Τῷ ὄντι ἂς ἐννοήσωμεν τὴν μονάδα γεγραμμένην 459 φοραῖς εἰς τὴν αὐτὴν ὁριζόντιον γραμμὴν, καὶ ἂς σχηματίσωμεν 237 τοιαύτας γραμμὰς,

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 1, | 1, | 1, | 1, | ...... |
| 1, | 1, | 1, | 1, | 1, | ...... |
| 1, | 1, | 1, | 1, | 1, | ...... |
| 1, | 1, | 1, | 1, | 1, | ...... |
| . | . | . | . | . | ...... |
| . | . | . | . | . | ...... |

εἶναι φανερὸν, ὅτι τὸ κεφάλαιον τῶν περιεχομένων μονάδων εἰς τὸν παρόντα πίνακα εἶναι ἴσον μὲ τόσαις φοραῖς 459 μονάδας μιᾶς ὁριζοντίου ζώνης, ὅσαι μονάδες εὑρίσκονται εἰς μίαν τῶν καθέτων στηλῶν, ἢ εἰς 237, τουτέστι τὸ κεφάλαιον τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν 459 ἐπὶ 237· ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν παρομοίως, ὅτι αὐτὸ εἶναι ἴσον μὲ τόσαις φοραῖς τὰς 237 μονάδας μιᾶς καθέτου στήλης, ὅσας μονάδας ἔχει μία ὁριζόντιος ζώνη, ἢ τόσας, ὅσας ἔχει ὁ ἀριθμὸς 459, τουτέστι εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν 237 ἐπὶ 459, καὶ ἐφεξῆς.

Ἐὰν ἡ φύσις ἑνὸς ζητήματος μᾶς φέρῃ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ ἀριθμοῦ 75 ἐπὶ 5642, κατὰ τὴν ἤδη ἀποδειχθεῖσαν πρότασιν, ἄγομεν ταύτην τὴν πρᾶξιν εἰς τὸ γινόμενον τῶν 5642 ἐπὶ 75, ἐπειδὴ τότε δὲν ἔχομεν παρὰ δύο μόνον μερικὰ γινόμενα νὰ σχηματίσωμεν, ἐν ᾧ εἰς τὴν πρώτην περίστασιν ἔμελλε νὰ σχηματίσωμεν τέσσαρα.

Αὐτὴν τὴν πρότασιν θέλομεν ἀποδείξει δι' ὁποιονδήποτε ἀριθμὸν παραγόντων (Κεφ. ε$^{ον}$, ἀρ. 127.)

## Περὶ Διαιρέσεως.

§. 27. Τὸ νὰ διαιρῶμεν ἀριθμὸν δι' ἀριθμοῦ εἶναι (ἀρ. 9) τὸ νὰ εὑρίσκωμεν τρίτον τινὰ ἀριθμὸν, ὅς τις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον ν' ἀποτελῇ τὸν πρῶτον, ἢ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον, δοθέντος ἑνὸς γινομένου καὶ ἑνὸς τῶν παραγόντων του, νὰ προσδιορίσωμεν τὸν δεύτερον παράγοντα. Ἐπειδὴ εἰς τοὺς πολλαπλασιασμοὺς τῶν ἀριθμῶν τὸ γινόμενον σύγκειται ἀπὸ τόσαις φοραῖς τὸν πολλαπλασιαστέον, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ πολλαπλασιαστὴς, δυνάμεθα διὰ τοῦτο νὰ εἴπωμεν, ὅτι νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀκέραιον δι' ἄλλου, εἶναι νὰ ζητήσωμεν πόσαις φοραῖς ὁ πρῶτος ἀριθμὸς, θεωρούμενος ὡς γινόμενον, περιέχει τὸν δεύτερον, θεωρούμενον ὡς πολλαπλασσαστέον· ὁ ἀριθμὸς τῶν φορῶν εἶναι τότε ὁ πολλαπλασιαστής. Τέλος πάντων, εἴδομεν εἰς τὸν (ἀρ. 9), ὅτι νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀκέραιον δι' ἄλλου, εἶναι νὰ μερίσωμεν τὸν πρῶτον ἀριθμὸν εἰς τόσα μέρη ἴσα, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ δεύτερος.

Οἱ δύο τελευταῖοι ὁρισμοὶ ὑπὸ τοὺς ὁποίους θεωροῦμεν κάποτε τὴν διαίρεσιν ἀνήκουσι μόνον εἰς ἀκεραίους ἀριθμοὺς, ἐν ᾧ οἱ δύο πρῶτοι ἀνήκουσιν εἰς ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς τόσον ἀκεραίους, ὅσον καὶ κλασματικοὺς, μ' ὅλον τοῦτο αἱ δοθεῖσαι ὀνομασίαι εἰς τοὺς ὅρους μιᾶς διαιρέσεως προήχθησαν ὑπὸ τῶν δύο τελευταίων ὁρισμῶν.

Οὕτως, ὁ πρῶτος ἀριθμὸς καλεῖται Διαιρετέος, ἢ διαιρούμενος, (ἀριθμὸς, ὅςτις πρόκειται νὰ διαιρεθῇ ἢ νὰ μερισθῇ), ὁ δεύτερος καλεῖται διαιρέτης, καὶ ὁ τρίτος καλεῖται πηλίκον, ἐπειδὴ ἐκφράζει ποσάκις ὁ διαιρετέος περιέχει τὸν διαιρέτην.

Προκύπτει φανερὰ ἐκ τῶν δύο πρώτων ὁρισμῶν, ὅτι, ὅταν εὕρωμεν τὸ πηλίκον καὶ ζητήσωμεν τὴν βάσανον τῆς πράξεως, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον, καὶ ἐὰν ἡ ἐργασία ἦναι ὀρθὴ, πρέπει νὰ προέλθῃ ἐξ αὐτῆς ὁ διαιρετέος.

Καὶ ἀντιστρόφως, εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν, τὸ γινόμενον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς διαιρετέος, ὁ πολλαπλασιαστέος ὡς διαιρέτης, καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς ὡς πηλίκον· οὕτως ἡ βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γίνεται, ἀφ' οὗ διαιρεθῇ τὸ γινόμενον δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων του, καὶ ἐὰν ἡ ἐργασία ἦναι ὀρθὴ, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸν ἄλλον παράγοντα.

Μετὰ τὰς γνώσεις ταύτας, ἂς ἔλθωμεν τώρα εἰς τὴν ἐξήγησιν τοῦ τρόπου τοῦ ἐκτελεῖν τὴν διαίρεσιν.

§. 28. Καθὼς τὸν πολλαπλασιασμὸν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν διὰ μέσου τῆς προσθέσεως ἑνὸς ἀριθμοῦ πολλαῖς φοραῖς εἰς τὸν ἑαυτόν του, οὕτω δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον μιᾶς διαιρέσεως δι' ἀλληλοδιαδόχου ἀφαιρέσεως.

Τῷ ὄντι ἐὰν ἐπρόκειτο π. χ. νὰ διαιρέσωμεν 60 διὰ 12, τοσάκις δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν 12 ἀπὸ 60, ὁσάκις τὸ 12 περιέχεται εἰς τὸ 60· οὕτως τὸ πηλίκον εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀφαιρέσεων, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν πρὸ τοῦ ὁ διαιρετέος νὰ ἐξαλειφθῇ.

Εἰς τοῦτο τὸ παράδειγμα, εἰς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν πέντε διαδοχικὰς ἀφαιρέσεις, ἕπεται ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι 5· ἀλλ' ὁ τοιοῦτος τρόπος τοῦ ἐκτελεῖν τὴν διαίρεσιν εἶναι πολὺ μακρὸς εἰς τὰς πράξεις, καὶ μάλιστα, ὅταν ὁ διαιρετέος ἦναι πολλὰ μεγάλος ὡς πρὸς τὸν διαιρέτην· ἡ δὲ τέχνη τοῦ συντέμνειν τὴν ἐργασίαν εἶναι τὸ ὑποκείμενον τῆς κυρίως λεγομένης διαιρέσεως.

| | | |
|---|---|---|
| 60 | | |
| 12 | | |
| 48 | 1ον | ὑπόλοιπον. |
| 12 | | |
| 36 | 2ον | . . . . . |
| 12 | | |
| 24 | 3ον | . . . . . |
| 12 | | |
| 12 | 4ον | . . . . . |
| 12 | | |
| 00 | 5ον | . . . . . |

§. 29. Γνωρίζοντες ἐκ μνήμης τὰ γινόμενα δύο ἀριθμῶν ἑνὸς μόνου ψηφίου, δυνάμεθα εὐκόλως νὰ προσδιορίσωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος μὲ ἓν ἢ δύο ψηφία δι' ἄλλου ἀριθμοῦ μὲ ἓν μόνον ψηφίον.

Π. χ. 35 διαιρεθὲν διὰ 9, δίδει πηλίκον 5, ἢ μᾶλλον ποσάκις τὸ 35 περιέχει τὸ 7; τὸ περιέχει 5 φοραῖς, ἐπειδὴ ἐξεύρομεν, ὅτι 5 φοραῖς 7 δίδει 35. Παρομοίως εἰς τὸ 54 ποσάκις περιέχεται τὸ 9; 6 φοραῖς· Λέγομεν ἀκόμη εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα, τὸ $\overline{7}^{ον}$ τῶν 35 εἶναι 5, ἐπειδὴ 7 φοραῖς 5 κάμνουν 35, καὶ εἰς τὸ δεύτερον, τὸ $\overline{9}^{ον}$ τοῦ 54 εἶναι 6, ἐπειδὴ 9 φοραῖς 6 κάμνουν 54.

Ἂς διαιρεθῇ προσέτι 68 διὰ τοῦ 9. Ἐπειδὴ 7 φοραῖς 9 ἢ 63, καὶ 8 φοραῖς 9 ἢ 72 περιέχουσιν 68, ἕπεται ὅτι 68 διαιρεθὲν διὰ τοῦ 9 δίδει πηλίκον 7, καὶ ὑπόλοιπον 5, ἤ, τὸ ἔννατον μέρος τοῦ 68 εἶναι 7, καὶ δίδει ὑπόλοιπον 5.

Παρομοίως τὸ 47 πόσαις φοραῖς περιέχει τὸ 8; τὸ περιέχει 5 μ' ἓν ὑπόλοιπον 7· ἐπειδὴ 5 φοραῖς 8 κάμνουν 40 μόνον, ἢ τὸ ὄγδοον μέρος τοῦ 47 εἶναι 5, καὶ ὑπόλοιπον 7· διότι ἐὰν λάβωμεν 6 φοραῖς 8, ἔχομεν 48, ἀριθμὸν μεγαλήτερον τοῦ 47.

Θέλομεν ἰδεῖ εἰς τὸ ἑξῆς πῶς πρέπει νὰ μεταχειριζώμεθα τὸ ὑπόλοιπον, τὸ ὁποῖον συνάγεται ὅταν ὁ διαιρετέος δὲν περιέχῃ μὲ ἀκρίβειαν τὸν διαιρέτην.

§. 30. Ἂς περάσωμεν εἰς τὴν περίστασιν, καθ' ἣν ὁ διαιρετέος εἶναι σύνθετος ἐκ πολλῶν ψηφίων, καὶ ὁ διαιρέτης δὲν ἔχει παρὰ ἓν μόνον ψηφίον.

Ἐπειδὴ ὑπάρχει μία ἐνδοτάτη σχέσις μεταξὺ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως, εἶναι φυσικὸν νὰ ζητήσωμεν τὴν μέθοδον τῆς τελευταίας πράξεως κατ' ἐκείνην, τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν.

Ἂς ἀναλάβωμεν τὸ πρῶτον παράδειγμα, τὸ ὁποῖον ἐξηγήσαμεν εἰς τὸν ἀρ. 19.

Ἕπεται ἐξ αὐτοῦ, ὅτι τὸ γινόμενον 59213 σύγκειται ἀπὸ 7 φοραῖς τὰς μονάδας, 7 τὰς δεκάδας, 7 τὰς ἑκατοντάδας, καὶ 7 φοραῖς τὰς χιλιάδας τοῦ ἀριθμοῦ 8459, καὶ διὰ τοῦτο τὸ γινόμενον σύγκειται ἐκ τεσσάρων μερικῶν γινομένων, τὰ ὁποῖα ἀνταποκρίνονται εἰς τὰ 4 ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου· λοιπὸν τὸ ἀνάπαλιν, δεδομένου τοῦ γινομένου 59213, καὶ ἑνὸς τῶν παραγόντων του 7, διὰ νὰ ξαναεύρωμεν τὸν ἄλλον παράγοντα, πρέπει νὰ πασχίσωμεν νὰ ἀναλύσωμεν κἂν νοερῶς 59213 εἰς τὰς χιλιάδας, ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας, τὰς ὁποίας περιέχει, καὶ μετὰ ταῦτα νὰ λάβωμεν διαδοχικῶς τὸ ἕβδομον ἑκάστου αὐτῶν, καὶ ἑνόνοντες τὰ μερικὰ ταῦτα πηλίκα, τὰ ὁποῖα οὕτως προσδιορίζομεν, θέλομεν λάβει τὸ ὅλον πηλίκον, ἢ τὸν δεύτερον παράγοντα.

```
 8459
    7
-----
59213
```

Ἰδοὺ τίνι τρόπῳ διατάττομεν τὴν πρᾶξιν.

Γράφομεν τὸν διαιρέτην εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου, καὶ χωρίζομεν αὐτοὺς διὰ καθέτου γραμμῆς, μετὰ ταῦτα σύρομεν ὁριζόντιον γραμμὴν ὑπὸ τὸν διαιρέτην.

Τούτου τεθέντος, λαμβάνομεν ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τὰ δύο πρῶτα ψηφία, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν 59 χιλιάδας, καὶ τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν ὡς τὸ πρῶτον μερικὸν γινόμενον, ἔπειτα λέγομεν εἰς 59 ποσάκις εἰσέρχεται τὸ 7, ἢ ἀλλέως (διὰ νὰ συμφωνήσωμεν μὲ τὴν συνήθειαν, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μόνον μὲ ἓν ψηφίον), τὸ ἕβδομον τοῦ 59 εἶναι 8 διὰ τὸ 56, τὸ πηλίκον 8

```
59213 | 7
 32   |----
  41  |8459
   63
    0
```

οὕτω ληφθὲν ἐκφράζει τὰς χιλιάδας τοῦ ὅλου πηλίκου, καὶ γράφεται ὑπὸ τὸν διαιρέτην, ὡς ἀνωτέρω βλέπομεν· πολλαπλασιάζομεν 7 ἐπὶ 8, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον 56 ἀπὸ τοῦ 59, τὸ ὁποῖον δίδει ὑπόλοιπον 3 χιλιάδας, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ θεωρήσωμεν ὡς συναγομένας ἀπὸ τὰ κρατηθέντα εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου ἐπὶ 7.

Καταβιβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ 3 τὸ ψηφίον 2 τῶν ἑκατοντάδων τοῦ διαιρετέου, τὸ ὁποῖον μᾶς δίδει 32 ἑκατοντάδας, τὰς ὁποίας θεωροῦμεν ὡς τὸ δεύτερον μερικὸν γινόμενον, καὶ λέγομεν τὸ ἕβδομον μέρος τῶν 32 εἶναι 4 διὰ 28, γράφομεν τὸ ψηφίον 4, τὸ ὁποῖον μέλλει νὰ ἐκφράσῃ τὰς ἑκατοντάδας τοῦ πηλίκου εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ψηφίου 8· μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 4, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον 28 ἐκ τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 32, καὶ οὕτως ἔχομεν ὑπόλοιπον 4 ἑκατοντάδας, αἵτινες παριστάνουν, ὅσα ἐπαρατηρήσαμεν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δεκάδων τοῦ πηλίκου ἐπὶ 7.

Καταβιβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ νέου ὑπολοίπου 4 τὸ ψηφίον 1 τῶν δεκάδων τοῦ διαιρετέου, ὥστε συνάγομεν 41 δεκάδας, καὶ λέγομεν τὸ ἕβδομον μέρος τῶν 41 δεκάδων εἶναι 5 διὰ 35, γράφομεν τὸ ψηφίον 5 εἰς τὰ δεξιὰ τῶν δύο πρώτων, ἐπειδὴ ἐκφράζει δεκάδας τοῦ πηλίκου· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν 7 μὲ 5, καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον 35 ἀπὸ τὸν μερικὸν διαιρετέον 41, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 6 ἐκφράζει τὰς προερχομένας δεκάδας ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν μονάδων τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην.

Τέλος πάντων καταβιβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ψηφίου 6, τὸ ψηφίον 3, καὶ λέγομεν τὸ ἕβδομον μέρος τοῦ 63 εἶναι μὲ ἀκρίβειαν 9, καὶ γράφομεν 9 εἰς τὰ δεξιὰ τῶν τριῶν εὑρεθέντων*, διότι ἐκφράζει τὰς μονάδας τοῦ πηλίκου· καὶ πολλαπλασιάζοντες 7 μὲ 9, καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον 63 ἐκ τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 63, συνάγομεν μηδὲν ὑπόλοιπον· λοιπὸν 8459 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Τῷ ὄντι προκύπτει προφανῶς ἐκ τῶν ἄνω εἰρημένων πράξεων, ὅτι ἀφαιρέσαμεν διαδοχικῶς ἐκ τοῦ διαιρουμένου 59213, 7 φοραῖς τὰς 8 χιλιάδας, 7, τὰς 4 ἑκατοντάδας, 7 φοραῖς τὰς 5 δεκάδας, 7 τὰς ἐννέα μονάδας, καὶ ἐπειδὴ ὕστερον ἀπὸ ὅλας αὐτὰς τὰς πράξεις δὲν μένει τίποτε, ἕπεται ὅτι 59213 εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν 8459 ἐπὶ 7, ἢ τοῦ 7 ἐπὶ 8459· ὅθεν ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Ἔστω ὡς δεύτερον παράδειγμα νὰ διαιρέσωμεν 754264 διὰ 8.

Ἡ πρώτη δυσκολία, ἥτις παῤῥησιάζεται εἰς ἡμᾶς, εἶναι νὰ γνωρίσωμεν τὴν φύσιν τῶν ἀνωτέρων μονάδων τοῦ πηλίκου, καὶ νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ἀριθμόν. Διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς τοῦτο, παρατηροῦμεν, ὅτι ἐὰν τὸ πρῶτον ψηφίον εἰς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου ἦναι μεγαλήτερον τοῦ διαιρέτου, ἢ ἦτον ἴσον, τὸ ὅλον πηλίκον ἤθελε περιέχει τότε μονάδας τοῦ ἰδίου εἴδους

| | |
|---|---|
| 754264 | 8 |
| 34 | 94283 |
| 22 | |
| 66 | |
| 24 | |
| 0 | |

μὲ ἐκείνας τοῦ ψηφίου, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν εἰς τὸν διαιρετέον, τοῦτο εἶναι φανερόν· ἀλλ' ἐπειδὴ εἰς τοῦτο τὸ παράδειγμα τὸ πρῶτον ψηφίον 7 εἶναι μικρότερον τοῦ 8, συμπεραίνομεν, ὅτι αἱ ἀνώτεραι μονάδες τοῦ πηλίκου εἶναι μονάδες ἐκ τῆς φύσεως τοῦ δευτέρου ψηφίου ἐν ἀριστερᾷ εἰς τὸν διαιρετέον· τότε λαμβάνοντες τὰ δύο πρῶτα ψηφία τὰ σχηματίζοντα 75 δεκάδας χιλιάδος, λέγομεν τὸ ὄγδοον τοῦ 75 εἶναι 9 διὰ τὰ 72, λοιπὸν τὸ ὅλον πηλίκον περιέχει 9 δεκάδας χιλιάδος, ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ ἀφαιρέσωμεν 8 φοραῖς τὸ 9, ἢ 72 δεκάδας χιλιάδων ἀπὸ τὸν διαιρετέον· γράφομεν τότε 9 ὑπὸ τὸν διαιρέτην, καὶ μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν 8 ἐπὶ 9 καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ γινόμενον 72 χιλιάδας ἀπὸ τὸν μερικὸν διαιρετέον 75, τὸ λαμβανόμενον ὑπόλοιπον 3 προέρχεται ἀπὸ τὰ κρατηθέντα ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν χιλιάδων τοῦ ὅλου πηλίκου ἐπὶ 8.

Καταβιβάζομεν εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου 3, τὸ ἀκόλουθον ψηφίον 4 τοῦ διαιρετέου, καὶ λέγομεν τὸ $\overline{8}^{ον}$ τῶν 34 χιλιάδων εἶναι 4 διὰ 32· λοιπὸν γράφομεν 4 ὑπὸ τὸν διαιρέτην εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ψηφίου 9, καὶ ἀφαιροῦντες τὸ γινόμενον 4 φοραῖς 8 ἢ 32 ἀπὸ 34, ἔχομεν 2, εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὁποίου καταβιβάζομεν τὸ ψηφίον 2 τῶν ἑκατοντάδων τοῦ διαιρετέου· μετὰ ταῦτα ἐργαζόμενοι ἐπὶ τοῦ νέου μερικοῦ διαιρετέου 22, ὡς εἰς τοὺς προηγουμένους, ἐξακολουθοῦμεν αὐτὰς τὰς πράξεις, ἕως οὗ νὰ κατεβασθῇ τὸ τελευταῖον ψηφίον 4 τοῦ διαιρετέου, καὶ οὕτω λαμβάνομεν τὸ ζητούμενον πηλίκον 94283.

## Βάσανος.

$$\begin{array}{r} 94283 \\ 8 \\ \hline 754264 \end{array}$$

Εἰς τὰς πράξεις, ὁσάκις ὁ διαιρέτης ἔχει ἓν μόνον ψηφίον, συντέμνεται ἡ πρᾶξις, ὡς ἐδῶ ἀκολουθεῖ.

Ἔστω νὰ διαιρεθῇ 45237324 διὰ 6.

| | | |
|---|---|---|
| Ἀφ᾽ οὗ ὑπογραμμίσωμεν τὸν διαιρετέον λέγομεν, τὸ ἕκτον τοῦ 45 εἶναι 7, τὸ ὁποῖον γρά- | | 45237324\|6 |
| | Πηλίκον. | 7539554 |
| | Δοκιμή. | 6 |
| | | 45237324 |

φομεν ὑπὸ τοῦ 45, καὶ μένει 3, τὸ ὁποῖον νοερῶς ἑνόνομεν μὲ τὸ ἀκόλουθον ψηφίον 2, καὶ οὕτως ἔχομεν 32· τὸ ἕκτον μέρος τοῦ 32 εἶναι 5, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ 7, καὶ μένει 2, τὸ ὁποῖον ἠνωμένον μὲ τὸ ψηφίον 3 σχηματίζει 23· τὸ ἕκτον τοῦ 23 εἶναι 3, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τῶν δύο προηγουμένων, καὶ μένει 5, τὸ ὁποῖον ἀκολουθούμενον ἐκ τοῦ ψηφίου 7, δίδει 57, τὸ ἕκτον μέρος τοῦ 57 εἶναι 9 διὰ 54, καὶ μένει 3, τὸ ὁποῖον ἀκολουθούμενον ἐκ τοῦ ψηφίου 3 δίδει 33, τὸ ἕκτον τοῦ 33 εἶναι 5 διὰ 30, καὶ μένει 3, τὸ ὁποῖον ἀκολουθούμενον ἐκ τοῦ ψηφίου 2 δίδει 32, τὸ ἕκτον τοῦ 32 εἶναι 5 διὰ 30, τέλος πάντων τὸ ἕκτον τοῦ 24 εἶναι 4· λοιπὸν τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι 7539554. Τῷ ὄντι ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸ ἐπὶ 6, εὑρίσκομεν γινόμενον 45237324.

| | | |
|---|---|---|
| Παρομοίως τὸ ὄγδοον τοῦ ἀριθμοῦ | 9725647\|8 | |
| εἶναι . . . . . | 1215705 | . . . . 7 |
| καὶ μένει ὑπόλοιπον 7. . . . . | 8 | . . . . βάσανος. |
| | 9725640 | |
| | 7 | |
| | 9725647 | |

Σ. Κ. Εἰς τοῦτο τὸ παράδειγμα, φθάσαντες εἰς τὸ ψηφίον 7 τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου, ἐπειδὴ δὲν μένει ὑπόλοιπον, καὶ τὸ ἀκόλουθον ψηφίον 4 τοῦ διαιρετέου εἶναι μικρότερον τοῦ 8, βλέπομεν, ὅτι δὲν ὑπάρχουσι δεκάδες εἰς τὸ πηλίκον, τότε θέτομεν 0, διὰ νὰ κρατῇ τὸν τόπον, καὶ κάμνοντες νὰ ἐξακολουθήσῃ τὸ ψηφίον 4 τοῦ ψηφίου 7 τῶν μονάδων, τὸ ὁποῖον δίδει 47, λέγομεν τὸ ὄγδοον τοῦ 47 εἶναι 5, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ μηδενὸς, καὶ μένει 7. . . . . . .

§, 31. Ἂς ἔλθωμεν εἰς τὴν περίστασιν, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι σύνθετοι ἐκ πολλῶν ψηφίων.

Διὰ νὰ γνωρίσωμεν τὸν τρόπον τῆς ἐκτελέσεως, προκείσθω νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 594 καὶ 437, καὶ μετὰ ταῦτα θέλομεν βεβαιώσει τὴν πρᾶξιν διὰ τῆς διαιρέσεως.

Προκύπτει ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τούτου, ὅτι τὸ γινόμενον 259578 σύγκειται ἐκ τριῶν μερικῶν γινομένων τοῦ πολλαπλασιαστέου 594 ἐπὶ τὰς μονάδας, δεκάδας, καὶ ἑκατοντάδας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 437· λοιπὸν ἀντιστρόφως, δοθέντος τοῦ γινομένου 259578, καὶ ἑνὸς τῶν παραγόντων του 594, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν δεύτερον παράγοντα, ἢ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τούτων τῶν δύο ἀριθμῶν, πρέπει νὰ πασχίσωμεν νὰ θέσωμεν φανερὰ εἰς τὸ γινόμενον 259578 τὰ τρία μερικὰ γινόμενα, ἐκ τῶν ὁποίων σύγκειται. Τὸ πρᾶγμα δὲν φαίνεται τόσον εὔκολον, ἐξαιτίας τῶν ἀναγωγῶν, αἱ ὁποῖαι ἐπράχθησαν μεταξὺ τῶν ψηφίων εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν μερικῶν γινομένων. Ἤδη διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς τοῦτο, ἰδοὺ πῶς συλλογιζόμεθα.

$$
\begin{array}{r}
540 \\
\underline{437} \\
4158 \\
1782\phantom{0} \\
\underline{2376\phantom{00}} \\
259578
\end{array}
$$

| | |
|---|---|
| 259578 | 594 |
| 2376 | 437 |
| 21978 | |
| 1782 | |
| 458 | |
| 4158 | |
| 0000 | |

Τὸ μερικὸν γινόμενον τοῦ 594 ἐπὶ τὰς ἑκατοντάδας τοῦ πηλίκου μὴ δυνάμενον νὰ δώσῃ ὀλιγώτερον ἀπὸ ἑκατοντάδας, περιλαμβάνεται ἀναγκαίως εἰς τὰς 2595 ἑκατοντάδας τοῦ διαιρετέου, καὶ ἐὰν ζητήσωμεν τὸν μεγαλήτερον ἀριθμὸν τῶν φορῶν, κατὰ τὰς ὁποίας ὁ 594 περιέχεται εἰς τὰς 2595, τὸ τοιοῦτον ψηφίον ἐκφράζει τὰς ἑκατοντάδας τοῦ ὅλου πηλίκου. Πρῶτον, τὸ ψηφίον τοῦτο δὲν εἶναι μεῖζον τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ 594, δίδει ἀριθμόν τινα μικρότερον παρὰ 2595 ἑκατοντάδας, καὶ τὸ ὁλικὸν πηλίκον εἶναι τοὐλάχιστον ἴσον μὲ τόσαις φοραῖς 100, ὅσαι μονάδες ἐνυπάρχουν εἰς τὸ ψηφίον τοῦτο.

Δεύτερον τὸ ψηφίον τοῦτο δὲν εἶναι ἔλασσον τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων, ἐπειδὴ ἐὰν ηὐξάνετο μόνον κατὰ μίαν μονάδα, τὸ γινόμενόν του ἐπὶ 594 ἤθελ' εἶναι μεῖζον τῶν 2595 ἑκατοντάδων, καὶ δὲν ἐδύνατο ἐπομένως νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸν διαιρετέον· οὕτως, τὸ ψηφίον τοῦτο εἶναι τὸ τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου.

Ἡ δυσκολία εἰς τὸ νὰ προσδιορίζωμεν τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου, συνίσταται λοιπὸν εἰς τὸ νὰ ζητήσωμεν πόσαις φοραῖς 2595 περιέχει 594, ἢ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ, νὰ ζητήσωμεν τὸ ψηφίον, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ 594, ἀποτελεῖ τὸν ἀριθμὸν τὸν πλέον ἐγγύτερον εἰς τὸ 2595. Ἐδυνάμεθα κατὰ πρῶτον νὰ προσδιορίσωμεν τοῦτο τὸ ψηφίον, ἀφαιροῦντες διαδοχικῶς, ὅσαις φοραῖς δυνηθῶμεν 594 ἀπὸ 2595, ἀλλ' εὐκολυνόμεθα εἰς τὴν ἀναζήτησιν, παρατηροῦντες κατὰ τὸν κανόνα (ἀρ. 19) τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἑνὸς ἀριθμοῦ μὲ πολλὰ ψηφία ἐπὶ ἀριθμόν τινα μὲ ἓν μόνον, ὅτι τὸ 25 ἐξάγεται, μεῖον τινῶν μονάδων προερχομένων ἐκ τῶν ἀναγωγῶν, ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ ψηφίου 5 τοῦ 594 ἐπὶ τὸ ζητούμενον ψηφίον· λοιπὸν ἐὰν διαιρέσωμεν 25 διὰ 5, λαμβάνομεν πηλίκον 5, τὸ ὁποῖον ψηφίον εἶναι ὀλίγον μεγαλήτερον τοῦ πρέποντος, ἐπειδὴ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ 594 ἐπὶ 5, τὸ γινόμενον τοῦ 9 ἐπὶ 5, εἶναι 45 δεκάδες, τουτέστι πρέπει νὰ ἑνώσωμεν μὲ τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ 5 ἢ 25 ἑκατοντάδας 4.

Ἄς δοκιμάσωμεν λοιπὸν τὸ 4. Τὸ γινόμενον τῶν 594 ἐπὶ 4 εἶναι 2376, ἀριθμὸς, ὅστις εἶναι μικρότερος παρὰ 2595, καὶ τὸν ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τοῦτον τὸν τελευταῖον· οὕτω λοιπὸν 4 εἶναι τὸ ἀληθὲς ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων τοῦ πηλίκου, καὶ διὰ τοῦτο τὸν ἐγράψαμεν ὑπὸ τὸν διαιρέτην, ὡς ἀνωτέρω φαίνεται. (Βλέπομεν προσέτι, ὅτι 2376 εἶναι τὸ τρίτον μερικὸν γινόμενον, τὸ κρατηθὲν, ὅταν ἐπολλαπλασιάσαμεν 594 ἐπὶ 437).

Ἀφαιροῦντες 2376 ἀπὸ 2595, καὶ καταβιβάζοντες εἰς τὸ ὑπόλοιπον 219 τὰ ἀκόλουθα ψηφία τοῦ διαιρετέου, ἔχομεν 21978, ἀριθμὸν, ὅστις σύγκειται ἀκόμη ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μερικῶν γινομένων τοῦ 594 ἐπὶ τὰς δεκάδας καὶ μονάδας τοῦ πηλίκου . . . .

Διὰ νὰ λάβωμεν τὰς δεκάδας, συλλογιζόμεθα, ὡς ἀνωτέρω. Τὸ γινόμενον τῶν 594 ἐπὶ τὰς δεκάδας μὴ δυνάμενον νὰ δώσῃ ὀλιγώτερον ἀπὸ δεκάδας εὑρίσκεται ἐξ ἀνάγκης εἰς τὰς 2197 δεκάδας τοῦ νέου διαιρετέου, καὶ ἐὰν ζητήσωμεν τὸν μεγαλήτερον ἀριθμὸν τῶν φορῶν, καθ' ἃς ὁ 594 περιέχεται εἰς 2197, τὸ ψηφίον τοῦτο θέλει εἶναι ἐκεῖνο τῶν δεκάδων τοῦ πηλίκου. Βλέπομεν κατὰ πρῶτον, ὅτι δὲν εἶναι πολὺ μεγάλον, καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενόν του ἐπὶ 594 ἀφαιρεῖται ἀπὸ 2107 δεκάδας, τὸ πηλίκον θέλ' εἶναι κᾂν ἴσον μὲ τόσας δεκάδας, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ ψηφίον τοῦτο. Μετὰ ταῦτα δὲν εἶναι οὔτε πολλὰ μικρὸν, ἐπειδὴ ἐὰν αὐξήσωμεν αὐτὸ ἀπὸ μίαν μονάδα, τὸ γινόμενόν του ἐπὶ 594 θέλει εἶναι μεγαλήτερον τῶν 2197 δεκάδων, καὶ τότε δὲν ἐδύνατο νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸν διαιρετέον 12978.

Ἂς ἴδωμεν λοιπὸν πόσαις φοραῖς 2197 περιέχει 594, ἢ μᾶλλον, κατὰ τὴν ἀνωτέρω παρατήρησιν, πόσαις φοραῖς 21 περιέχει 5, καὶ εὑρίσκομεν 4, ἀλλ' εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ 594 ἐπὶ 4, τὸ γινόμενον τοῦ 9 ἐπὶ 4 εἶναι 36, τὸ ὁποῖον δίδει 3 ἑκατοντάδας, διὰ νὰ τὰς φέρωμεν εἰς τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ 4 ἢ 20· ὅθεν 4 εἶναι πολὺ μεγάλον· ἂς δοκιμάσωμεν λοιπὸν 3. Τὸ γινόμενον τοῦ 594 ἐπὶ 3 εἶναι 1782, ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 2197, καὶ τὸν ὁποῖον γράφομεν ὑπὸ τὸν 2197· οὕτως 3 εἶναι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τοῦ πηλίκου, τὸ ὁποῖον γράφομεν εἰς τὰ δεξιὰ τοῦ ψηφίου 4, τοῦ πρότερον εὑρεθέντος. (τὸ γινόμενον 1782 εἶναι προσέτι τὸ δεύτερον μερικὸν γινόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν 594 ἐπὶ 437).

Ἀφαιροῦντες 1782 ἀπὸ 2197, καὶ καταβιβάζοντες εἰς τὸ ὑπόλοιπον 415 τὸ ψηφίον 8 τοῦ διαιρετέου, λαμβάνομεν 4158, ἀριθμὸν, ὅστις παῤῥησιάζει τὸ γινόμενον τοῦ 594 ἐπὶ τὰς μονάδας τοῦ πηλίκου.

Ζητοῦντες τέλος πάντων πόσαις φοραῖς 4158 περιέχει 594, ἢ μᾶλλον πόσαις φοραῖς 41 περιέχει 5, εὑρίσκομεν 8, ἀλλὰ 8 εἶναι μεγαλήτερον τοῦ πρέποντος, ὡς δυνάμεθα εὐκόλως νὰ ἴδωμεν· δοκιμάζοντες δὲ 7, εὑρίσκομεν γινόμενον τοῦ 594 ἐπὶ 7 4158 ἀριθμὸν, ὅστις ἀφαιρούμενος ἀπὸ τὸ ὑπολειφθὲν μέρος τοῦ διαιρετέου δίδει ὑπόλοιπον μηδέν· οὕτως 7 εἶναι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ πηλίκου· λοιπὸν 437 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

Τῷ ὄντι προκύπτει ἐκ τῶν ἄνω εἰρημένων πράξεων, ὅτι ἀφαιρέσαμεν διαδοχικῶς ἐκ τοῦ διαιρετέου 259578, τὰ μερικὰ γινόμενα τοῦ 594 ἐπὶ 4 ἑκατοντάδας, τρεῖς δεκάδας, 7 μονάδας, καὶ ἐπειδὴ ὕστερον ἀφ' ὅλας τὰς πράξεις δὲν μένει ὑπόλοιπον, ἕπεται, ὅτι 259578 εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ 594 ἐπὶ 437.

§. 32. Ἔστωσαν ἤδη δύο ἀριθμοὶ 3844637 καὶ 657 κατὰ τύχην ληφθέντες, καὶ προκείσθω νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἕνα διὰ τοῦ ἄλλου.

```
3844637 | 657
3285    |-----
-----   | 5851
 559637
 5256
 ------
  34037
  3285
  -----
   1187
    657
   ----
    530
```

Ἡ πρώτη δυσκολία, τὴν ὁποίαν ἀπαντῶμεν, εἶναι νὰ προσδιορίσωμεν τὴν φύσιν καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνωτέρων μονάδων τοῦ πηλίκου. Εἶναι ὅμως κατὰ πρῶτον φανερὸν, ὅτι, ἐὰν λάβωμεν πρότερον εἰς τὰ ἀριστερὰ, τόσα ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης, τουτέστι τρία, καὶ τὰ τοιαῦτα τρία ψηφία περιέχωσι τὸν διαιρέτην, τότε τὸ ζητούμενον πηλίκον θέλει ἔχει δεκάδας χιλιάδος, ἀλλ' ἐπειδὴ δὲν ἀκολουθεῖ τοῦτο εἰς τὸ παρὸν παράδειγμα, τὸ πηλίκον περικλείει πλειότερον ἀπὸ μονάδας χιλιάδος, καὶ τοὐλάχιστον περιέχει μίαν, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦ 657 ἐπὶ 1000 ἢ 657000 εἶναι προφανῶς μικρότερον τοῦ διαιρετέου· οὕτως ἔχομεν βεβαιότητα, ὅτι τὸ πηλίκον συντίθεται ἀπὸ χιλιάδας, ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς χιλιάδας, παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ 657 ἐπὶ τὰς χιλιάδας μὴ δυναμενον νὰ δώσῃ ὀλιγώτερον ἀπὸ χιλιάδας εὑρίσκεται ἀναγκαίως εἰς τὰς 3844 χιλιάδας τοῦ διαιρετέου. καὶ ἐὰν ζητήσωμεν τὸν μεγαλήτερον ἀριθμὸν τῶν φορῶν, κατὰ τὰς ὁποίας τὸ 657 περιέχεται εἰς 3844, τὸ τοιοῦτον ψηφίον θέλει εἶναι ἐκεῖνο τῶν χιλιάδων τοῦ πηλίκου· ἐπειδὴ πρῶτον τὸ τοιοῦτον ψηφίον δὲν εἶναι μεγαλήτερον, διότι τὸ γινόμενόν του ἐπὶ 657 δίδει ὀλιγώτερα παρὰ 3844 χιλιάδας, καὶ δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸν διαιρετέον, καὶ διὰ τοῦτο τὸ πηλίκον εἶναι τοὐλάχιστον ἴσον μὲ τόσαις φοραῖς 1000, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ ψηφίον τοῦτο, ἀλλὰ οὔτε εἶναι μικρότερον, ἐπειδὴ ἐὰν αὐξηθῇ ἀπὸ μίαν μόνην μονάδα, τὸ γινόμενόν του ἐπὶ 657 δίδει περισσότερον ἀπὸ 3844 χιλιάδας καὶ δὲν δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ πλέον ἀπὸ τὸν διαιρετέον.

Ἂς ζητήσωμεν λοιπὸν πόσαις φοραῖς 3844 περιέχει 657, ἢ ἁπλῶς πόσαις φοραῖς 38 περιέχει 6, εὑρίσκομεν 6, ἀλλὰ 6 εἶναι μεγαλήτερον, ἐπειδὴ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ 657 ἐπὶ 6, τὸ γινόμενον τοῦ 5 ἐπὶ 6 εἶναι 30, τὸ ὁποῖον δίδει τρεῖς ἑκατοντάδας διὰ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ γινόμενον τοῦ 6 ἐπὶ 6 ἢ 36· ἃς δοκιμάσωμεν λοιπὸν τὸ 5· τὸ γινόμενον τοῦ 657 ἐπὶ 5 εἶναι 3285 τὸ ὁποῖον γράφεται ὑπὸ τῶν 3844., καὶ βάλλομεν 5 εἰς τὸ πηλίκον, ἐπειδὴ ἐκφράζει τὰς χιλιάδας τοῦ ὅλου πηλίκου. Ἀφαιροῦντες 3285 ἀπὸ 3844, καὶ καταβάζοντες εἰς τὸ πλευρὸν τοῦ ὑπολοίπου 55, τὰ ἄλλα ψηφία τοῦ διαιρετέου, συνάγομεν 559637 ἀριθμὸν, ὅστις σύγκειται ἀκόμη ἀπὸ τὰ μερικὰ γινόμενα τοῦ 657 ἐπὶ τὰς ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας τοῦ πηλίκου, καὶ ἐπὶ τοῦ ὁποίου πρέπει ἑπομένως νὰ συλλογισθῶμεν καὶ νὰ πράξωμεν, ὡς εἰς τὸν πρῶτον διαιρετέον. Διὰ νὰ λάβωμεν τὰς ἑκατοντάδας, λαμβάνομεν τὰς 5596 ἑκα-