 3 ἑκατοντάδας ἀπὸ τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων σχηματίζομεν 33 δεκάδας, καὶ ἀφαιροῦντες 28 ἀπὸ 33 ἔχομεν ὑπόλοιπον 7, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τοῦ 3, τοῦ μερικοῦ διαιρετέου, καὶ κρατοῦμεν τὰς τρεῖς ἑκατοντάδας.

3 φοραῖς 7 κάμνει 21· καὶ 3 τὰ κρατηθέντα κάμνουν 24, 24 ἀπὸ 6 εἶναι ἀδύνατον, ἀλλὰ 24 ἀπὸ 26 μένουσι 2, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸν 6· τοῦ μερικοῦ διαιρετέου, καὶ κρατοῦμεν 2 χιλιάδας.

Τέλος πάντων 3 φοραῖς 2 κάμνουν 6, καὶ 2 τὰ κρατηθέντα σχηματίζουν 8, 8 ἀπὸ 9 μένει 1, τὸ ὁποῖον γράφω ὑπὸ τὸν 9. μένει λοιπὸν 1272· εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ τοιούτου ἀριθμοῦ κατεβάζομεν τὸ ψηφίον 4 τοῦ διαιρετέου, καὶ ἔχομεν τὸν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον 12724, ἐπὶ τοῦ ὁποίου πράττομεν, ὡς ἀνωτέρω.

Εἰς 12724 ποσάκις εἰσέρχεται ὁ 2789, ἢ εἰς τὸ 12 ποσάκις εἰσέρχεται τὸ 2; εἰσέρχεται 6 φοραῖς, ἀλλὰ 6 καὶ 5 εἶναι μείζονα τοῦ πρέποντος, ὡς δυνάμεθα νὰ καταλάβωμεν, διὰ τοῦτο γράφομεν 4 εἰς τὰ δεξιὰ τούτου εἰς τὸ πηλίκον, καὶ λέγομεν 4 φοραῖς 9 κάμνει 36, 36 ἀπὸ τὸ 4 εἶναι ἀδύνατον, ἀλλὰ 36 ἀπὸ 44 μένει 8, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸν 4, καὶ κρατοῦμεν 4· 4 φοραῖς 8 κάμνουν 32 καὶ 4 τὰ κρατηθέντα κάμνουν 36, 36 ἀπὸ 2 εἶναι ἀδύνατον. ἀλλὰ 36 ἀπὸ 42 μένει 6, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τοῦ 2, καὶ κρατοῦμεν 4.

4 φοραῖς 7 κάμνουν 28, καὶ 4 τὰ κρατηθέντα κάμνουν 32, 32 ἀπὸ 37 μένουν 5, τὰ ὁποῖα γράφω ὑπὸ τοῦ 7, καὶ κρατῶ τὸ 3.

Τέλος πάντων 4 φοραῖς 2 κάμνουν 8, καὶ 3 τὰ κρατηθέντα κάμνουν 11, 11 ἀπὸ 12 μένει 1, τὸ ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸν 2.

Τὸ ὑπόλοιπον ταύτης τῆς νέας πράξεως εἶναι 1568, εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὁποίου κατεβάζω τὸ ἀκόλουθον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, καὶ οὕτως ἔχω 15687, τρίτον μερικὸν διαιρετέον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου πράττω κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν μετ᾽ αὐτὸν, καὶ εὑρίσκω τέλος πάντων πηλίκον 3456 μὲ τὸ ὑπόλοιπον 691. Ἰδοὺ ὁ πίναξ τῶν πράξεων δι᾽ ἓν νέον παράδειγμα.

200658969	39837
147396	5037
278859	
0.	

§. 35. Πρώτη παρατήρησις ἐπὶ τῆς διαιρέσεως. Τὸ τελευταῖον τοῦτο παράδειγμα δίδει αἰτίαν ἀξιολόγου τινὸς παρατηρήσεως.

Ἀφ᾽ οὗ εὑρήκαμεν διὰ πρῶτον πηλίκον 5, καὶ πρῶτον ὑπόλοιπον 1473, κατεβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ τοιούτου ὑπολοίπου τὸ ἀκόλουθον ψηφίον, καὶ οὕτως ἔχομεν δεύτερον μερικὸν διαιρετέον 14739· τώρα οὗτος ὁ μερικὸς διαιρετέος δὲν περιέχει τὸν διαιρέτην, λοιπὸν τὸ ὅλον πηλίκον δὲν ἔχει ἑκατοντάδας, ἐπειδὴ ἂν μόνον ἤθελεν ἔχει μίαν, τὸ γινόμενον ἐπὶ 39837 ἔπρεπε νὰ ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 14739, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον· ἀλλὰ διὰ νὰ φυλάξωμεν εἰς τὸ ψηφίον 5 τοῦ πηλίκου τὴν τιμὴν, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἔχῃ, πρέπει νὰ γράψωμεν εἰς τὸ πηλίκον μηδὲν, τὸ ὁποῖον κρατεῖ τὸν τόπον τῶν ἑκατοντάδων, καὶ κατεβάζοντες μετὰ ταῦτα εἰς τὸ πλευρὸν τῶν 14730 τὸ ἀκόλουθον ψηφίον 6 τοῦ διαιρετέου, ἀκολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν, καὶ οὕτως θέλομεν ἔχει διαδοχικῶς τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ μονάδων.

Ἐν γένει ὁσάκις κατεβάσωμεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου τὸ ἀκόλουθον ψηφίον, καὶ ὁ συναγόμενος μερικὸς διαιρετέος δὲν περιέχει τὸν διαιρέτην, τοῦτο φανερόνει, ὅτι τὸ πηλίκον δὲν ἔχει μονάδας τῆς τάξεως τοῦ κατεβαζομένου ψηφίου, καὶ τότε θέτομεν 0 εἰς τὸ πηλίκον, διὰ νὰ βαστάξῃ τὴν θέσιν τῶν μονάδων, αἱ ὁποῖαι λείπουσι, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν νὰ φυλάττῃ τὴν σχετικὴν τιμὴν τῶν. ἤδη εὑρεθέντων σημαντικῶν χαρακτήρων, καὶ μετὰ ταῦτα εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ τοιούτου μερικοῦ διαιρουμένου κατεβάζομεν τὸ ἀκόλουθον ψηφίον, καὶ ἐξακολουθοῦμεν τὴν πρᾶξιν.

§. 36. Δευτέρα παρατήρησις. Ὅταν μερική τις πρᾶξις ἐπράχθη καλῶς, τουτέστιν ὅταν τὸ ψηφίον τοῦ πηλίκου σχετικῶς πρὸς ταύτην τὴν πρᾶξιν ἐπροσδιωρίσθη μὲ ἀκρίβειαν, δὲν δυνάμεθα πλέον εἰς τὴν ἀκόλουθον πρᾶξιν νὰ εὕρωμεν πλέον ἀπὸ 9 εἰς τὸ πηλίκον· ἐπειδὴ ἐὰν εὕρωμεν μόνον 10, φανερόνει, ὅτι τὸ προηγούμενον ψηφίον ἦτον μικρότερον μιᾶς μονάδος.

Ἔχομεν δὲ σημεῖόν τι βέβαιον, διὰ μέσου τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν, ὅτι ἓν ψηφίον τοῦ πηλίκου ἐπροσδιορίσθη μὲ ἀκρίβειαν, δηλαδὴ ὅταν ἀφαιρέσωμεν τὸ μερικὸν γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοῦ τοιούτου ψηφίου, τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον συνάγομεν νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου· ἐὰν τὸ τοιοῦτον ὑπόλοιπον εἶναι μεγαλήτερον ἢ ἴσον τῷ διαιρέτῃ, πρέπει νὰ αὐξήσωμεν ἀπὸ μίαν μονάδα τὸ εὑρεθὲν ψηφίον.

§. 37. — Ἐπειδὴ εἰς τὰς πρώτας τρεῖς ἀριθμητικὰς ἐργασίας ἐκτελοῦμεν τοὺς ὑπολογισμοὺς ἀρξάμενοι ἀπὸ τὰ δεξιά, φυσικὰ δύναταί τις νὰ ζητήσῃ διὰ ποῖον δίκαιον εἰς τὴν διαίρεσιν ἀρχίζομεν ἐξ ἐναντίας ἀπὸ τὰ ἀριστερά; Διὰ νὰ ἀποκριθῶμεν εἰς τὸ τοιοῦτον ζήτημα, πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι μὲ τὸ νὰ εἶναι ὁ διαιρετέος τὸ ἄθροισμα τῶν μερικῶν γινομένων τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὰς μονάδας, δεκάδας, ἑκατοντάδας καὶ ἐφεξῆς τοῦ πηλίκου, ὅλα ταῦτα τὰ μερικὰ γινόμενα ἑνόνονται ἀναμεταξύ των, καὶ εἶναι ἀδύνατον νὰ χωρίσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τὰς μονάδας, ἢ τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἀπὸ τὰς δεκάδας, ἐν ᾧ, καθὼς ἀνωτέρω ἐδείξαμεν, φθάνομεν, ἂν ὄχι εἰς τὸ νὰ ἀνακαλύψωμεν μὲ ἀκρίβειαν τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ἀνωτέρω μονάδων, κἂν εἰς τὸ νὰ προσδιορίζωμεν εἰς ποῖον μέρος τοῦ διαιρετέου εὑρίσκεται.

Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν πρᾶξιν ἀπὸ τὰ δεξιὰ ἐκτελοῦντες αὐτὴν διὰ μέσου ἀφαιρέσεων, ὡς ἐδιδάξαμεν εἰς τὸν ἀριθμ. 28.

§. 38. Ἂς δώσωμεν τώρα χρήσεις τινὰς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως.

Πρῶτον ζήτημα. Ζητεῖται ἡ τιμὴ 2564 πηχῶν ἑνὸς εἴδους ὑφάσματος, ὑποτιθεμένου, ὅτι ἡ πήχη ἀξίζει 47 φράγκα.

Ἐπειδὴ ἑκάστη πήχη ἔχει 47 φράγκα, εἶναι φανερὸν, ὅτι λαμβάνοντες ταύτην τὴν τιμὴν 2564 φοραῖς, θέλομεν ἔχει τὴν τιμὴν τῶν 2564 πηχῶν· οὕτως ἀρκεῖ νὰ ἐκτελέσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 47 ἐπὶ 2564, ἢ (ἀριθμ. 26) τὸ γινόμενον τοῦ 2564 ἐπὶ 47, καὶ τὸ τοιοῦτον θέλει ἐκφράζει τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν φράγκων.

Ἰδοὺ ἡ πρᾶξις καὶ ἡ βάσανος αὐτῆς μὲ τὴν διαίρεσιν.

2564	120508	47
47	265	2564
17948	300	
10256	188	
120508	000	

Λοιπὸν 2564 ἔχουσι 120508 φράγκα.

Δεύτερον ζήτημα. Ἡ πήχη ἑνός τινὸς ἔργου οἰκοδόμων ἔχει 39 φράγκα. Ζητεῖται πόσας πήχας ἤθελαν κατασκευάσει διὰ 8395 φράγκα· εἶναι φανερὸν, ὅτι ὁσάκις 39 περιέχεται εἰς τὰς 8395, τόσας πήχας ἤθελον κατασκευάσει. Διὰ τοῦτο ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν 8395 διὰ 39, καὶ τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον θέλομεν εὕρῃ, θέλει εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ζητουμένων πηχῶν.

Βάσανος.

8395	39	215
59	215 πηχ: $\frac{10}{39}$	39
205		1935
10		645
		10
		8395

καὶ ἐπειδὴ εὑρίσκομεν πηλίκον 215, καὶ ὑπόλοιπον 10, πρέπει νὰ ἐξεύρωμεν ποίαν χρῆσιν μέλλομεν νὰ κάμωμεν ἐπάνω εἰς τὸ τοιοῦτον ὑπόλοιπον.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἐὰν ὁ διαιρετέος περιεῖχε 10 ὀλιγώτερα φράγκα, οὗτος ἤθελεν εἶσθαι τὸ ἀκριβὲς γινόμενον τοῦ 39 ἐπὶ 215, οὕτως ὁ ἀριθμὸς τῶν ζητουμένων πηχῶν ἤθελεν εἶσθαι 215, ἀλλ' ἐπειδὴ περιέχει 10 φράγκα περισσότερον, πρόκειται νὰ προσδιορίσωμεν τὸ κλάσμα τῆς πήχης, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν μὲ τὰ τοιαῦτα 10 φράγκα.

Τώρα μὲ ἓν φράγκον ἠθέλαμεν ἔχει $\frac{1}{39}$ τῆς πήχης, ἐπειδὴ ἔχομεν 1 πῆχην διὰ 39 φράγκα. Λοιπὸν μὲ 10 φράγκα πρέπει νὰ ἔχωμεν 10 φοραῖς $\frac{1}{59}$ ἢ $\frac{10}{39}$ τῆς πήχης (ὅρα ἀριθμ. 8). Οὕτως 215 πῆχαι πλέον $\frac{10}{39}$ τῆς πήχης εἶναι τὸ ζητούμενον ἀποτέλεσμα. Οὕτως ἐν γένει πρέπει νὰ μεταχειριζώμεθα τὸ ὑπόλοιπον μιᾶς διαιρέσεως, ὅταν ἐκτελῶμεν ταύτην τὴν πρᾶξιν, καὶ ἔχωμεν σκοπὸν νὰ λύσωμεν ἓν ζήτημα σχετικὸν πρὸς συγκεκριμένους ἀριθμούς.

Ἐννοοῦμεν τὴν μονάδα τοῦ πηλίκου (τῆς ὁποίας ἡ φύσις προσδιορίζεται ἐκ τῆς ἐκφράσεως τοῦ ζητήματος) διῃρημένην εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ διαιρέτης, καὶ λαμβάνομεν ἐκ τῶν τοιούτων μερῶν τοσάκις, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως, καὶ μετὰ ταῦτα προσθέτομεν τὸ συναγόμενον κλάσμα εἰς τὸ ἀκέραιον πηλίκον, τὸ ὁποῖον ἤδη ἐπροσδιορίσαμεν.

Τρίτον ζήτημα. Ἐπληρώσαμεν 21478 φράγκα διὰ 895 πήχας ἑνὸς ὑφάσματος, καὶ ζητοῦμεν τὴν τιμὴν μιᾶς πήχης.

Ἐὰν ἠξεύραμεν τὴν τιμὴν μιᾶς πήχης, ἐπαναλαμβάνοντές τας 895 φοραῖς, ἔπρεπε νὰ προκύψουν 21478 φράγκα. Διὰ τοῦτο ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν 21478 διὰ 895.

21478	895	
3578	23 φράγκα	
893		

Βάσανος.

893	895
895	23
	2685
	1790
	893
	21478

Καὶ ἐπειδὴ ὁ διαιρούμενος ἐκτὸς τοῦ γινομένου τοῦ 895 ἐπὶ 23 περιέχει καὶ πλέον 893 φράγκα, ἕπεται ὅτι ἡ τιμὴ μιᾶς πήχης εἶναι 23 πλέον ἕνα κλάσμα, τὸ ὁποῖον πρόκειται νὰ προσδιορίσωμεν.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι $\frac{1}{895}$ ἐπαναλαμβανόμενον 895 φοραῖς δίδει 1. Οὕτως $\frac{893}{895}$ ἐπαναλαμβανόμενον 895, δίδει 893, καὶ διὰ τοῦτο 23 πλέον $\frac{893}{895}$ εἶναι εἷς ἀριθμὸς, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 895 ἀποτελεῖ 21478. Λοιπὸν τέλος πάντων ἡ ζητουμένη τιμὴ εἶναι 23 φράγκα πλέον $\frac{893}{895}$ τοῦ φράγκου.

Τὸ τοιοῦτον ἐξαγόμενον συμφωνεῖ μὲ τὸν εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα συστηθέντα κανόνα.

Τέταρτον ζήτημα. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι 498 ἄνθρωποι ἔχουν νὰ μερισθῶσιν ἰσάκις κεφάλαιόν τι ἀπὸ 1348708 φράγκα, καὶ ζητεῖται τὸ ἀναλογοῦν εἰς καθένα μέρος.

```
1348708 | 498
 3527   |-----------------
  4108  | 2708 φράγκα  124
   124  |              ---
                       498

      2708
       498
     -----
     21664
    24372
   10832
       124
   -------
   1348708
```

Ἐπειδὴ τὸ πηλίκον ταύτης τῆς διαιρέσεως εἶναι 2708, καὶ τὸ ὑπόλοιπον 124, δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι ἐὰν τὸ μεριστέον κεφάλαιον ἠλαττοῦτο ἀπὸ 124 φράγκα, ἕκαστος ἤθελεν ἔχει διὰ τὸ μερίδιόν του 2708 φράγκα· ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ κεφάλαιον περιέχει 124 φράγκα περισσότερον παρὰ τὸ γινόμενον 2708 ἐπὶ 498, ἕπεται, ὅτι ἕκαστος πρέπει νὰ λάβῃ 2708 πλέον ἓν μέρος τῶν 124 φράγκων. Διὰ νὰ λάβωμεν μίαν ἰδέαν τοῦ τοιούτου μέρους, ἂς θεωρήσωμεν κατὰ πρῶτον τὸν ἀριθμὸν 124 ὡς ἓν ὅλον, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ διαιρέσωμεν εἰς 498 μέρη ἴσα, καὶ ἓν τῶν τοιούτων μερῶν εἶναι τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον θέλει καταστήσει πλῆρες τὸ ἄνω εὑρεθὲν πηλίκον. Ἀλλὰ εἶναι πλέον εὔληπτον νὰ ἐννοήσωμεν (ὡς ἀριθμ. 8) τὴν μονάδα, ἥτις εἶναι ἐδῶ τὸ φράγκον, ὅτι διαιρεῖται εἰς 498 μέρη ἴσα, καὶ νὰ λάβωμεν 124 ἀπὸ τὰ τοιαῦτα μέρη, τὸ ὁποῖον μᾶς δίδει $\frac{124}{498}$ διὰ τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ ἀκέραιον πηλίκον.

§. 39. Σ. Κ. Τὸ τελευταῖον τοῦτο παράδειγμα μᾶς ἄγει εἰς μίαν παρατήρησιν, τὴν ὁποίαν συχνὰ θέλομεν μεταχειρισθῆ, τουτέστι νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 124 εἰς 498 μέρη ἴσα, ἄλλο δὲν εἶναι, παρὰ τὸ νὰ λάβωμεν 124 φοραῖς τὸ 498 μέρος τῆς μονάδος. Τῷ ὄντι, ἐὰν ἀντὶ τοῦ 124 εἴχαμεν μόνον 1 νὰ διαιρεθῇ εἰς 498 μέρη ἴσα, κάθε μέρος ἤθελεν εἶναι $\frac{1}{498}$· ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς, ὅς τις μέλλει νὰ ἀφαιρεθῇ εἶναι 124 φοραῖς μεγαλήτερος τῆς μονάδος, ἐννοεῖται, ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ μερισμοῦ πρέπει νὰ εἶναι 124 φοραῖς μεγαλήτερον, ἢ ἴσον μὲ 124 φοραῖς $\frac{1}{498}$, ἢ τέλος πάντων μὲ $\frac{124}{498}$.

Παρομοίως νὰ διαιρέσωμεν 15 εἰς 28 μέρη ἴσα, ἄλλο δὲν εἶναι, παρὰ τὸ νὰ λάβωμεν 15 φοραῖς τὸ εἰκοστὸν ὄγδοον μέρος τῆς μονάδος· ἐπειδὴ ἐὰν μόνον εἴχαμεν 1 νὰ διαιρέσωμεν εἰς 28 μέρη ἴσα, κάθε μέρος ἤθελεν εἶσθαι $\frac{1}{28}$· ἀλλ' ἐπειδὴ ἔχαμεν νὰ μερίσωμεν 15, ἢ ἕνα ἀριθμὸν 15 φοραῖς πλέον μεγαλήτερον, τὸ ἐξαγόμενον πρέπει νὰ εἶναι ἴσον μὲ 15 φοραῖς $\frac{1}{28}$, ἢ μὲ $\frac{15}{28}$.

Ἐν γένει διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν εἰς τόσα μέρη ἴσα, ὅσαι μονάδες εἶναι εἰς ἄλλον τινὰ, ἀπαιτεῖται νὰ διαιρέσωμεν τὴν μονάδα εἰς τόσα μέρη ἴσα, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ δεύτερος, καὶ νὰ ἐπάρωμεν ἓν τούτων τῶν μερῶν τόσαις φοραῖς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ πρῶτος.

§. 40. Ἀπὸ τὰς δύο ἀποδεδειγμένας προτάσεις εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 25 καὶ 26 ἐξάγομεν μερικὰς συνεπείας, τὰς ὁποίας εἶναι καλὸν νὰ γνωρίσωμεν, ἐπειδὴ αὗται συχνότατα μεταχειρίζονται εἰς τὴν ἀριθμητικήν.

Παρατηροῦντες πρῶτον ἀπὸ ὅλα, ὅτι ὕστερον ἀπὸ τοὺς ὁρισμοὺς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, καθισταίνομεν ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν τόσαις φοραῖς μεγαλήτερον, ἢ μικρότερον, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἄλλος, πολλαπλασιασιαζομένου ἢ διαιρουμένου τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου.

Οὕτως, ὅταν πολλαπλασιάζωμεν 24 ἐπὶ 6, τὸ γινόμενον εἶναι 6 φοραῖς μεγαλήτερον τοῦ 24, ἐπειδὴ συνάγεται ἐκ τῆς προσθέσεως 6 ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ἕκαστος εἶναι ἴσος μὲ τὸ 24. Παρομοίως ἐὰν διαιρέσωμεν 24 διὰ τοῦ 6, τὸ πηλίκον εἶναι 6 φοραῖς μικρότερον τοῦ 24, ἐπειδὴ τὸ πηλίκον τοῦτο λαμβανόμενον 6 φοραῖς ἀποτελεῖ τὸ 24.

Τούτου τεθέντος, λέγω κατὰ πρῶτον, ὅτι ἐὰν εἰς ἕνα πολλαπλασιασμὸν καταστήσω τὸν πολλαπλασιαστὴν, ἢ τὸν πολλαπλασιαστέον μὲ ἕνα τινὰ ἀριθμὸν φορῶν μεγαλήτερον, ἢ μικρότερον, τὸ γινόμενον κατασταίνεται διὰ ταύτην τὴν μεταβολὴν, τόσαις φοραῖς μεγαλήτερον ἢ μικρότερον.

Ἔστω π. χ. νὰ πολλαπλασιάσωμεν 47 ἐπὶ 6, καὶ ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἀντὶ νὰ ἐκτελέσωμεν ταύτην τὴν πρᾶξιν, πολλαπλασιάζομεν 47 ἐπὶ 24, τὸ ὁποῖον εἶναι τετράκις μεγαλήτερον τοῦ 6, καὶ ἐπειδὴ, ἐκ τῶν ὅσα εἴπομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 25, διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 47 ἐπὶ 24 ἀπαιτεῖται νὰ πολλαπλασιάσωμεν 47 ἐπὶ 6, καὶ τὸ προκύπτον γινόμενον ἐπὶ 4, ἕπεται ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ 47 ἐπὶ 24 εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρες φοραῖς τὸ γινόμενον τοῦ 47 ἐπὶ 6, ἢ τέσσαρες φοραῖς μεγαλήτερον τοῦ γινομένου τοῦ 47 ἐπὶ 6.

Καὶ ἀνάπαλιν, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦ 47 ἐπὶ 6. (τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ 24) εἶναι τετράκις μικρότερον τοῦ γινομένου τῶν 47 ἐπὶ 24, ἕπεται ὅτι ἐὰν καταστήσωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον τετράκις μικρότερον, τουτέστιν ἂν διαιρέσωμεν αὐτὸν διὰ τοῦ 4, τότε τὸ γινόμενον διὰ ταύτην τὴν μεταβολὴν θέλει γένῃ τετράκις μικρότερον.

Εἴδομεν ἀλλαχοῦ (ἀριθμ. 26) ὅτι εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο παραγόντων δυνάμεθα νὰ ἀντιστρέψωμεν τὴν τάξιν τῶν παραγόντων. Λοιπὸν τὸ ὅ, τι εἴπομεν σχετικῶς πρὸς τὸν πολλαπλασιαστὴν, ἐφαρμόζεται παρομοίως καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιαστέον.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι δὲν ἀλλάττει ἡ τιμὴ τοῦ γινομένου, ὅταν γενῇ ὁ πολλαπλασιαστέος ἕνα ἀριθμὸν φοραῖς μεγαλήτερος, ἀρκεῖ εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν νὰ καταστήσωμεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ἕνα ἀριθμὸν φοραῖς μικρότερον. τουτέστι πολλαπλασιάζοντες τὸν πρῶτον παράγοντα ἐπὶ ἀριθμόν τινὰ, καὶ διαιροῦντες τὸν δεύτερον διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ· ἐπειδὴ μὲ τὴν πρώτην πρᾶξιν καταστaίνομεν τὸ γινόμενον ἕνα ἀριθμὸν φορῶν μεγαλήτερον, καὶ μὲ τὴν δευτέραν ἕνα ἴσον ἀριθμὸν φορῶν μικρότερον, καὶ οὕτως γίνεται ἡ ἀνταμοιβή.

Εἰς ταύτην τὴν τελευταίαν συνέπειαν ἐπιστηρίζεται ἓν μέσον, τὸ ὁποῖον πολλάκις μεταχειριζόμεθα, διὰ νὰ βεβαιόνωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν.

Ἔστω 347. νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 72. Ἀλλὰ τὸ νὰ πολλαπλασιάσωμεν 347 ἐπὶ 72 ἄλλο δὲν εἶναι, παρὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο φοραῖς τὸ 347 ἢ 694 ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ 72, ἢ ἐπὶ 36· οὕτως ἀφ' οὗ πολλαπλασιάσωμεν 347 ἐπὶ 72, δυνάμεθα μετὰ ταῦτα νὰ πολλαπλασιάσωμεν 694 ἐπὶ 36, καὶ ἐὰν ἡ πρώτη ἐργασία εἶναι ἀκριβὴς, πρέπει νὰ ἐξαναεύρωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἤδη ἐπειδὴ εἰς τὴν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος εἶναι τὸ γινόμενον, τοῦ ὁποίου ὁ διαιρέτης καὶ τὸ πηλίκον εἶναι οἱ δύο παράγοντες, ἕπεται ὅτι ἐὰν καταστήσωμεν τὸν διαιρετέον ἕνα τινὰ ἀριθμὸν φορῶν μεγαλήτερον ἢ μικρότερον, τουτέστιν ἐὰν τὸν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν δι' ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀκεραίου, τὸ πηλίκον διὰ ταύτης τῆς τροπῆς πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ.

Τῷ ὄντι ἐπειδὴ μετὰ τὴν τροπὴν τὸ πηλίκον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην χρεωστεῖ νὰ ἀποτελέσῃ ἕνα διαιρετέον καθ' ἕνα τινὰ ἀριθμὸν φορῶν μεγαλήτερον ἢ μικρότερον παρὰ τὸν πρῶτον, πρέπει ἐξ ἀνάγκης, τοῦ διαιρετέου μένοντος τοῦ αὐτοῦ, νὰ εἶναι τὸ πηλίκον μεγαλήτερον ἢ μικρότερον κατὰ τὸν αὐτὸν τοῦτον ἀριθμὸν τῶν φορῶν.

Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν ἀμελοῦντες τὸν διαιρετέον καταστήσωμεν τὸν διαιρέτην ἕνα τινὰ ἀριθμὸν φορῶν μεγαλήτερον ἢ μικρότερον, τὸ πηλίκον διὰ ταύτης τῆς πράξεως κατασταίνεται ἕνα ἴσον ἀριθμὸν μικρότερον ἢ μεγαλήτερον. Τῷ ὄντι εἶναι ἡ μόνη ὑπόθεσις, τὴν ὁποίαν ἠμποροῦμεν νὰ δεχθῶμεν, ὥστε ὁ πολλαπλασιασμὸς νὰ δώσῃ τὸ αὐτὸ γινόμενον, ἢ τὸν αὐτὸν διαιρούμενον.

Λοιπὸν πολλαπλασιαζομένου ἢ διαιρουμένου τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου διὰ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ, τὸ πηλίκον δὲν ἀλλάττει· ἐπειδὴ ἐὰν ἐκ τῆς εἰς τὸν διαιρετέον γινομένης μεταβολῆς, πολλαπλασιάζομεν ἢ διαιροῦμεν τὸ πηλίκον ἐπὶ ἕνα ἀριθμὸν, ἡ δευτέρα μεταβολὴ κατασταίνει αὐτὸ ἕνα ἀριθμὸν φορῶν μικρότερον ἢ μεγαλήτερον, καὶ οὕτω γίνεται ἡ ἀνταμοιβή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

Περὶ Κλασμάτων.

§. 41. Εἴδομεν ἤδη (εἰς τὸν ἀριθμ. 1 καὶ 8) τί ἐστὶ κλάσμα, καὶ ποίαν ἰδέαν πρέπει νὰ λάβωμεν αὐτοῦ. Πάντοτε διακρίνονται δύο ὅροι εἰς ἕνα κλάσμα, ὁ παρονομαστὴς καὶ ὁ ἀριθμητής· ὁ παρονομαστὴς δεικνύει εἰς πόσα ἴσα μέρη ἐδιαιρέθη ἡ μονὰς, καὶ ὁ ἀριθμητὴς πόσα λαμβάνομεν ἀπὸ ταῦτα τὰ μέρη· ἡ ἕνωσις τῶν λαμβανομένων μερῶν συσταίνει τὸ ὅλον.

Οὕτως εἰς τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$, τὸ ὁποῖον ἐκφράζομεν τρία